Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, Преобразования Лежандра на треугольной решетке, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 1, 1–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:30:25

УДК 517.962.24

Преобразования Лежандра на треугольной решетке*

© 2000. В. Э. Адлер

§1. Дуальные системы

Изучение нелинейных цепочек

$$\ddot{q}_n = r(\dot{q}_n)(g_{n+1} - g_n), \quad g_n = g(q_n - q_{n-1}), \quad (1)$$

привело Тоду к понятию дуальной системы, которая получается из исходной «замещением частиц на пружины и пружин на частицы по определенным правилам» [1]. Эти правила заключаются в следующем. Цепочка (1) эквивалентна уравнению Эйлера–Лагранжа для функционала

$$\mathcal{L} = \int \sum_n (a(\dot{q}_n) - b_n) dt, \quad a'' = \frac{1}{r}, \quad b' = g,$$

где a и b определяют соответственно кинетическую и потенциальную энергию цепочки. Закон сохранения импульса (T_n обозначает оператор сдвига $q_n \rightarrow q_{n+1}$)

$$\frac{d}{dt} a'(\dot{q}_n) = (T_n - 1)g_n$$

позволяет ввести новую переменную Q_n по формулам

$$\dot{Q}_n = g_n, \quad Q_{n+1} - Q_n = a'(\dot{q}_n).$$

Следуя терминологии работы [2], будем называть эту и аналогичные замены обобщенными преобразованиями Лежандра. Переменная Q_n удовлетворяет дуальной цепочке

$$\ddot{Q}_n = R(\dot{Q}_n)(G_{n+1} - G_n),$$

где функции R и G определяются равенствами $g' = R(g)$, $G(a'(q)) = q$. Например, цепочка Тоды $\ddot{q}_n = \exp(q_{n+1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n-1})$ дуальна цепочке $\ddot{Q}_n = \dot{Q}_n(Q_{n+1} - 2Q_n - Q_{n-1})$.

Обратим внимание на следующие особенности указанного преобразования. Во-первых, оно возможно благодаря инвариантности лагранжиана относительно сдвига $q \rightarrow q + \text{const}$. Во-вторых, оно осуществимо при любых r и g , т.е. не имеет отношения к интегрируемости. В-третьих, оно инволютивно (с точностью до сдвига T_n) и потому его нельзя использовать для размножения решений цепочки.

В [2] было показано, что переход к цепочкам типа релятивистской цепочки Тоды

$$\ddot{q}_n = r(\dot{q}_n)(\dot{q}_{n+1}h_{n+1} - \dot{q}_{n-1}h_n + g_{n+1} - g_n) \quad (2)$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 96-01-00128.

в корне меняет ситуацию. Лагранжиан для цепочки (2) отличается от выписанного выше слагаемым $-\dot{q}_n c_n$, $c' = h$, которое можно интерпретировать как наличие магнитного поля. Это слагаемое можно заменить, с точностью до дивергентных членов, на $-\dot{q}_n c_{n+1}$, что приводит к двоякой записи закона сохранения импульса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a'(\dot{q}_n) - c_n) &= (T_n - 1)(\dot{q}_n h_n + g_n) \\ \iff \frac{d}{dt}(a'(\dot{q}_n) - c_{n+1}) &= (T_n - 1)(\dot{q}_{n-1} h_n + g_n), \end{aligned}$$

и, как следствие, к паре обобщенных преобразований Лежандра

$$\begin{aligned} T_- : \quad \dot{Q}_n &= \dot{q}_n h_n + g_n, & Q_{n+1} - Q_n &= a'(\dot{q}_n) - c_n, \\ T_+ : \quad \tilde{\dot{Q}}_n &= \dot{q}_{n-1} h_n + g_n, & \tilde{Q}_{n+1} - \tilde{Q}_n &= a'(\dot{q}_n) - c_{n+1}. \end{aligned}$$

В отличие от предыдущего примера эти преобразования, вообще говоря, выводят из класса цепочек (2). Оказывается, что требование, чтобы преобразованная цепочка имела тот же вид, является весьма жестким и выделяет в точности подкласс интегрируемых цепочек (т.е. цепочек, обладающих высшими симметриями и законами сохранения) [2]. Это неудивительно, поскольку в этом случае композиция преобразований Лежандра $T_-^{-1}T_+$ задает для исходной цепочки преобразование Бэклунда, которое является неперменным атрибутом интегрируемой системы. Ситуация здесь аналогична случаю уравнения КдФ, преобразование Бэклунда для которого строится как композиция двух слегка различных преобразований Миуры.

Рис. 1

Целью данной работы является перенесение этих идей на чисто дискретный случай: дифференцирование d/dt заменяется на сдвиг $T_m: q_{m,n} \rightarrow q_{m+1,n}$ по дополнительному индексу. Для сокращения записи индексы m, n будут в дальнейшем, как правило, опускаться: $q = q_{m,n}$, $q_{1,0} = q_{m+1,n}$ и т.д. Кроме того, удобно ввести обозначения для разностей (см. рис. 1):

$$x = q - q_{-1,0}, \quad y = q - q_{0,-1}, \quad z = q - q_{-1,-1}.$$

Очевидно, имеет место тождество

$$(T_m - 1)y_{0,1} = (T_n - 1)x_{1,0}. \quad (3)$$

Аналогом цепочки (1) является 5-точечное разностное уравнение

$$(T_m - 1)f(x) = (T_n - 1)g(y) \quad (4)$$

типа дискретной цепочки Тоды [3, 4, 5, 2], а преобразование Лежандра имеет вид

$$Y_{0,1} = Q_{0,1} - Q = f(x), \quad X_{1,0} = Q_{1,0} - Q = g(y).$$

Как и в непрерывном случае, оно не связано с интегрируемостью. Аналог релятивистских цепочек (2) более симметричен, чем в непрерывном случае. Рассмотрим функционалы вида

$$\mathcal{L} = \sum_{m,n} (a(x) + b(y) + c(z)).$$

Очевидно, что здесь все слагаемые (играющие роль кинетической и потенциальной энергий и магнитного поля) совершенно равноправны, т.е. эстетичнее считать, что переменные q нумеруются точками не квадратной, а правильной треугольной решетки. Тем не менее для удобства вычислений мы сохраняем стандартное расположение координатных осей. Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$(T_m - 1)f(x) + (T_n - 1)g(y) + (T_m T_n - 1)h(z) = 0, \quad (5)$$

где $f = a'$, $g = b'$, $h = c'$, причем мы будем считать, что $f'g'h' \neq 0$, так как иначе оно сводится к (4). Уравнения такого типа впервые появились, по-видимому, в работах Суриса [6, 7, 8], который также пришел к ним, отталкиваясь от релятивистских цепочек Тоды.

То обстоятельство, что третья разность выражается через x , y двумя способами, приводит к двум равноправным вариантам записи уравнения (5) в виде закона сохранения импульса:

$$\begin{aligned} (T_m - 1)(f(x) + h(z_{0,1})) + (T_n - 1)(g(y) + h(z)) &= 0 \\ \iff (T_m - 1)(f(x) + h(z)) + (T_n - 1)(g(y) + h(z_{1,0})) &= 0. \end{aligned}$$

В результате мы можем определить пару преобразований Лежандра

$$T_+ : (X, Y_{-1,0}) = T(x, y_{0,1}), \quad T_- : (\tilde{X}_{0,-1}, \tilde{Y}) = T(x_{1,0}, y), \quad (6)$$

где отображение $T: (x, y) \rightarrow (X, Y)$ задается формулами

$$X = g(y) + h(x + y), \quad Y = -f(x) - h(x + y). \quad (7)$$

Заметим, что цепочки вида (2) являются непрерывным пределом уравнений (5). Действительно, рассмотрим семейство функционалов

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \sum_{m,n} (\varepsilon a(x_{m,n}/\varepsilon) + \varepsilon b(y_{m,n}) - c(y_{m,n}) + c(z_{m,n}))$$

и положим $q_{m,n} = q_n(t)$, $t = m\varepsilon$. Нетрудно видеть, что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ возникает функционал

$$\int \sum_n (a(\dot{q}_n) + b_n + \dot{q}_n c'_n) dt,$$

лишь обозначениями отличающийся от рассмотренного выше. Преобразования Лежандра для соответствующей релятивистской цепочки Тоды также получаются из (6) при указанном предельном переходе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение (5) *интегрируемо*, если обобщенные преобразования Лежандра (6), (7) обратимы (на разностях) и переводят его в уравнение такого же вида.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (5) *интегрируемо в смысле определения 1, если и только если преобразование, обратное к (7), задается формулами вида*

$$x = G(Y) + H(X + Y), \quad y = -F(X) - H(X + Y). \quad (8)$$

При этом дуальное уравнение имеет вид

$$(T_m - 1)F(X) + (T_n - 1)G(Y) + (T_m T_n - 1)H(Z) = 0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно рассмотреть преобразование T_+ . Допустим, что T_+^{-1} имеет указанный вид; тогда, как нетрудно убедиться, тождество (3) эквивалентно уравнению (9). Обратно, пусть известно, что T_+ переводит (5) в (9). Разрешая формулы $(X, Y_{-1,0}) = T(x, y_{0,1})$ относительно $x, y_{0,1}$, получим

$$x = \Phi(X, Y_{-1,0}), \quad y_{0,1} = \Psi(X, Y_{-1,0}),$$

и тождество (3) даст уравнение

$$\Phi(X_{1,1}, Y_{0,1}) - \Phi(X_{1,0}, Y) - \Psi(X_{1,0}, Y) + \Psi(X, Y_{-1,0}) = 0,$$

которое должно быть эквивалентным уравнению (9), т. е.

$$F(X_{1,0}) - F(X) + G(Y_{0,1}) - G(Y) + H(X_{1,1} + Y_{0,1}) - H(X + Y_{-1,0}) = 0.$$

Считая $X_{1,1}$ функцией от всех остальных переменных, участвующих в этих уравнениях, получаем

$$-\frac{\partial X_{1,1}}{\partial Y_{0,1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y_{0,1}} \Big/ \frac{\partial \Phi}{\partial X_{1,1}} = \frac{G'(Y_{0,1}) + H'(X_{1,1} + Y_{0,1})}{H'(X_{1,1} + Y_{0,1})},$$

откуда $\Phi(X, Y) = \varphi(G(Y) + H(X + Y))$. Аналогично, из равенства

$$-\frac{\partial Y_{-1,0}}{\partial X} = \frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big/ \frac{\partial \Psi}{\partial Y_{-1,0}} = \frac{F'(X) + H'(X + Y_{-1,0})}{H'(X + Y_{-1,0})}$$

вытекает, что $\Psi(X, Y) = \psi(F(X) + H(X + Y))$. Наконец, из соотношений

$$-\frac{\partial X_{1,0}}{\partial Y} = \frac{\partial(\Phi + \Psi)}{\partial Y} \Big/ \frac{\partial(\Phi + \Psi)}{\partial X_{1,0}} = -\frac{G'(Y)}{F'(X_{1,0})}$$

следует, что $\Phi(X, Y) + \Psi(X, Y) = \chi(F(X) - G(Y))$. Отсюда легко получить, что $\varphi(z) = \alpha z + \beta$, $\psi(z) = -\alpha z + \gamma$, а это и требуется (заметим, что функции F, G, H определены в (9) с точностью до линейного преобразования). $\square$

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что уравнение, дуальное к дуальному, совпадает с исходным. Это позволяет использовать композицию преобразований Лежандра $T_-^{-1}T_+$ для размножения решений.

§2. Классификационная теорема

Итак, для классификации интегрируемых уравнений (5) достаточно перечислить все функции f , g , h , такие, что преобразование (7) имеет обратное вида (8). Таким образом, якобиан $\Delta = f'g' + g'h' + h'f'$ отображения (7) должен быть отличен от нуля и должны выполняться равенства

$$x_{XY} + y_{XY} = 0, \quad x_{XY} = x_{XX}, \quad y_{XY} = y_{YY}.$$

Оказывается, что эти три условия эквивалентны друг другу. Действительно, матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} x_X & y_X \\ x_Y & y_Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -h' & f' + h' \\ -g' - h' & h' \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $x_X = -y_Y$. Прямое вычисление показывает, что функции $f(x)$, $g(y)$, $h(x+y)$ должны быть связаны соотношением

$$(g' + h') \frac{f''}{f'} + (f' + h') \frac{g''}{g'} = (f' + g') \frac{h''}{h'}.$$

Положив $f' = 1/u$, $g' = 1/v$, $h' = 1/w$, перепишем его в более удобной форме:

$$[v(y) + w(x+y)]u'(x) + [u(x) + w(x+y)]v'(y) = [u(x) + v(y)]w'(x+y). \quad (10)$$

К решению этого функционального уравнения и сводится классификационная задача. Заметим, что функции u , v , w интересуют нас с точностью до умножения на постоянную и линейного преобразования $\tilde{x} = c(x - x_0)$, $\tilde{y} = c(y - y_0)$, являющегося следствием замены $\tilde{q}_{m,n} = c(q_{m,n} - mx_0 - ny_0 - \text{const})$, а также переобозначения координатных осей.

Сначала разберем несколько вырожденных случаев. Допустим, что среди функций u , v , w две постоянны, скажем u и v . Тогда из (10) следует, что либо w тоже постоянна, либо $u = -v$, а w произвольна. В первом случае уравнение (5) линейно, а во втором имеет вид

$$\alpha(q_{1,0} + q_{-1,0} - q_{0,1} - q_{0,-1}) + h(q_{1,1} - q) - h(q - q_{-1,-1}) = 0$$

и допускает понижение порядка:

$$\alpha(q_{m+1,n} - q_{m,n+1}) + h(q_{m+1,n+1} - q_{m,n}) = c_{m-n}.$$

Другое вырождение получается, если якобиан преобразования вырожден, т.е. $u + v + w = 0$ (откуда следует, что все три функции линейны). В этом случае можно показать, что уравнение (5) редуцируется к уравнению на переменную $p = y_{0,1}/x$. В дальнейшем мы не будем рассматривать эти вырождения.

ЛЕММА 1. *Функции u , v , w удовлетворяют уравнениям*

$$(u')^2 = \delta u^2 + 2\alpha u + \varepsilon, \quad (v')^2 = \delta v^2 + 2\beta v + \varepsilon, \quad (w')^2 = \delta w^2 + 2\gamma w + \varepsilon. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что функции $u(x)$ и $v(y)$ удовлетворяют уравнению

$$(u'' - v'')(u + v) - (u')^2 + (v')^2 = k(u - v), \quad k = \text{const}. \quad (12)$$

Проведем исключение функции w из (10). Применяв оператор $\partial_x - \partial_y$, получим линейную систему относительно w, w' :

$$\begin{pmatrix} u' + v' & -u - v \\ u'' - v'' & v' - u' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w + u \\ w' \end{pmatrix} = (u - v) \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix}.$$

Ее определитель Δ равен в точности левой части уравнения (12). Если он тождественно равен нулю, то (12) выполняется; в противном случае имеем

$$w + u = \frac{u - v}{\Delta} (uu'' - (u')^2 + u''v + u'v'), \quad w' = \frac{u - v}{\Delta} (u''v' + u'v''),$$

откуда следует $((u - v)/\Delta)_y (uu'' - (u')^2 + u''v + u'v') = 0$. Предположим, что нулю равна вторая скобка. Если $u' \neq 0$, то $v' = -u''v/u' + u' - uu''/u'$, $v'' = -u''v'/u'$, но тогда, как нетрудно проверить, $\Delta = 0$. Если же $u' = 0$, то $w + u = 0$, т.е. мы приходим к рассмотренному выше вырожденному решению. Итак, $((u - v)/\Delta)_y = 0$. В силу симметрии u и v точно также можно доказать, что $((u - v)/\Delta)_x = 0$, а это и дает (12).

Далее, переписав (12) в виде

$$\left(\frac{u'}{u + v} \right)_x = \frac{v'' + k}{u + v} - \frac{(v')^2 + 2kv}{(u + v)^2},$$

домножив на $u'/(u + v)$ и проинтегрировав по x , получим

$$(u')^2 = \delta(y)(u + v)^2 - 2(v'' + k)(u + v) + (v')^2 + 2kv.$$

Меняя ролями u и v , получаем

$$(v')^2 = \tilde{\delta}(x)(u + v)^2 - 2(u'' + k)(u + v) + (u')^2 + 2ku.$$

Вычитая одно уравнение из другого и учитывая (12), получаем $\tilde{\delta} = \delta = \text{const}$. Складывая и деля на $u + v$, приходим к равенству $u'' + v'' = \delta(u + v) - k$. Разделяя переменные, получаем $(u')^2 = \delta u^2 + 2\alpha u + \varepsilon$, $(v')^2 = \delta v^2 + 2\beta v + \tilde{\varepsilon}$, где $\alpha + \beta = -k$. Подстановка в (12) дает $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$. Последнее из уравнений (11) выполняется в силу симметрии координатных осей. $\square$

Разумеется, решения уравнений (11) должны удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям согласованности. Однако их анализ уже не представляет принципиальных трудностей, и прямой перебор всех решений приводит к следующему списку.

ТЕОРЕМА 2. *С точностью до замен $\tilde{q}_{m,n} = c(q_{m,n} - mx_0 - ny_0)$ и перестановки координатных осей наборы функций f, g, h , соответствующие уравнениям (5), интегрируемым в смысле определения 1, исчерпываются приведенным ниже списком. В формулах (A), (B), (C) параметры связаны условием $\lambda + \mu + \nu = 0$, а в формуле (I) — условием $\lambda\mu\nu = -1$.*

$$(A) \quad f = \frac{\mu}{x}, \quad g = \frac{\nu}{y}, \quad h = \frac{\lambda}{z},$$

$$(B) \quad f = \mu \coth x, \quad g = \nu \coth y, \quad h = \lambda \coth z,$$

$$(C) \quad f = \frac{1}{2} \log \frac{x + \mu}{x - \mu}, \quad g = \frac{1}{2} \log \frac{y + \nu}{y - \nu}, \quad h = \frac{1}{2} \log \frac{z + \lambda}{z - \lambda},$$

$$\begin{aligned}
\text{(D)} \quad & f = \log x, & g = \log y, & h = \log \left(1 - \frac{1}{z}\right), \\
\text{(E)} \quad & f = -e^x - 1, & g = e^{-y}, & h = \frac{1}{1 + e^z}, \\
\text{(F)} \quad & f = \log(e^x - 1), & g = \log(e^y - 1), & h = -\log(e^z - 1), \\
\text{(G)} \quad & f = -\log(e^{-x} - 1), & g = \log(e^y - 1), & h = -z, \\
\text{(H)} \quad & f = \log(\lambda^{-1}(e^x + 1)), & g = \log(e^{-y} - 1), & h = \log \frac{e^z + \lambda}{e^z + 1}, \\
\text{(I)} \quad & f = \log \frac{\mu e^x + 1}{e^x + \mu}, & g = \log \frac{\nu e^y + 1}{e^y + \nu}, & h = \log \frac{\lambda e^z + 1}{e^z + \lambda}.
\end{aligned}$$

При этом преобразования Лежандра (6), (7) связывают друг с другом уравнения, отвечающие решениям (B) и (C), (D) и (E), (F) и (G), а уравнения, отвечающие решениям (A), (H) и (I), дуальны сами себе. $\square$

Заметим, что случаи (A) и (B) связаны точечной заменой $q = \exp(2\tilde{q})$. Это объясняется тем, что лагранжиан $\sum(\mu \log x + \nu \log y + \lambda \log z)$ уравнения (5)(A) инвариантен не только относительно сдвигов $q \rightarrow q + C$, но и относительно растяжений $q \rightarrow Cq$. С другой стороны, инверсии $q \rightarrow q/(1 - Cq)$ также сохраняют лагранжиан, но замена $q = 1/\tilde{q}$, превращающая эту группу в группу сдвигов, не приводит к новому уравнению.

По-видимому, случаи (E), (F), (G), (H), а также (A) и (B) при $\lambda = 0$ впервые были рассмотрены в работах Суриса [5, 6, 7, 8]. Остальные случаи, насколько известно автору, являются новыми.

§3. Высшие симметрии

Изучение свойств найденных уравнений выходит за рамки данной статьи. Разумеется, следует убедиться, что определение 1 выдает уравнения, интегрируемые и в более привычном смысле, т. е. удовлетворяющие тесту Пенлеве или обладающие высшими симметриями и законами сохранения. Здесь мы ограничимся тем, что приведем представление нулевой кривизны и некоторые высшие симметрии для наиболее простого уравнения (5)(A), которое перепишем в виде

$$\frac{\mu}{q_{1,0} - q} + \frac{\mu}{q_{-1,0} - q} + \frac{\nu}{q_{0,1} - q} + \frac{\nu}{q_{0,-1} - q} + \frac{\lambda}{q_{1,1} - q} + \frac{\lambda}{q_{-1,-1} - q} = 0, \quad (13)$$

где $\lambda + \mu + \nu = 0$. Заметим, что все формулы этого параграфа остаются справедливыми и в случае, когда λ обращается в нуль и уравнение (13) вырождается в уравнение вида (4).

Под (непрерывной) симметрией дискретного уравнения $E = 0$ понимается векторное поле $q_t = \Phi$ на решетке, сохраняющее это уравнение: $\partial_t(E) = 0|_{E=0}$. Для полноты картины сначала опять рассмотрим классические симметрии $q_t = 1$, $q_t = q$, $q_t = q^2$, отвечающие группе дробно-линейных преобразований. Так как эти симметрии вариационные, то в силу теоремы Нётер, умножая (13) на их правые части, мы получим некоторые законы сохранения. Действительно, симметрия сдвига порождает закон сохранения импульса (5), а

растяжения и инверсии приводят соответственно к законам сохранения

$$(T_m - 1) \frac{\mu q}{q - q_{-1,0}} + (T_n - 1) \frac{\nu q}{q - q_{0,-1}} + (T_m T_n - 1) \frac{\lambda q}{q - q_{-1,-1}} = 0,$$

$$(T_m - 1) \frac{\mu q q_{-1,0}}{q - q_{-1,0}} + (T_n - 1) \frac{\nu q q_{0,-1}}{q - q_{0,-1}} + (T_m T_n - 1) \frac{\lambda q q_{-1,-1}}{q - q_{-1,-1}} = 0.$$

Структура высших симметрий для уравнения (13) достаточно своеобразна, как можно судить уже по простейшим их представителям, и было бы очень интересно получить полное описание алгебры симметрий.

ТЕОРЕМА 3. *Следующие формулы определяют симметрии уравнения (13):*

$$\frac{1}{q_\xi} = \frac{\mu}{q_{-1,0} - q} + \frac{\nu}{q_{0,1} - q} + \frac{\lambda}{q_{-1,-1} - q},$$

$$\frac{1}{q_\eta} = \frac{\mu}{q_{1,0} - q} + \frac{\nu}{q_{0,-1} - q} + \frac{\lambda}{q_{-1,-1} - q},$$

$$\frac{1}{q_\zeta} = \frac{\mu}{q_{1,0} - q} + \frac{\nu}{q_{0,1} - q} + \frac{\lambda}{q_{1,1} - q}.$$

Векторные поля ∂_ξ , ∂_η , ∂_ζ коммутируют в силу уравнения (13).

Доказательство заключается в прямом, хотя и трудоемком вычислении. Проверку определяющего уравнения $\partial_t(E) = 0|_{E=0}$ достаточно проделать для одной из симметрий, так как две другие получаются циклической перестановкой осей x , y , z .

Представление нулевой кривизны для уравнения (13) формулируется как условие совместности вспомогательных линейных задач $\Psi_{1,0} = A\Psi$ и $\Psi_{1,1} = B\Psi_{1,0}$. Чтобы сохранить равноправие направлений на решетке, добавим еще уравнение $\Psi = C\Psi_{1,1}$, что дает

$$BA = A_{0,1}B_{-1,0}, \quad AC = C_{1,0}A_{1,1}, \quad CB = B_{-1,-1}C_{0,-1}. \quad (14)$$

Условие совместности с задачей вида $\Psi_t = U\Psi$, отвечающей непрерывной симметрии, приводит к уравнениям

$$A_t = U_{1,0}A - AU, \quad B_t = U_{1,1}B - BU_{1,0}, \quad C_t = UC - CU_{1,1}. \quad (15)$$

Рис. 2

Матрицы A , B и C имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A &= (k - \mu)I - \nu P(q, q_{0,-1}) - \lambda P(q, q_{-1,-1}), \\ B &= kI - \mu P(q, q_{1,0}) - \lambda P(q, q_{1,1}), \\ C &= (k + \nu)I - \mu P(q, q_{-1,0}) - \nu P(q, q_{0,1}), \end{aligned}$$

где k — спектральный параметр, I — единичная матрица и проектор P задается формулой

$$P(u, v) = \frac{1}{u - v} \begin{pmatrix} -v & -uv \\ 1 & u \end{pmatrix}$$

(коэффициенты при I можно сделать более симметричными сдвигом $k \rightarrow k + (\mu - \nu)/3$). На рис. 2 каждая из матриц A , B , C размещена в том треугольнике, от вершин которого зависит (центру шестиугольника соответствует переменная q). Заметим также, что $CBA = k(k - \mu)(k + \nu)I$, т. е. применение операторов A , B , C переводит, с точностью до скалярного множителя, волновую функцию в себя. Проверка эквивалентности уравнения (13) уравнениям (14) не вызывает особых затруднений, если учесть свойства

$$P(u, v)P(p, q) = \frac{(u - q)(p - v)}{(u - v)(p - q)} P(p, v), \quad P(u, v) + P(v, u) = I.$$

Представления (15) для симметрии $\partial_t = \partial_\zeta$ задаются матрицей $U = k^{-1}(\tilde{U} - \frac{1}{2}I)$, где проектор $\tilde{U}$ имеет вид

$$\tilde{U} = \frac{1}{\alpha + q_{-1,0}\beta} \begin{pmatrix} \alpha & q_{-1,0}\alpha \\ \beta & q_{-1,0}\beta \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \lambda q q_{-1,-1} + \mu q_{-1,-1} q_{0,-1} + \nu q_{0,-1} q, \quad \beta = \lambda q_{0,-1} + \mu q + \nu q_{-1,-1}.$$

Следует подчеркнуть, что симметрии из теоремы 3 не являются сами по себе интегрируемыми уравнениями и рассматривать их имеет смысл только вместе со связью (13). Иными словами, они являются 1+1-, а не 1+2-мерными уравнениями. Действительно, если положить $u_m = q_{m,n}$, $v_m = q_{m,n-1}$, то симметрии ∂_η , ∂_ζ можно переписать, пользуясь уравнением (13), в виде одномерных цепочек

$$\frac{1}{u_\eta} = \frac{\mu}{u_1 - u} + \frac{\nu}{v - u} + \frac{\lambda}{v_{-1} - u}, \quad -\frac{1}{v_\eta} = \frac{\mu}{v_{-1} - v} + \frac{\nu}{u - v} + \frac{\lambda}{u_1 - v}, \quad (16)$$

$$-\frac{1}{u_\zeta} = \frac{\mu}{u_{-1} - u} + \frac{\nu}{v - u} + \frac{\lambda}{v_{-1} - u}, \quad \frac{1}{v_\zeta} = \frac{\mu}{v_1 - v} + \frac{\nu}{u - v} + \frac{\lambda}{u_1 - v} \quad (17)$$

(чтобы переписать в аналогичном виде ∂_ξ , следует выбрать динамические переменные вдоль оси y или z).

Замечательным обстоятельством является то, что эти цепочки эквивалентны одной из релятивистских цепочек (2), а именно цепочке, связанной с изотропной моделью Гейзенберга.

ТЕОРЕМА 4. *Исключение переменных v_m из уравнений (16) приводит к цепочке*

$$u_{\eta\eta} = u_\eta^2 \left(\frac{\mu u_{1,\eta}}{(u_1 - u)^2} - \frac{\mu u_{-1,\eta}}{(u - u_{-1})^2} - \frac{1}{u_1 - u} + \frac{1}{u - u_{-1}} \right).$$

Векторные поля, определяемые уравнениями (16) и (17), коммутируют, и переменные $u = u_m$, $v = v_m$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} u_{\eta\zeta} &= \frac{2u_{\eta}u_{\zeta}}{u-v} + \frac{u_{\eta}}{\mu} - \frac{u_{\zeta}}{\mu} \sqrt{1-4\lambda\mu \frac{u_{\eta}v_{\eta}}{(u-v)^2}}, \\ v_{\eta\zeta} &= \frac{2v_{\eta}v_{\zeta}}{v-u} - \frac{v_{\eta}}{\mu} + \frac{v_{\zeta}}{\mu} \sqrt{1-4\lambda\mu \frac{u_{\eta}v_{\eta}}{(u-v)^2}} \end{aligned}$$

(здесь предполагается, что $\mu \neq 0$) в силу этих уравнений. $\square$

Таким образом, связь между непрерывными уравнениями (2) и их дискретными аналогами (5) более глубока, чем это кажется на первый взгляд. Отметим, что связь между цепочками (2) и уравнениями вида (4) уже была установлена в работе [2]. А именно, там было показано, что композиция преобразований Лежандра $T_-^{-1}T_+$ для релятивистских цепочек Тоды эквивалентна сдвигу в цепочках Тоды (1) и принцип нелинейной суперпозиции между цепочками этих двух типов приводит к уравнениям (4). Разобранный нами пример показывает, что уравнения (5) тоже можно интерпретировать как принцип нелинейной суперпозиции, но уже между парой релятивистских цепочек.

В заключение отметим, что, хотя исследование уравнения (13) при помощи теста Пенлеве и не проводилось, но простейшие примеры 2-периодических замыканий (имеется несколько вариантов) свидетельствуют, что оно является Пенлеве-интегрируемым и при $\lambda + \mu + \nu \neq 0$. Разумеется, в этом случае приведенные выше представления нулевой кривизны и симметрии отсутствуют. Возможно, ситуация здесь аналогична случаю разностных уравнений Хироты–Мивы и KdV, Пенлеве-анализ для которых был проделан в работе [9].

§ 4. Заключительные замечания

Основной целью автора было показать, что условие инвариантности относительно преобразований Лежандра позволяет эффективно выделять классы интегрируемых уравнений. Найденные примеры разностных уравнений на треугольной решетке, являющиеся дискретными аналогами релятивистских цепочек Тоды, позволяют надеяться, что метод преобразований Лежандра, предложенный в работе [2], не является простым трюком и область его применимости достаточно широка. Обобщение этого метода на новые типы уравнений, в том числе многомерные, остается открытой задачей.

Как и в непрерывном случае, наиболее слабое место — это предположение о сдвиговой инвариантности лагранжиана. Опыт релятивистских цепочек Тоды [2] подсказывает, что должен существовать также разностный аналог уравнения Ландау–Лифшица, характеризующийся отсутствием классических симметрий.

В то же время несложно найти некоторые многополевые обобщения, хотя полное их описание, как и в цепочечном случае, далеко от удовлетворительного состояния. Укажем только векторный аналог дискретного уравнения Гейзенберга (13):

$$\mu(T_m - 1) \frac{x}{|x|^2} + \nu(T_n - 1) \frac{y}{|y|^2} = (\mu + \nu)(T_m T_n - 1) \frac{z}{|z|^2},$$

где $q \in \mathbb{R}^d$ и $|q|$ обозначает евклидову норму. Преобразование Лежандра T_+ имеет вид

$$X = \nu \frac{y_{0,1}}{|y_{0,1}|^2} - (\mu + \nu) \frac{x + y_{0,1}}{|x + y_{0,1}|^2}, \quad Y_{-1,0} = -\mu \frac{x}{|x|^2} + (\mu + \nu) \frac{x + y_{0,1}}{|x + y_{0,1}|^2}$$

и, как и в скалярном случае, переводит уравнение в себя. По-видимому, этот пример допускает обобщения на произвольные йордановы тройные системы с обратимыми элементами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Toda M.* Теория нелинейных решеток. Мир, М., 1984.
2. *Адлер В. Э., Шабат А. Б.* Обобщенные преобразования Лежандра. ТМФ, **112**, вып. 2, 179–194 (1997).
3. *Hirota R.* Nonlinear partial difference equations. II. Discrete-time Toda equation. J. Phys. Soc. Japan, **43**, 2074–2078 (1977).
4. *Suris Yu. B.* Discrete time generalized Toda lattices: complete integrability and relation with relativistic Toda lattices. Phys. Lett. A, **145**, 113–119 (1990).
5. *Suris Yu. B.* Bi-Hamiltonian structure of the qd algorithm and new discretizations of the Toda lattice. Phys. Lett. A, **206**, 153–161 (1995).
6. *Suris Yu. B.* A discrete-time relativistic Toda lattice. J. Phys. A, **29**, 451–465 (1996).
7. *Suris Yu. B.* A collection of integrable systems of the Toda type in continuous and discrete time, with 2×2 Lax representations. Solv-int 9703004.
8. *Suris Yu. B.* New integrable systems related to the relativistic Toda lattice. J. Phys. A, **30**, 1745–1761 (1997).
9. *Ramani A., Grammaticos B., Satsuma J.* Integrability of multidimensional discrete systems. Phys. Lett. A, **169**, 323–328 (1992).

Институт математики Уфимского
научного центра РАН

Поступило в редакцию
21 августа 1998 г.