Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, Трехстраничный подход в теории узлов. Универсальная полугруппа, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 1, 29–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 06:42:04

УДК 515.164.63

Трехстраничный подход в теории узлов. Универсальная полугруппа*

© 2000. И. А. Дынников

В предыдущей работе автора [9] указывается способ кодирования неориентированных зацеплений, вложенных в трехстраничную книгу, словами в 12-буквенном алфавите и приводится конечный набор локальных замен, реализующих эквивалентность зацеплений. Здесь мы дадим простую алгебраическую интерпретацию этих результатов, а именно укажем конечно представленную полугруппу, центр которой классифицирует неориентированные зацепления. Мы докажем, что группа кос B_∞ на бесконечном числе нитей реализуется как коммутант группы, порожденной двумя образующими и тремя соотношениями

$$[[a, b], a^2ba^{-2}] = [[a, b], b^2ab^{-2}] = [[a, b], [a^{-1}, b^{-1}]] = 1, \quad (1)$$

где $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Мы также обобщим конструкцию нашей полугруппы на случай оснащенных зацеплений.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [4]. Некоторые другие результаты, в частности о частичном алгоритме распознавания тривиального узла с помощью трехстраничных диаграмм, см. в [5].

§1. Трехстраничные плетения и косы

В настоящей работе мы будем использовать определения и обозначения из работы [9]. Напомним, что в [9, определение 1] мы ввели понятие трехстраничной диаграммы зацепления как зацепления, вложенного в трехстраничную книгу $\mathbb{Y}$ (т.е. объединение трех полуплоскостей P_1, P_2, P_3 , прикрепленных к общей граничной прямой l) и удовлетворяющего условиям трансверсальности и монотонности. Такая трехстраничная диаграмма L кодируется полностью сбалансированным словом w_L в алфавите $\mathbb{A} = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_3}$ (см. [9, §2]). Теорема 2 в [9] утверждает, что два полностью сбалансированных слова в алфавите $\mathbb{A}$ задают эквивалентные зацепления в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда одно можно получить из другого конечной последовательностью локальных замен из следующего списка:

$$\left. \begin{aligned} a_{i+1}d_{i-1} &\leftrightarrow a_i \leftrightarrow a_{i-1}b_{i+1}, \\ d_{i+1}d_{i-1} &\leftrightarrow b_i \leftrightarrow a_{i-1}c_{i+1}, \\ d_{i+1}c_{i-1} &\leftrightarrow c_i \leftrightarrow b_{i-1}c_{i+1}, \\ a_{i+1}c_{i-1} &\leftrightarrow d_i \leftrightarrow b_{i-1}b_{i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00090).

$$\left. \begin{aligned} a_{i-1}b_{i-1}w_i &\leftrightarrow w_ia_{i-1}b_{i-1}, \\ d_{i-1}c_{i-1}w_i &\leftrightarrow w_id_{i-1}c_{i-1}, \\ d_{i-1}b_{i-1}w_i &\leftrightarrow w_id_{i-1}b_{i-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$(b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1})w_i \leftrightarrow w_i(b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}), \quad (4)$$

где $i \in \mathbb{Z}_3$, $w_i \in X_i$, $X_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i, b_{i-1}a_id_{i-1}, b_{i-1}b_id_{i-1}, b_{i-1}c_id_{i-1}, b_{i-1}d_id_{i-1}\}$.

Полугруппа, получающаяся факторизацией полугруппы W_0 полностью сбалансированных слов по соотношениям (2)–(4), коммутативна и свободно порождена изотопическими классами неразводимых зацеплений. Умножение в этой полугруппе отвечает взятию объединения зацеплений, разделенных некоторой сферой. Ниже мы построим конечно представленную полугруппу, в которой указанная полугруппа зацеплений является центром.

Пусть Y — полугруппа с множеством образующих $\mathbb{A}$ и следующими 55 соотношениями:

$$a_i = a_{i+1}d_{i-1}, \quad b_i = a_{i-1}c_{i+1}, \quad c_i = b_{i-1}c_{i+1}, \quad d_i = a_{i+1}c_{i-1}, \quad (5)$$

$$d_1d_2d_3 = 1, \quad (6)$$

$$b_id_i = d_ib_i = 1, \quad (7)$$

$$vw = wv, \quad (8)$$

где $v \in \{a_{i-1}b_{i-1}, d_{i-1}c_{i-1}, b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}\}$, $w \in \{a_i, b_i, c_i, b_{i-1}d_id_{i-1}\}$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

ТЕОРЕМА 1. 1) *Две трехстраничные диаграммы L_1 и L_2 представляют изотопные неориентированные зацепления в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда в полугруппе Y имеет место равенство $w_{L_1} = w_{L_2}$.*

2) *Элемент $y \in Y$ можно записать словом вида w_L , где L — некоторая трехстраничная диаграмма зацепления, тогда и только тогда, когда y — центральный элемент.*

Таким образом, центр полугруппы Y классифицирует все неориентированные зацепления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы обобщим понятие трехстраничной диаграммы зацепления.

Пусть Π — некоторая плоскость, перпендикулярная линии переплета l , r_1 , r_2 , r_3 — три луча: $r_i = \Pi \cap P_i$, и O — точка пересечения плоскости Π с линией переплета, $O = \Pi \cap l$. На каждом луче r_i отметим бесконечное число равноудаленных точек:

$$E_{i,k} \in r_i, \quad \overrightarrow{OE_{i,1}} = \overrightarrow{E_{i,k}E_{i,k+1}}, \quad \text{где } i \in \mathbb{Z}_3, k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через E объединение этих трех серий точек, $E = \{E_{i,k}\}$, $i \in \mathbb{Z}_3$, $k \in \mathbb{N}$.

Используя ортогональные проекции, представим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ как прямое произведение $\Pi \times l$ и отождествим l с вещественной прямой $\mathbb{R}$. Обозначим множества $E \times 0$ и $E \times 1$ через $E^{(0)} = \{E_{i,k}^{(0)}\}$ и $E^{(1)} = \{E_{i,k}^{(1)}\}$ соответственно. Плоскости $\Pi \times 0$ и $\Pi \times 1$ обозначим через $\Pi^{(0)}$ и $\Pi^{(1)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Трехстраничным плетением* назовем ломаную линию $T \subset \mathbb{Y} \cap (\Pi \times [0, 1])$, такую, что

1) $T \cap (\Pi^{(0)} \cup \Pi^{(1)}) = \partial T = E^{(0)} \cup E^{(1)}$;

2) ломаная T трансверсальна линии переплета l (см. [9, определение 1]);

3) T удовлетворяет условию монотонности из [9, определение 1].

Два трехстраничных плетения называются *эквивалентными*, если они (объемлемо) изотопны в $\Pi \times [0, 1]$ (граница ∂T предполагается фиксированной при изотопии).

При этом под *ломаной линией* мы подразумеваем одномерное PL-подмногообразие в $\mathbb{R}^3$, каждая компонента которого компактна. Пример трехстраничного плетения показан на рис. 1.

Рис. 1. Трехстраничное плетение

Композиция трехстраничных плетений определяется по аналогии с композицией обычных плетений и кос. Пусть τ_1, τ_2 — следующие аффинные преобразования пространства $\mathbb{R}^3$:

$$\tau_1(Q, t) = (Q, t/2), \quad \tau_2(Q, t) = (Q, (t+1)/2), \quad Q \in \Pi, t \in \mathbb{R}.$$

Композицией $T_1 \circ T_2$ трехстраничных плетений T_1 и T_2 называется объединение

$$\tau_1(T_1) \cup \tau_2(T_2).$$

Эта операция корректно определена на классах эквивалентности трехстраничных плетений и задает на множестве этих классов структуру полугруппы с единицей $I = E \times [0, 1]$. Мы утверждаем, что эта полугруппа есть в точности Y .

Действительно, так же, как и в случае трехстраничных диаграмм зацеплений, любое трехстраничное плетение T кодируется словом w_T в алфавите $\mathbb{A}$. Для трехстраничных плетений имеет место аналог второго утверждения из предложения 1 в [9]: трехстраничные плетения T и T' объемлемо изотопны в $Y \cap (\Pi \times [0, 1])$ тогда и только тогда, когда слова w_T и $w_{T'}$ совпадают. Образующие a_i, b_i, c_i, d_i полугруппы трехстраничных плетений показаны на рис. 2. Часть этих трехстраничных плетений, не показанная на рисунке, имеет вид $E_i \times [0, 1]$, где $E_i = \{E_{i,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Нарисовав соответствующие картинки, легко проверить, что соотношения (5)–(8) выполнены в полугруппе трехстраничных плетений. Мы должны убедиться, что этих соотношений достаточно для реализации эквивалентности трехстраничных плетений. Кроме того, мы утверждаем, что любая ломаная линия $T \subset \Pi \times [0, 1]$ с границей $\partial T = E^{(0)} \cup E^{(1)}$, такая, что при некоторых

$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ и всех достаточно больших k отрезки $[E_{i,k}^{(0)}, E_{i,k+n_i}^{(1)}]$ содержатся в T , изотопна в $\Pi \times [0, 1]$ некоторому трехстраничному плетению.

Рис. 2. Геометрическая реализация образующих полугруппы Y

Доказательство этих фактов по существу повторяет доказательство теоремы 2 из [9]. Мы прокомментируем только некоторые отличия соотношений (5)–(8) от (2)–(4).

Прежде всего, в полугруппе трехстраничных зацеплений мы не писали соотношений $b_i d_i = d_i b_i = 1$, поскольку слова $b_i d_i$ и $d_i b_i$ несбалансированы. Очевидно, что в полугруппе трехстраничных плетений элементы b_i и d_i взаимно обратны. Следовательно, соотношения $a_i = a_{i+1} d_{i-1}$ и $c_i = b_{i-1} c_{i+1}$ из (5) теперь эквивалентны соотношениям $a_i = a_{i-1} b_{i+1}$ и $c_i = d_{i+1} c_{i-1}$ соответственно. А соотношения $b_i = d_{i+1} d_{i-1}$ и $d_i = b_{i-1} b_{i+1}$ эквивалентны (6).

Наконец, по сравнению с (3)–(4) в списке (8) мы опустили соотношения вида $vw = wv$, где слово v то же, что и в (8), а слово w — одно из следующих:

$$b_{i-1} a_i d_{i-1}, \quad b_{i-1} b_i d_{i-1}, \quad b_{i-1} c_i d_{i-1}. \quad (9)$$

В полугруппе Y мы имеем

$$\begin{aligned} b_{i-1} a_i d_{i-1} &= b_{i-1} a_{i+1} d_{i-1} d_{i-1} = b_{i-1} a_{i+1} b_{i+1} b_i d_{i-1} = a_{i+1} b_{i+1} b_{i-1} b_i d_{i-1} \\ &= a_{i+1} d_{i-1} d_i b_{i-1} b_i d_{i-1} = a_i d_i b_{i-1} b_i d_{i-1}, \\ b_{i-1} b_i d_{i-1} &= (b_{i-1} d_i d_{i-1})^{-1}, \\ b_{i-1} c_i d_{i-1} &= b_{i-1} b_{i-1} c_{i+1} d_{i-1} = b_{i-1} d_i d_{i+1} c_{i+1} d_{i-1} = b_{i-1} d_i d_{i-1} d_{i+1} c_{i+1} \\ &= b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i b_{i-1} c_{i+1} = b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i c_i. \end{aligned}$$

Таким образом, если элемент $v \in Y$ коммутирует с $a_i, b_i, c_i, d_i, b_{i-1} d_i d_{i-1}$, то он коммутирует и с элементами (9).

Далее мы будем отождествлять полугруппу Y с полугруппой изотопических классов трехстраничных плетений. Для завершения доказательства теоремы 1 мы должны еще описать центр полугруппы Y . Нам понадобится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что трехстраничное плетение T *отделимо*, если найдется трехмерный шар $\mathcal{B} \subset \Pi \times [0, 1]$, такой, что

1) его граница $\partial \mathcal{B} \cong S^2$ не пересекает T , и, таким образом, пересечение $T \cap \mathcal{B}$ состоит только из замкнутых компонент плетения T ;

2) оставшаяся часть $T - (T \cap \mathcal{B})$ представляет собой трехстраничное плетение, эквивалентное единичному плетению $I = E \times [0, 1]$.

Очевидно, что трехстраничное плетение, эквивалентное некоторому отделимому, также отделимо. Таким образом, можно говорить об отделимых элементах полугруппы Y . Каждое отделимое трехстраничное плетение T задает зацепление в $\mathbb{R}^3$, которое представляет собой пересечение соответствующего шара $\mathcal{B}$ с T . Следующие два утверждения очевидны.

ЛЕММА 1. *Элемент полугруппы Y отделим тогда и только тогда, когда он представим полностью сбалансированным словом в алфавите $\mathbb{A}$.*

ЛЕММА 2. *Пусть w — произвольное полностью сбалансированное слово. Тогда элемент $y \in Y$ отделим в том и только том случае, когда отделим элемент $yw \in Y$.*

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 3. *Элемент полугруппы Y отделим тогда и только тогда, когда он центральный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетривиальной является только часть «тогда». Пусть трехстраничное плетение T представляет элемент $y \in Y$ и $w_T = x_1 \dots x_m$ — соответствующее слово, $x_k \in \mathbb{A}$, $k = 1, \dots, m$. Из геометрической реализации соотношения $b_i^N a_i d_i^N y = y b_i^N a_i d_i^N$ легко вывести, что $x_1 + \dots + x_m = 0 \in \mathbb{Z}^3$.

Отсюда следует, что для достаточно большого N слово $a_1^N a_2^N w_T c_2^N c_1^N$ сбалансировано. Но $a_1^N a_2^N w_T c_2^N c_1^N = w_T a_1^N a_2^N c_2^N c_1^N$ и слово $a_1^N a_2^N c_2^N c_1^N$ сбалансировано. Из леммы 2 следует, что элемент $y = w_T$ отделим. $\square$

Теперь мы перейдем к рассмотрению косоподобных элементов полугруппы Y .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть D — группа, порожденная образующими d_1, d_2, d_3 и следующими семью соотношениями:*

$$d_1 d_2 d_3 = 1, \quad (10)$$

$$d_i u_i = u_i d_i, \quad (11)$$

$$u_i u_{i+1} = u_{i+1} u_i, \quad (12)$$

где $u_i = d_{i+1}^{-1} d_{i-1} d_{i+1} d_{i-1}^{-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$. Пусть D_i — подгруппа группы D , порожденная элементами d_i, u_{i+1} , и $\hat{D}_i$ — пересечение $D_{i+1} \cap D_{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$. Тогда

1) D изоморфна группе обратимых элементов полугруппы Y , причем изоморфизм задается отождествлением образующих d_i группы D с соответствующими образующими полугруппы Y ;

2) коммутант $D' = \{x u x^{-1} y^{-1} \mid x, y \in D\}$ изоморфен группе кос B_∞ на бесконечном числе нитей, и мы имеем $D/D' = \mathbb{Z}^2$;

3) подгруппы D_i и $\hat{D}_i$ являются централизаторами друг друга для любого $i \in \mathbb{Z}_3$;

4) подгруппа $\hat{D}_i$ изоморфна группе кос B_∞ при всех $i \in \mathbb{Z}_3$;

5) подгруппа D_i изоморфна полупрямому произведению $B \rtimes \mathbb{Z}$ при всех $i \in \mathbb{Z}_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В предположении, что $d_3 = d_2^{-1}d_1^{-1}$, соотношения (11) и (12) равносильны следующим:

$$d_1 d_3 d_1^{-1} d_2 d_1 = d_2 d_1 d_2^{-1} d_3 d_2 = d_3 d_2 d_3^{-1} d_1 d_3, \quad (13)$$

$$u_3 u_2 = u_2 u_3. \quad (14)$$

Таким образом, число образующих и соотношений, задающих группу D , можно уменьшить до двух и трех соответственно. Другая запись соотношений (13) и (14) дана в (1), где мы положили $a = d_1^{-1}$, $b = d_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала мы напомним некоторые общеизвестные факты о группах кос. Пусть F — произвольное локально конечное подмножество плоскости Π и B_F — группа, элементами которой являются изотопические классы *кос*, т. е. ломаных линий $T \subset \Pi \times [0, 1]$, таких, что

- 1) $\partial T = (F \times \{0\}) \cup (F \times \{1\})$;
- 2) ограничение ортогональной проекции $\Pi \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ на каждую связную компоненту (нить) косы T есть монотонная функция;
- 3) все, кроме конечного числа, нити косы T представляют собой прямолинейные отрезки, параллельные линии l .

Если имеется биекция между двумя локально конечными подмножествами $F_1, F_2 \subset \Pi$, то группы B_{F_1} и B_{F_2} изоморфны, причем изоморфизм определяется любым (кусочно-линейным) гомеоморфизмом $h: \Pi \rightarrow \Pi$, таким, что $h(F_1) = F_2$. В частности, если F — множество из n точек, то группа B_F изоморфна артиновской группе кос B_n на n нитях. Если F — бесконечное множество, то группа B_F изоморфна группе кос B_∞ на бесконечном числе нитей, которая является прямым пределом последовательности $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$.

Известны два копредставления группы B_∞ , $\mathbb{Z}$ -копредставление и $\mathbb{N}$ -копредставление. Обе группы $B_\mathbb{Z}$ и $B_\mathbb{N}$ порождены образующими σ_k , где $k \in \mathbb{Z}$ для группы $B_\mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$ для группы $B_\mathbb{N}$, и следующими соотношениями:

$$\sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j, \quad k > j + 1, \quad (15)$$

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \quad (16)$$

где $k, j \in \mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$ соответственно.

Пусть H — группа обратимых элементов полугруппы Y . Трехстраничное плетение T представляет обратимый элемент из Y , если и только если существует сохраняющая границу ∂T изотопия от T к некоторой ломаной линии $T' \subset \Pi \times [0, 1]$, такой, что

- 1) ограничение проекции $\Pi \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ на каждую связную компоненту ломаной T' есть монотонная функция;
- 2) для некоторых $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ в плетении T' содержится прямолинейный отрезок $[E_{i,k}^{(0)}, E_{i,k+n_i}^{(1)}]$ при всех $i \in \mathbb{Z}_3$ и достаточно большом k .

Напомним (см. [9, § 2]), что алфавит $\mathbb{A}$ отождествлен с некоторым подмножеством целочисленных векторов в $\mathbb{R}^3$. Это позволяет определить отображение φ из множества W всех слов в $\mathbb{Z}^3$ по формуле $\varphi(x_1 \dots x_m) = x_1 + \dots + x_m$, где $x_k \in \mathbb{A}$. Легко видеть, что это отображение факторизуется до гомоморфизма $Y \rightarrow \mathbb{Z}^3$, который мы также обозначим через φ . Упомянутая выше тройка (n_1, n_2, n_3) целых чисел — это в точности $\varphi(w_T)$. Образ $\varphi(H)$ изоморфен группе $\mathbb{Z}^2$ и состоит из векторов $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ с нулевой суммой координат:

$n_1 + n_2 + n_3 = 0$. Ядро гомоморфизма $\ker(\varphi|_H)$ по построению изоморфно группе кос $B_E \cong B_\infty$, и мы имеем $H/B_E = \mathbb{Z}^2$.

Мы собираемся доказать, что $D \cong H$. Соотношения (10)–(12) выполнены в группе H (в действительности это в точности те из соотношений (5)–(8), которые содержат только образующие b_i, d_i). Таким образом, имеется гомоморфизм $\eta: D \rightarrow H$, переводящий образующие d_i группы D в соответствующие элементы d_i группы H .

Из соотношений (10)–(12) тривиальным образом следует, что

$$D/D' \cong \mathbb{Z}^2 \quad \text{и} \quad \eta(D') \subset B_E.$$

Таким образом, достаточно показать, что ограничение $\eta|_{D'}: D' \rightarrow B_E$ есть изоморфизм.

Сюръективность отображения $\eta: D' \rightarrow B_E$. Мы должны показать, что любая коса из B_E изотопна в $\Pi \times [0, 1]$ *трехстраничной косе*, т. е. трехстраничному плетению T , такому, что слово w_T содержит только буквы b_i и d_i .

Пусть $\mathcal{W}$ — плоскость в $\mathbb{R}^3$, параллельная линии переплета l и разделяющая множества E_1 и $E_2 \cup E_3$. Любой элемент из B_{E_1} представим косой, не пересекающей плоскость $\mathcal{W}$. Это дает нам включение $B_{E_1} \hookrightarrow B_E$.

Для любого элемента $x \in B_E \subset H$ найдется натуральное N , такое, что элемент $(b_2 d_3)^N x (b_3 d_2)^N$ представляется словом, одновременно 2- и 3-сбалансированным, т. е.

$$(b_2 d_3)^N x (b_3 d_2)^N \in B_{E_1}. \quad (17)$$

Следовательно, достаточно показать, что $\eta(D') \supset B_{E_1}$.

Группа B_{E_1} канонически изоморфна группе $B_{\mathbb{N}}$. Стандартные образующие σ_k группы $B_{\mathbb{N}}$ реализуются в полугруппе Y следующим образом:

$$\sigma_k = d_3^{k-1} b_2 d_3 d_2 b_3 b_3^{k-1} = \eta(d_3^{k-1} u_1 d_3^{1-k}), \quad k > 0. \quad (18)$$

Мы видим, что $\sigma_k \in \eta(D')$; значит, $B_{E_1} \subset \eta(D')$.

Инъективность отображения $\eta: D' \rightarrow B_E$. Ввиду (17) и (18) достаточно показать, что элементы

$$\bar{\sigma}_k = d_3^{k-1} u_1 d_3^{1-k} \quad (19)$$

группы D удовлетворяют соотношениям (15) и (16). Начнем с соотношения (16). Имеем

$$\begin{aligned} d_3^2 u_2 d_3^{-2} &= d_3^2 (d_3^{-1} d_1 d_3 d_1^{-1}) d_3^{-2} = d_3 d_1 d_3 d_1^{-1} d_3^{-2} \\ &= d_2^{-1} d_3 d_2 d_3^{-1} = u_1, \\ \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 (\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2)^{-1} &= u_1 d_3 u_1 d_3^{-1} u_1 d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\ &= u_1 d_3 u_1 d_3^{-1} (d_2^{-1} d_3 d_2 d_3^{-1}) d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\ &= u_1 d_3 u_1 d_1 d_3 d_2 u_1^{-1} d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\ &= u_1 d_3 u_1 d_1 d_3 d_2 (d_3 d_2^{-1} d_3^{-1} d_2) d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\ &= u_1 d_3 u_1 d_1 d_3 d_1^{-1} d_2^{-1} d_3^{-1} d_2 d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\ &= u_1 d_3 (d_2^{-1} d_3 d_2 d_3^{-1}) d_1 d_3 d_1^{-1} d_2^{-1} d_3^{-1} d_2 d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_1 d_3 d_2^{-1} d_3 d_2 u_2 d_2^{-1} d_3^{-1} d_2 d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\
&= u_1 d_3 d_2^{-1} d_3 u_2 d_3^{-1} d_2 d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\
&= (d_2^{-1} d_3 d_2 d_3^{-1}) d_3 d_2^{-1} d_3 u_2 d_3^{-1} d_2 d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\
&= d_2^{-1} d_3^2 u_2 d_3^{-1} d_2 d_3^{-1} u_1^{-1} d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\
&= d_2^{-1} d_3^2 u_2 d_3^{-1} d_2 d_3^{-1} (d_3 d_2^{-1} d_3^{-1} d_2) d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\
&= d_2^{-1} d_3^2 u_2 d_3^{-2} d_2 d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} = d_2^{-1} u_1 d_2 d_3 u_1^{-1} d_3^{-1} \\
&= d_2^{-1} u_1 d_1^{-1} u_1^{-1} d_3^{-1} = d_2^{-1} d_1^{-1} d_3^{-1} = 1,
\end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k (\bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1})^{-1} = d_3^{k-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 (\bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2)^{-1} d_3^{1-k} = 1.$$

Теперь индукцией по $k > 0$ докажем, что в группе D выполнены следующие соотношения:

$$d_3^k u_1 d_3^{-k} = d_2^{-k} u_1 d_2^k, \quad (20)$$

$$u_1 (d_3^{k+1} u_1 d_3^{-k-1}) = (d_3^{k+1} u_1 d_3^{-k-1}) u_1. \quad (21)$$

Для $k = 1$ соотношение (21) следует из (12) и соотношения $d_3^2 u_2 d_3^{-2} = u_1$, доказанного выше. Действительно,

$$u_1 (d_3^2 u_1 d_3^{-2}) = d_3^2 u_2 u_1 d_3^{-2} = d_3^2 u_1 u_2 d_3^{-2} = (d_3^2 u_1 d_3^{-2}) u_1.$$

Что касается (20), то в случае $k = 1$ мы имеем

$$d_3 u_1 d_3^{-1} = d_2^{-1} d_1^{-1} u_1 d_1 d_2 = d_2^{-1} u_1 d_2.$$

Предположим, что (20) и (21) выполнены для $0 < k \leq n-1$. Тогда

$$\begin{aligned}
d_3^n u_1 d_3^{-n} &= (u_1 d_3)^{n-1} d_3 u_1 d_3^{-1} (u_1 d_3)^{1-n} = (d_2^{-1} d_3 d_2)^{n-1} d_2^{-1} u_1 d_2 (d_2^{-1} d_3 d_2)^{1-n} \\
&= d_2^{-1} d_3^{n-1} u_1 d_3^{1-n} d_2 = d_2^{-n} u_1 d_2^n.
\end{aligned}$$

Первое из равенств получается применением соотношения (21) $n-1$ раз. Далее,

$$\begin{aligned}
u_1 (d_3^{n+1} u_1 d_3^{-n-1}) &= u_1 d_3^2 (d_2^{1-n} u_1 d_2^{n-1}) d_3^{-2} = d_3^2 u_2 (d_2^{1-n} u_1 d_2^{n-1}) d_3^{-2} \\
&= d_3^2 (d_2^{1-n} u_1 d_2^{n-1}) u_2 d_3^{-2} = d_3^2 (d_2^{1-n} u_1 d_2^{n-1}) d_3^{-2} u_1 \\
&= (d_3^{n+1} u_1 d_3^{-n-1}) u_1.
\end{aligned}$$

Из (21) мы имеем для $k > j+1$

$$\bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k = d_3^{j-1} u_1 (d_3^{k-j} u_1 d_3^{j-k}) d_3^{1-j} = d_3^{j-1} (d_3^{k-j} u_1 d_3^{j-k}) u_1 d_3^{1-j} = \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_j.$$

Это завершает доказательство пп. 1) и 2) теоремы 2.

Заметим, что из наших рассуждений следует, что все элементы (19), $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют соотношениям (15) и (16). Эти элементы порождают подгруппу $D_3 \cap D'$. Таким образом, мы имеем вложение

$$B_{E_1 \cup E_2} \hookrightarrow D_3.$$

В D_3 имеется также подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}$, которая порождена элементом d_3 .

Любой элемент x из D_3 имеет вид $x = y d_3^k$, где $y \in B_{E_1 \cup E_2}$. Это означает, что группа D_3 изоморфна полупрямому произведению $D_3 \cong B_{E_1 \cup E_2} \rtimes_{\xi} \mathbb{Z}$, где действие ξ группы $\mathbb{Z}$ на $B_{E_1 \cup E_2}$ задается формулой $\xi(d_3)(\bar{\sigma}_k) = \bar{\sigma}_{k-1}$.

Нетрудно видеть, что подгруппа $\hat{D}_i$ совпадает с B_{E_i} , $i \in \mathbb{Z}_3$. Мы оставляем доказательство п. 3) теоремы 2 читателю. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В явном виде изоморфизм $B_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cong} D'$ можно записать следующим образом:

$$\sigma_k \mapsto \begin{cases} d_3^{k-1} u_1 d_3^{1-k}, & \text{если } k \geq 1, \\ d_2 (d_2^{-1} d_3)^{k/2} u_1 (d_2^{-1} d_3)^{-k/2} d_2^{-1}, & \text{если } k \leq 0, k \text{ чётно}, \\ (d_2^{-1} d_3)^{(k-1)/2} u_1 (d_2^{-1} d_3)^{(1-k)/2}, & \text{если } k \leq -1, k \text{ нечётно}. \end{cases}$$

В завершение параграфа мы укажем одно алгебраическое свойство группы D , которое легко следует из геометрической реализации и является в определенном смысле характеристическим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $k > 0$, $l \geq 0$ существует мономорфизм (очевидно, единственный) $\psi_{k,l}: D \rightarrow D$, такой, что

$$\psi_{k,l}(d_1) = d_2^l d_1^k d_2^{-l}, \quad \psi_{k,l}(d_2) = d_1^{-l} d_2^k d_1^l. \quad (22)$$

Гомоморфизмы $\psi_{k,l}$ удовлетворяют соотношениям

$$\psi_{k,l} \circ \psi_{k',l'} = \psi_{kk', k'l+l}, \quad (23)$$

которые, обратно, влекут за собой соотношения (10)–(12), задающие группу D .

§ 2. Ленты-зацепления

В этом параграфе мы применим нашу трехстраничную технику к лентам-зацеплениям. Под лентой-зацеплением мы подразумеваем двумерное компактное PL-подмногообразие $R \subset \mathbb{R}^3$ (с границей), каждая компонента которого гомеоморфна либо кольцу $S^1 \times [0, 1]$, либо ленте Мёбиуса $S^1 \times [0, 1]$. Понятие ленты-зацепления близко к понятию оснащенного зацепления. А именно, если разрешить только ориентируемые, т.е. гомеоморфные кольцу $S^1 \times [0, 1]$, компоненты, то изотопические классы таких лент-зацеплений будут находиться во взаимно однозначном соответствии с изотопическими классами оснащенных зацеплений. Для наших целей будет удобнее допускать и неориентируемые компоненты. Мы говорим, что ленты-зацепления R_1, R_2 эквивалентны, и пишем $R_1 \sim R_2$, если они (объемлемо) изотопны в $\mathbb{R}^3$.

Имеется очевидный способ превращать трехстраничные диаграммы зацеплений в ленты-зацепления. Чтобы это сделать, нужно заменить каждое ребро на его малую окрестность в соответствующей полуплоскости P_i (см. рис. 3). Лента-зацепление, полученное таким образом из трехстраничной диаграммы L , будет обозначаться через $\tilde{L}$.

Рис. 3. Превращение трехстраничной диаграммы в ленту-зацепление

Для лент-зацеплений мы построим полугруппу $\check{Y}$, аналогичную полугруппе Y для обычных зацеплений. Полугруппа $\check{Y}$ порождается тем же множеством A и соотношениями

$$a_i d_i = a_{i+1} b_{i+1}, \quad b_i c_i = d_{i+1} c_{i+1}, \quad (24)$$

$$b_i b_{i-1} b_{i+1} = a_{i-1} c_{i+1} d_i, \quad d_i d_{i+1} d_{i-1} = a_{i+1} c_{i-1} b_i, \quad (25)$$

$$b_i d_i = d_i b_i = 1, \quad (26)$$

$$a_i b_i c_i = b_i, \quad (27)$$

$$vw = wv, \quad (28)$$

где $v \in \{a_{i-1} b_{i-1}, d_{i-1} c_{i-1}, b_{i+1} d_{i-1} d_{i+1} b_{i-1}, d_{i-1} d_i d_{i+1}\}$, $w \in \{a_i, b_i, c_i, b_{i-1} d_i d_{i-1}, d_{i+1} d_{i-1}\}$, $i \in \mathbb{Z}_3$. Для слова $w \in W$ мы будем обозначать задаваемый им элемент полугруппы Y через $[w]$, а полугруппы $\check{Y}$ — через $[[w]]$. Имеет место следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. 1) Для произвольного ленты-зацепления R существует трех-страничная диаграмма L , такая, что $R \sim \check{L}$;

2) для любых двух трехстраничных диаграмм L_1, L_2 ленты-зацепления $\check{L}_1$ и $\check{L}_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $[[w_{L_1}]] = [[w_{L_2}]]$;

3) элемент $x \in \check{Y}$ имеет вид $x = [[w_L]]$, где L — некоторая трехстраничная диаграмма, тогда и только тогда, когда он центральный.

Геометрическая реализация полугруппы $\check{Y}$ почти такая же, как и полугруппы Y . Элементы полугруппы $\check{Y}$ могут быть реализованы как изотопические классы плетений, в которых все нити заменены на ленты. Доказательство последней теоремы отличается от доказательства теоремы 1 лишь в деталях, которые мы оставляем читателю.

Следующие два утверждения легко следуют из геометрической реализации полугрупп Y и $\check{Y}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Существует эпиморфизм $\theta: \check{Y} \rightarrow Y$, такой, что $\theta([[w]]) = [w]$ для всех $w \in W$. Его ядро $\ker(\theta)$ изоморфно свободной абелевой группе $\mathbb{Z}_{\text{fin}}^E$, порожденной множеством E . Изоморфизм переводит $E_{i,k}$, где $i \in \mathbb{Z}_3$, $k \in \mathbb{N}$, в $[[d_{i-1}^{k-1} b_{i+1} b_i b_{i-1}^k]]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого $k > 0$ существует гомоморфизм $\psi_k: \check{Y} \rightarrow \check{Y}$, такой, что

$$\psi_k(a_i) = a_i^k, \quad \psi_k(b_i) = b_i^k, \quad \psi_k(c_i) = c_i^k, \quad \psi_k(d_i) = d_i^k, \quad i \in \mathbb{Z}_3.$$

Геометрически гомоморфизмы ψ_k интерпретируются как локальное разрезание ленты на k более узких лент (см. рис. 4).

Рис. 4. Геометрическая реализация гомоморфизма ψ_k

Большинство известных инвариантов узлов и зацеплений учитывают ориентацию, в то время как наши конструкции хорошо приспособлены только к неориентированному (и нераскрашенному) зацеплению. Поэтому связь между ориентированными инвариантами и полугруппами Y и $\check{Y}$ еще предстоит выяснить. Однако существуют два многочлена Кауффмана, которые определены для *неориентированных оснащенных* зацеплений. Соответствующие теоремы легко переводятся на наш трехстраничный язык, что и сделано ниже.

Напомним, что скобочный многочлен Кауффмана [7] определяется скейн-соотношением

$$\langle \times \rangle(A) - A \cdot \langle \rangle \langle \rangle(A) - A^{-1} \cdot \langle \asymp \rangle(A) = 0 \quad (29)$$

и нормировкой

$$\langle \bigcirc \rangle = 1. \quad (30)$$

Скобочный многочлен удовлетворяет соотношению

$$\langle \bigcirc \rangle(A) = -A^3 \cdot \langle \parallel \rangle(A). \quad (31)$$

Мы можем продолжить его до инварианта лент-зацеплений, полагая

$$\langle \parallel \rangle(A) = \sqrt{-A^3} \cdot \langle \parallel \rangle(A). \quad (32)$$

Пусть $\mathbb{Z}[\check{Y}]$ — полугрупповая алгебра полугруппы $\check{Y}$, $\mathbb{Z}[\check{Y}][z, z^{-1}]$ — алгебра лорановских многочленов переменной z с коэффициентами из $\mathbb{Z}[\check{Y}]$ и $K_{\langle \rangle}$ — факторалгебра

$$\mathbb{Z}[\check{Y}][z, z^{-1}]/(b_3 b_2 b_1 - z^3, b_3 b_1 + d_2 z + c_1 a_3 z^2). \quad (33)$$

Следующее утверждение есть трехстраничный вариант утверждения Кауффмана [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) *Канонический гомоморфизм $\mathbb{Z}[z, z^{-1}] \rightarrow K_{\langle \rangle}$ инъективен.*

2) *Для любой трехстраничной диаграммы L имеет место следующее соотношение в алгебре $K_{\langle \rangle}$:*

$$[w_L] = -(z^4 + z^{-4}) \cdot \langle \check{L} \rangle(-z^2). \quad (34)$$

Аналогичная алгебра строится для L-многочлена Кауффмана $\mathcal{L}(z, \alpha)$, который определяется скейн-соотношениями

$$\mathcal{L}_{\times}(z, \alpha) + \mathcal{L}_{\times}(z, \alpha) = z \cdot (\mathcal{L}_{\rangle \langle}(z, \alpha) + \mathcal{L}_{\asymp}(z, \alpha)), \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_{\parallel}(z, \alpha) = \sqrt{\alpha} \cdot \mathcal{L}_{\parallel}(z, \alpha) \quad (36)$$

и нормировкой

$$\mathcal{L}_{\bigcirc} = 1. \quad (37)$$

Пусть $K_{\mathcal{L}}$ — алгебра

$$\mathbb{Z}[\check{Y}][z, z^{-1}, t, t^{-1}]/(b_3 b_2 b_1 - t, b_3 b_1 d_3 d_1 + b_1 b_3 d_1 d_3 - c_1 a_1 z - z). \quad (38)$$

Теорема Кауффмана [8, Theorem 2.3] о существовании и единственности L-многочлена записывается на трехстраничном языке следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1) *Канонический гомоморфизм $\mathbb{Z}[z, z^{-1}, t, t^{-1}] \rightarrow K_{\mathcal{L}}$ инъективен.*

2) *Для любой трехстраничной диаграммы L в алгебре $K_{\mathcal{L}}$ имеет место соотношение*

$$[[w_L]] = ((t^2 + t^{-2})/z - 1) \cdot \mathcal{L}_{\tilde{L}}(z, t^2). \quad (39)$$

В заключение я выражаю благодарность С. П. Новикову и В. Вершинину за высказанные критические замечания по этой работе, а также С. В. Матвееву за стимулирующее обсуждение на начальной стадии исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brunn H.* Uber verknottete Kurven. Mathematiker-Kongresses Zurich, 1897, Leipzig, 1898, pp. 256–259.
2. *Cromwell P. R. and Nutt I. J.* Embedding knots and links in an open book. II: Bounds on arc index. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., **119**, No. 2, 309–319 (1996).
3. *Morton H. R., Beltrami E.* Arc index and the Kauffman polynomial. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., **123**, 41–48 (1998).
4. *Дынников И. А.* Трехстраничное представление зацеплений. УМН, **53**, вып. 5, 237–238 (1998).
5. *Dynnikov I. A.* A new way to represent links. One-dimensional formalism and untangling technology. Preprint, Moscow, 1998; <http://mech.math.msu.su/~dynnikov>.
6. *Тураев В. Г.* Операторные инварианты связок и R -матрицы. Изв. АН СССР, сер. матем., **53**, № 5, 1073–1107 (1989).
7. *Kauffman L. H.* State models and the Jones polynomial. Topology, **26**, No. 3, 395–407 (1987).
8. *Kauffman L. H.* An invariant of regular isotopy. Trans. Amer. Math. Soc., **318** (1990), no. 2, pp. 417–471.
9. *Дынников И. А.* Трехстраничный подход в теории узлов. Кодирование и локальные движения. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 4, 25–37 (1999).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: dynnikov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
12 мая 1999 г.