Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Кацыло, В. Л. Попов, О неподвижных точках алгебраических действий на $\mathbb{C}^n$, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 1, 41–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 06:33:25

УДК 512.743

О неподвижных точках алгебраических действий на $\mathbb{C}^n$ *

© 2000. П. И. Кацыло, В. Л. Попов

1. Несмотря на значительные успехи современных исследований конечномерных подгрупп аффинных групп Кремоны (см. обзор [5], а также статью [2] и библиографию к ней), следующая центральная проблема не решена до сих пор: у любого ли алгебраического действия комплексной редуктивной группы G на аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$ существует неподвижная точка?

Ожидается, что ответ отрицательный. Действие без неподвижных точек было бы, помимо прочего, и примером алгебраического голоморфно нелинеаризуемого действия (все известные до сих пор алгебраически нелинеаризуемые действия голоморфно линеаризуемы).

2. В качестве возможного кандидата, доставляющего отрицательный ответ, специалисты уже довольно давно рассматривают действие, описанное ниже. Согласно фольклору, его конструкция принадлежит Д. Луне. В ней $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ и $n = 8$. По-видимому, этот выбор группы и размерности инспирирован работой [6], где установлено, что дифференцируемые действия группы $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ на d -мерном диске имеют неподвижную точку при $d \leq 7$, а при $d = 8$ существуют действия без неподвижных точек: дело в том, что стабилизаторы и страты в предложенной Д. Луной конструкции в точности такие же, как и в построенном в [6] действии без неподвижных точек.

3. Чтобы описать эту конструкцию, обозначим через V_d пространство бинарных форм степени d от переменных x и y , на котором линейными заменами переменных естественно действует группа $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ будем обозначать линейную оболочку форм $f_1, \dots, f_m \in V_d$.

Рассмотрим в V_8 орбиту $\mathcal{O}$ точки x^4y^4 и следующую гиперплоскость N в пространстве, нормальном к $\mathcal{O}$ в этой точке, инвариантную относительно стабилизатора этой точки:

$$N := x^4y^4 + \langle x^8, x^7y, x^6y^2, x^2y^6, xy^7, y^8 \rangle. \quad (3.1)$$

Пусть теперь $L := G \cdot N$ — множество в V_8 , полученное «разнесением» гиперплоскости N с помощью G . Оно является образом соответствующего под-расслоения нормального расслоения над $\mathcal{O}$ при естественном морфизме в V_8 , откуда следует, что L конструктивно и инвариантно, а его замыкание в V_8 является неприводимой гиперповерхностью.

Действие группы G на L и является упомянутым кандидатом. Так как 0 — единственная неподвижная точка в V_8 и $0 \notin N$, то G действует на L без неподвижных точек. Вопрос состоит в том, является ли L локально замкнутым подмножеством в V_8 , изоморфным аффинному пространству, или нет.

*Работа выполнена при поддержке CRDF, грант RM1-206, и INTAS, грант INTAS-OPEN-97-1570.

4. Мы покажем здесь, что ответ отрицательный и, следовательно, рассмотрение действия группы G на L не ведет к решению проблемы неподвижных точек. В действительности мы доказываем гораздо больше. А именно, с множеством L естественно связаны два многообразия — его открытое ядро $L^0 := \bar{L} \setminus (\bar{L} \setminus L) = L \setminus (\bar{L} \setminus L)$ (здесь и далее черта, как обычно, обозначает замыкание) и его замыкание $\bar{L}$. Ввиду отрицательного ответа на исходный вопрос естественно спросить, не будет ли тогда действием без неподвижных точек на аффинном пространстве действие группы G на L^0 или $\bar{L}$.

Условимся, что любая константа является корнем нулевой формы, кратность которого равна $+\infty$. Ниже мы даем явное описание $\bar{L}$ и L^0 .

ТЕОРЕМА 1. (i) Множество $\bar{L}$ совпадает с $L \cup D$, где

$$D := \{g \in V_8 \mid g \text{ имеет корень кратности } \geq 3\}. \quad (4.1)$$

(ii) Множество D замкнуто, неприводимо и $\text{codim}_{\bar{L}} D = 1$.

(iii) Множество $\bar{L}$ содержит 0, единственную неподвижную точку в V_8 .

(vi) Множество $L \cap D$ непусто.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что многообразие $\bar{L}$ имеет особенности: например, $x^4 y^4$ — его особая точка.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пользуясь техникой детерминантов комплексов (см. [4]), можно показать, что гиперповерхность $\bar{L}$ задается в V_8 уравнением степени 27.

ТЕОРЕМА 2. Множество L^0 совпадает с $L \setminus D = \bar{L} \setminus D$.

Поскольку локально замкнутое подмножество совпадает со своим открытым ядром, из теорем 1 и 2 немедленно вытекает отрицательный ответ на исходный вопрос:

СЛЕДСТВИЕ. Множество L не является открытым подмножеством в своем замыкании.

Согласно п. (iii) теоремы 1, $\bar{L}$ тоже не является примером действия на аффинном пространстве без неподвижных точек. Мы показываем, что таким примером не является и L^0 . Более того, мы доказываем следующее общее утверждение, из которого вытекает, что, вообще, никакое G -инвариантное открытое подмножество в L^0 не является таким примером:

ТЕОРЕМА 3. Многообразие L^0 не содержит G -инвариантных открытых нормальных подмногообразий с тривиальной группой Пикара, на которых нет непостоянных обратимых регулярных функций.

СЛЕДСТВИЕ. Многообразие L^0 не содержит G -инвариантных открытых подмногообразий, изоморфных аффинному пространству. В частности, само L^0 не изоморфно аффинному пространству.

5. Доказательства основаны на вспомогательной конструкции. Чтобы описать ее, введем дополнительные обозначения:

$\mathbb{P}(V_d)$ — проективизация векторного пространства V_d , снабженная естественным действием группы G ;

$[u]$ — точка в $\mathbb{P}(V_d)$, соответствующая прямой $\langle u \rangle$, где $u \in V_d$, $u \neq 0$;

$(f, g)_i$ — значение i -го трансектанта на бинарных формах $f \in V_d$ и $g \in V_e$. Нам понадобится его явный вид (см. [1]):

$$(f, g)_i = \begin{cases} \frac{(d-i)!(e-i)!}{d!e!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \frac{\partial^i f}{\partial x^{i-j} \partial y^j} \frac{\partial^i g}{\partial x^j \partial y^{i-j}}, & i \leq \min\{d, e\}, \\ 0, & i > \min\{d, e\}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Пусть $i \leq \min\{d, e\}$; трансектант $V_d \times V_e \rightarrow V_{d+e-2i}$, $(f, g) \mapsto (f, g)_i$, является линейным G -эквивариантным морфизмом.

6. Рассмотрим теперь в прямом произведении $\mathbb{P}(V_2) \times V_8$ замкнутую подсхему

$$Z := \{([f], g) \in \mathbb{P}(V_2) \times V_8 \mid 35(f^3, g)_6 = 2(f, f)_2 f\} \quad (6.1)$$

и обозначим через

$$\mathbb{P}(V_2) \xleftarrow{\pi_2} Z \xrightarrow{\pi_8} V_8$$

естественные проекции.

Ввиду полноты многообразия $\mathbb{P}(V_2)$ морфизм π_8 замкнут. Поскольку трансектанты эквивариантны, из вида уравнения в правой части формулы (6.1) следует, что Z является G -инвариантной подсхемой. Морфизмы π_2 , π_8 G -эквивариантны.

7. Чтобы получить информацию о геометрических свойствах схемы Z и морфизмов π_2 , π_8 , нам потребуется расписать в координатах уравнение из правой части формулы (6.1).

Подставляя $f = \sum_{r=0}^2 f_r x^{2-r} y^r$ и $g = \sum_{t=0}^8 g_t x^{8-t} y^t$ в (6.1) и рассматривая $g_0, \dots, g_8$ как координаты на V_8 , а f_0, f_1, f_2 — как однородные координаты на $\mathbb{P}(V_2)$, мы получаем после вычислений, что Z задается в этих координатах следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} &280f_2^3 g_0 - 105f_1 f_2^2 g_1 + 30(f_0 f_2^2 + f_1^2 f_2) g_2 - 5(6f_0 f_1 f_2 + f_1^3) g_3 \\ &\quad + 12(f_0 f_1^2 + f_0^2 f_2) g_4 - 15f_0^2 f_1 g_5 + 10f_0^3 g_6 = 8f_0(4f_0 f_2 - f_1^2), \\ &35f_2^3 g_1 - 30f_1 f_2^2 g_2 + 15(f_0 f_2^2 + f_1^2 f_2) g_3 - 4(6f_0 f_1 f_2 + f_1^3) g_4 \\ &\quad + 15(f_0 f_1^2 + f_0^2 f_2) g_5 - 30f_0^2 f_1 g_6 + 35f_0^3 g_7 = 4f_1(4f_0 f_2 - f_1^2), \\ &10f_2^3 g_2 - 15f_1 f_2^2 g_3 + 12(f_1^2 f_2 + f_0 f_2^2) g_4 - 5(6f_0 f_1 f_2 + f_1^3) g_5 \\ &\quad + 30(f_0^2 f_2 + f_0 f_1^2) g_6 - 105f_0^2 f_1 g_7 + 280f_0^3 g_8 = 8f_2(4f_0 f_2 - f_1^2). \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

8. Мы установим теперь несколько замечательных геометрических свойств подсхемы Z и морфизмов π_2 , π_8 , которые будут использованы в доказательствах теорем. В действительности мотивировкой при подборе уравнения (6.1) были именно эти геометрические свойства.

В $\mathbb{P}(V_2)$ имеется ровно две G -орбиты: $G \cdot [xy]$ — открытая двумерная орбита точки $[xy]$ и $G \cdot [x^2]$ — замкнутая одномерная орбита точки $[x^2]$, задаваемая уравнением $4f_0 f_2 - f_1^2 = 0$. Значит, $\pi_2^{-1}(G \cdot [x^2])$ — замкнутое, а $\pi_2^{-1}(G \cdot [xy])$ — открытое G -инвариантные подмножества в Z и Z является их дизъюнктивным объединением,

$$Z = \pi_2^{-1}(G \cdot [x^2]) \sqcup \pi_2^{-1}(G \cdot [xy]). \quad (8.1)$$

Следующее предложение касается свойств морфизма π_2 :

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. (i) *Группа G транзитивно действует на множестве слоев морфизма π_2 над точками каждой из орбит $G \cdot [x^2]$ и $G \cdot [xy]$.*

(ii) *Все слои морфизма π_2 изоморфны $\mathbb{C}^6$.*

(iii) *Множества $\pi_2^{-1}(G \cdot [x^2])$ и $\pi_2^{-1}(G \cdot [xy])$ неприводимы, и их размерности равны соответственно 7 и 8.*

(iv) *Множество Z неприводимо, и его размерность равна 8.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Это следует из эквивариантности морфизма π_2 и транзитивности действия группы G на орбитах.

(ii) Поскольку $\mathbb{P}(V_2) = G \cdot [x^2] \cup G \cdot [xy]$, из п. (i) следует, что каждый слой морфизма π_2 переводится подходящим преобразованием из G либо в слой над $[x^2]$, либо в слой над $[xy]$. Поэтому описание всех слоев сводится к описанию слоев над этими двумя точками. Чтобы выяснить их структуру, воспользуемся системой уравнений (7.1).

А именно, точка $[x^2]$ имеет координаты $(1:0:0)$. После подстановки их в систему (7.1) вместо f_0, f_1, f_2 ее уравнения превращаются в $10g_6 = 0, 35g_7 = 0, 280g_8 = 0$. Это означает, что

$$\pi_8(\pi_2^{-1}([x^2])) \text{ задается в } V_8 \text{ уравнениями } g_6 = g_7 = g_8 = 0. \quad (8.2)$$

Ввиду (8.2) слой $\pi_2^{-1}(f)$ для любой точки $f \in G \cdot [x^2]$ изоморфен $\mathbb{C}^6$.

Аналогично, поскольку точка $[xy]$ имеет координаты $(0:1:0)$, из (7.1) следует, что

$$\pi_8(\pi_2^{-1}([xy])) \text{ задается в } V_8 \text{ уравнениями } g_3 = g_5 = 0, g_4 = 1. \quad (8.3)$$

Ввиду (8.3) слой $\pi_2^{-1}(f)$ для любой точки $f \in G \cdot [xy]$ тоже изоморфен $\mathbb{C}^6$.

(iii) Поскольку группа G связна, каждая неприводимая компонента подмножества $\pi_2^{-1}(G \cdot [x^2])$ инвариантна относительно G . Любой слой морфизма $\pi_2 : \pi_2^{-1}(G \cdot [x^2]) \rightarrow G \cdot [x^2]$, будучи, согласно п. (ii), неприводимым, целиком лежит в некоторой такой неприводимой компоненте. Ввиду п. (i) отсюда следует, что множество $\pi_2^{-1}(G \cdot [x^2])$ неприводимо. Для $\pi_2^{-1}(G \cdot [xy])$ доказательство аналогично.

Утверждение о размерностях вытекает из п. (ii), равенств $\dim(G \cdot [x^2]) = 1$, $\dim(G \cdot [xy]) = 2$ и теоремы о слоях морфизма.

(iv) Так как подсхема Z в пространстве $\mathbb{P}(V_2) \times V_8$ задается тремя уравнениями (см. (7.1)), то размерность каждой ее неприводимой компоненты не меньше $\dim(\mathbb{P}(V_2) \times V_8) - 3 = 8$. Утверждение вытекает теперь из п. (iii) и формулы (8.1). $\square$

9. Следующее утверждение касается свойств морфизма π_8 :

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (i) $\pi_8(\pi_2^{-1}(G \cdot [xy])) = L$.

(ii) *Множества $\pi_8(Z)$ и $\pi_8(\pi_2^{-1}(G \cdot [x^2]))$ замкнуты в V_8 и неприводимы.*

(iii) $\pi_8(\pi_2^{-1}(G \cdot [x^2])) = D$ (см. (4.1)).

(iv) $\pi_8(Z) = \bar{L} = L \cup D$.

(v) *Слой $\pi_8^{-1}(g)$ является одной точкой для форм g из некоторого непустого открытого подмножества в $\bar{L}$.*

(vi) $\dim \bar{L} = 8, \dim D = 7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Это следует из (8.3), (3.1), п. (i) предложения 1 и определения L .

(ii) Это следует из пп. (iii), (iv) предложения 1, замкнутости морфизма π_8 и замкнутости множества $\pi_2^{-1}(G \cdot [x^2])$.

(iii) Из формулы (4.1), очевидно, следует, что

$$D = G \cdot S, \quad \text{где } S = \langle x^8, x^7y, x^6y^2, x^5y^3, x^4y^4, x^3y^5 \rangle. \quad (9.1)$$

Доказываемое равенство вытекает из (8.2), (9.1) и п. (i) предложения 1.

(iv) Поскольку множество $\pi_2^{-1}(G \cdot [xy])$ открыто в Z , утверждение следует из пп. (i)–(iii) и формулы (8.1).

(v) Ввиду определения множества L и эквивариантности морфизма π_8 достаточно показать, что слой $\pi_8^{-1}(g)$ содержит только одну точку для форм g общего положения в N (т. е. форм из некоторого непустого открытого подмножества в N).

Ввиду (3.1) можно считать $g_0, g_1, g_2, g_6, g_7, g_8$ координатами на N . Обозначим через (*) систему уравнений, полученную из (7.1) подстановкой $g_3 = 0, g_4 = 1, g_5 = 0$. Будем рассматривать (*) как систему уравнений от f_0, f_1, f_2 , считая $g_0, g_1, g_2, g_6, g_7, g_8$ параметрами. При фиксированных значениях параметров $g_0, g_1, g_2, g_6, g_7, g_8$ множество проективных решений $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ системы (*) (т. е. ненулевых решений, рассматриваемых с точностью до пропорциональности) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством точек слоя $\pi_8^{-1}(g)$, где $g = (g_0, g_1, g_2, g_6, g_7, g_8) \in N$. А именно, указанные $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}(V_2)$ — это в точности точки множества $\pi_2(\pi_8^{-1}(g))$. Поэтому дело сводится к тому, чтобы показать, что для форм g общего положения в N число проективных решений системы (*) равно 1.

Заметим, прежде всего, что $(0 : 1 : 0)$ является проективным решением системы (*) для любой формы $g \in N$ (см. (8.3)). Рассмотрим теперь другие возможные решения. Требуется показать, что для форм g общего положения в N их число равно 0.

Сначала рассмотрим те из них, у которых $f_2 = 0$ и $f_0 = 1$. Подставляя $f_2 = 0$ и $f_0 = 1$ в (*), получаем систему $2f_1^2 + g_6 = 0, 6f_1g_6 - 7g_7 = 0, 6f_1^2g_6 - 21f_1g_7 + 56g_8 = 0$ относительно f_1 , которая, очевидно, несовместна для форм g общего положения в N .

Остается рассмотреть те решения системы (*), у которых $f_2 = 1$. Подставляя $f_2 = 1$ в (*), получаем следующую систему уравнений относительно f_0 и f_1 :

$$\left. \begin{aligned} h_1 &:= 56g_0 - 21f_1g_1 + 6(f_0 + f_1^2)g_2 + 4f_0f_1^2 - 4f_0^2 + 2f_0^3g_6 = 0, \\ h_2 &:= 7g_1 - 6f_1g_2 - 8f_0f_1 - 6f_0^2f_1g_6 + 7f_0^3g_7 = 0, \\ h_3 &:= 2g_2 + 4f_1^2 - 4f_0 + 6(f_0^2 + f_0f_1^2)g_6 - 21f_0^2f_1g_7 + 56f_0^3g_8 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Будем обозначать через $\text{Res}(p, q; z)$ результат многочленов p и q от переменной z . Тогда

$$R := \text{Res}(\text{Res}(h_1, h_2; f_1), \text{Res}(h_2, h_3; f_1); f_0)$$

является таким многочленом от $g_0, g_1, g_2, g_6, g_7, g_8$, что система (9.2) совместна только при тех значениях $g_0, g_1, g_2, g_6, g_7, g_8$, которые обращают R в

нуль. Поэтому, чтобы доказать несовместность системы (9.2) для форм g общего положения в N , нужно проверить, что R — ненулевой многочлен. В свою очередь, для этого достаточно указать какой-либо конкретный набор значений параметров $g_0, g_1, g_2, g_6, g_7, g_8$, на котором R не обращается в нуль. Это действительно можно сделать: например, значение R при $g_0 = g_1 = g_6 = g_8 = 0$, $g_2 = g_7 = 1$ равно $-261963097407044335953257664086016$ (мы проверили это двумя способами, пользуясь компьютерными программами MAGMA и MAPLE. Вычисления занимают сотые доли секунды. Отметим, что попытки проверить, что R отличен от нуля, вычислив его явный вид, не заканчиваются успехом: объем вычислений оказывается слишком велик даже для мощного компьютера). Этим завершается доказательство утверждения (v).

(vi) Первое равенство вытекает из пп. (iv), (v) настоящего предложения, п. (iv) предложения 1 и теоремы о слоях морфизма. Для доказательства второго достаточно ввиду п. (iii) настоящего предложения, п. (iii) предложения 1 и теоремы о слоях морфизма указать такую форму $g \in D$, что слой $\pi_8^{-1}(g)$ конечен. Мы утверждаем, что $g = x^4 y^4$ обладает этим свойством.

В самом деле, g имеет корень кратности 4, и потому ввиду (4.1), действительно, $g \in D$. Далее, форма g имеет координаты $g_i = 0$ при $i \neq 4$ и $g_4 = 1$. Подставляя их в систему (7.1), мы получаем следующую систему уравнений на (проективные) координаты точек множества $\pi_2(\pi_8^{-1}(g))$:

$$f_0 f_1^2 - f_0^2 f_2 = f_0 f_1 f_2 = f_0 f_2^2 - f_1^2 f_2 = 0.$$

Легко видеть, что она имеет ровно три решения: $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ и $(0:0:1)$. Значит, действительно, слой $\pi_8^{-1}(g)$ конечен. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как видно из доказательства утверждения (vi), для некоторых форм $g \in \bar{L}$ слой $\pi_8^{-1}(g)$ может содержать более одной точки. В действительности существуют и такие $g \in \bar{L}$, что слой $\pi_8^{-1}(g)$ бесконечен: исследуя более тщательно систему (9.2) и используя компьютерные вычисления, можно показать, что форма g обладает этим свойством в точности тогда, когда она содержится в множестве $E := G \cdot C \cup G \cdot C_+ \cup G \cdot C_-$, где $C := \{(tx^2 - y^2)^4/6t^2 \mid t \in \mathbb{C}^*\}$ и $C_{\pm} := \{-(x^2 \pm 3txy - 3t^2 y^2)^4/189t^4 \mid t \in \mathbb{C}^*\}$. Ввиду (4.1) множество E лежит в D . Можно показать также, что любой слой $\pi_8^{-1}(g)$, $g \in E$, изоморфен $\mathbb{C}^1$. Эти факты не будут использованы ниже, поэтому мы опускаем их доказательство (см., однако, замечание 5).

- 10. Доказательство теоремы 1.** (i) Это вытекает из п. (iv) предложения 2.
(ii) Это вытекает из пп. (ii), (iii), (vii) предложения 2.
(iii) Это вытекает из п. (i) доказываемой теоремы и определения (4.1).
(iv) В самом деле, $x^4 y^4 \in L \cap D$. $\square$

11. Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 следует, что $L \setminus D = \bar{L} \setminus D$. Поэтому достаточно показать, что $L^0 \cap D = \emptyset$. Поскольку L^0 открыто в $\bar{L}$, а D неприводимо и замкнуто, последнее равенство будет установлено, если мы покажем, что $\bar{D} \cap \bar{L} \neq D$.

Рассуждая от противного, предположим, что $\overline{D \cap L} = D$. По теореме Шевалле множество L конструктивно. Поэтому из последнего равенства и замкнутости D следует, что $D \cap L$ содержит непустое открытое подмножество множества D . Ввиду (9.1) его пересечение с S является непустым открытым подмножеством в S . Следовательно,

$$\overline{S \cap L} = S. \quad (11.1)$$

Ввиду (9.1) можно считать $g_0, \dots, g_5$ координатами на S . Обозначим через $(**)$ систему уравнений, полученную из (7.1) подстановкой $g_6 = g_7 = g_8 = 0$. Рассмотрим в $\mathbb{P}(V_2) \times S \subset \mathbb{P}(V_2) \times V_8$ подсхему, определенную системой $(**)$. Пусть Ω — открытое подмножество этой подсхемы, определенное условием $4f_0f_2 - f_1^2 \neq 0$. Тогда из п. (i) предложения 2 следует, что

$$S \cap L = \pi_8(\Omega). \quad (11.2)$$

Пусть Ω_2 и $G \cdot [xy]_2$ — замкнутые подмножества в Ω и $G \cdot [xy]$ соответственно, заданные уравнением $f_2 = 0$.

Система $(**)$ является линейной системой относительно $g_0, \dots, g_5$ с коэффициентами — однородными многочленами третьей степени от f_0, f_1, f_2 . Более того, она ступенчатая и обладает следующими свойствами: если $f_2 \neq 0$, то g_0, g_1, g_2 — главные, а g_3, g_4, g_5 — свободные неизвестные и все коэффициенты при главных пропорциональны f_2^3 ; если же $f_2 = 0$, то g_0, g_1, g_2 — свободные, а g_3, g_4, g_5 — главные и все коэффициенты при главных пропорциональны f_1^3 . Поскольку главные неизвестные выражаются через свободные, это означает, что при $f_2 \neq 0$ неизвестные g_0, g_1, g_2 представляются в виде многочленов от $g_3, g_4, g_5, f_0/f_2, f_1/f_2$, а при $f_2 = 0$ неизвестные g_3, g_4, g_5 представляются в виде многочленов от $g_0, g_1, g_2, f_0/f_1$. Следовательно, $\pi_8(\Omega \setminus \Omega_2)$ и $\pi_8(\Omega_2)$ являются образами соответственно $(G \cdot [xy] \setminus G \cdot [xy]_2) \times \mathbb{C}^3$ и $(G \cdot [xy]_2) \times \mathbb{C}^3$ при некоторых морфизмах в S . Поскольку $\dim((G \cdot [xy]) \times \mathbb{C}^3) = 5 < 6 = \dim S$ (см. (9.1)), это противоречит ввиду (11.2) равенству (11.1). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Указанные в доказательстве морфизмы легко выписать явно. Это дает параметрическое представление множества $S \cap L$, позволяющее исследовать структуру этого множества весьма детально.

12. Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся несколько общих фактов. В их формулировках используются следующие обозначения:

$I(X)$ — мультипликативная группа регулярных обратимых функций на неприводимом алгебраическом многообразии X , профакторизованная по подгруппе констант;

$\mathfrak{X}(P)$ — группа характеров алгебраической группы P .

Если P — алгебраическая группа, Q — ее замкнутая подгруппа и Z — алгебраическое многообразие, на котором действует Q , то обозначим через

$$\pi_{P,Q,Z}: P *_Q Z \rightarrow P/Q$$

однородное расслоение над P/Q со слоем Z .

ЛЕММА 1 [8, Theorem 1]. $I(X)$ является свободной абелевой группой конечного ранга.

ЛЕММА 2 [3, Proposition 2.3]. Пусть X и Y — неприводимые алгебраические многообразия и $\varphi: X \rightarrow Y$ — алгебраическое расслоение со слоем F , локально тривиальное в топологии Зарисского. Предположим, что база Y является

гладким, а слой F — гладким рациональным многообразиями. Тогда существует следующая точная последовательность гомоморфизмов групп:

$$0 \rightarrow I(Y) \rightarrow I(X) \rightarrow I(F) \rightarrow \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(F) \rightarrow 0. \quad (12.1)$$

ЛЕММА 3 [7, теорема 4]. Пусть P — связная односвязная линейная алгебраическая группа и Q — ее алгебраическая подгруппа. Тогда существует следующая точная последовательность гомоморфизмов групп:

$$\mathfrak{X}(P) \rightarrow \mathfrak{X}(Q) \rightarrow \text{Pic}(P/Q) \rightarrow 0.$$

ЛЕММА 4. Пусть P — алгебраическая группа, Q — ее замкнутая подгруппа, V — конечномерный алгебраический Q -модуль и V^0 — непустое открытое Q -инвариантное подмногообразие в V . Предположим, что многообразие $P *_Q V^0$ изоморфно открытому подмногообразию U^0 некоторого неприводимого нормального алгебраического многообразия U . Если $I(U) = 0$, $\text{Pic}(U) = 0$ и подгруппа кручения в группе $\text{Pic}(P/Q)$ нетривиальна, то $\text{codim}_U(U \setminus U^0) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как U^0 открыто в U , то из равенства $\text{Pic}(U) = 0$ следует, что $\text{Pic}(U^0) = 0$ и, значит,

$$\text{Pic}(P *_Q V^0) = 0. \quad (12.2)$$

Рассуждая от противного, предположим, что $\text{codim}_U(U \setminus U^0) \geq 2$. Тогда ввиду нормальности многообразия U из $I(U) = 0$ следует, что $I(U^0) = 0$ и, значит,

$$I(P *_Q V^0) = 0. \quad (12.3)$$

По определению $P *_Q V^0$ является геометрическим фактором по действию группы Q на $P \times V^0$, заданному формулой $q \cdot (p, v) = (pq^{-1}, q \cdot v)$, а морфизм π_{P,Q,V^0} индуцирован проекцией $P \times V^0$ на первый сомножитель. Хотя в общем случае эта конструкция приводит к расслоениям, локально тривиальным в этальной топологии, в нашем случае расслоение локально тривиально в топологии Зарисского. В самом деле, $P *_Q V^0$ является P -инвариантным открытым подмножеством в $P *_Q V$. Поскольку $\pi_{P,Q,V} : P *_Q V \rightarrow P/Q$ — (однородное) векторное расслоение над P/Q , утверждение следует из хорошо известного факта, что векторные расслоения, локально тривиальные в этальной топологии, автоматически локально тривиальны в топологии Зарисского.

Поскольку однородное пространство G/H гладко, а многообразие V^0 гладко и рационально, мы видим, что при $X = P *_Q V^0$, $Y = P/Q$ и $F = V^0$ выполнены условия леммы 2. Поэтому, подставляя (12.2) и (12.3) в (12.1), мы получаем, что группы $I(V^0)$ и $\text{Pic}(P/Q)$ изоморфны. Но ввиду леммы 1 это противоречит условию, что $\text{Pic}(P/Q)$ имеет нетривиальное кручение. $\square$

13. Доказательство теоремы 3. Предположим противное: пусть в L^0 содержится G -инвариантное нормальное открытое подмножество U , для которого $\text{Pic}(U) = 0$ и $I(U) = 0$.

Из теоремы 2, формулы (8.1) и пп. (iii), (iv) предложения 2 следует, что

$$\pi_8^{-1}(U) \subseteq \pi_2^{-1}(G \cdot [xy]). \quad (13.1)$$

Рассмотрим в $\bar{L}$ подмножество $E := \{g \in \bar{L} \mid \dim \pi_8^{-1}(g) > 0\}$. Оно замкнуто и G -инвариантно. Ввиду п. (iv) предложения 1, пп. (ii), (iv) и (v) предложения 2 и теоремы о слоях морфизма имеет место неравенство

$$\text{codim}_{\bar{L}} E \geq 2. \quad (13.2)$$

Из определения множества E следует, что слои морфизма

$$\pi_8: \pi_8^{-1}(U \setminus E) \rightarrow U \setminus E \quad (13.3)$$

конечны. Поскольку $\text{char } \mathbb{C} = 0$, из п. (v) предложения 2 следует, что этот морфизм является бирациональным изоморфизмом. В силу нормальности подмножества U отсюда и из основной теоремы Зарисского вытекает, что (13.3) — изоморфизм.

Рассмотрим в N открытое подмножество $N^0 = N \cap (U \setminus E)$. Поскольку $L = G \cdot N$, мы имеем равенство

$$U \setminus E = G \cdot N^0. \quad (13.4)$$

Так как (13.3) является изоморфизмом, из (13.1), (8.3) и (3.1) следует, что $\pi_8^{-1}(N^0) = [xy] \times N^0$. Ввиду эквивариантности морфизма π_8 отсюда и из (13.4) мы получаем, что

$$\pi_8^{-1}(U \setminus E) = G \cdot ([xy] \times N^0). \quad (13.5)$$

Пользуясь факториальностью кольца $\mathbb{C}[x, y]$, легко проверить, что G -стабилизаторы точек $[xy] \in \mathbb{P}(V_2)$ и $x^4 y^4 \in V_8$ совпадают с группой

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{C}^* \right\}. \quad (13.6)$$

Пусть $M = \langle x^8, x^7 y, x^6 y^2, x^2 y^6, xy^7, y^8 \rangle$, так что $N = x^4 y^4 + M$. Проекция $\pi: N \rightarrow M$, $x^4 y^4 + m \mapsto m$, является изоморфизмом. Пусть $M^0 = \pi(N^0)$, так что $N^0 = x^4 y^4 + M^0$. Многообразия N , M , N^0 и M^0 инвариантны относительно H , а π является H -эквивариантным морфизмом.

Рассмотрим однородное расслоение $\pi_{G,H,M^0}: G *_H M^0 \rightarrow G/H$. Легко проверить, что морфизм

$$\alpha: G \times M^0 \rightarrow G \cdot ([xy] \times N^0), \quad (g, r) \mapsto (g \cdot [xy], g \cdot (x^4 y^4 + r)),$$

постоянен на слоях морфизма факторизации $\pi: G \times M^0 \rightarrow G *_H M^0$ и потому пропускается через него, т.е. $\alpha = \beta \circ \pi$ для некоторого G -эквивариантного морфизма $\beta: G *_H M^0 \rightarrow G \cdot ([xy] \times N^0)$.

Морфизм β биективен. В самом деле, поскольку $\alpha = \beta \circ \pi$, его сюръективность следует из сюръективности морфизмов α и π . Инъективность же легко выводится из определений π и $G *_H M^0$ и того, что H является стабилизатором точки $[xy]$.

Равенство (13.5), изоморфизм (13.3) и нормальность подмножества U показывают, что $G \cdot ([xy] \times N^0)$ — нормальное многообразие. В силу биективности морфизма β и основной теоремы Зарисского отсюда следует, что

$$G *_H M^0 \text{ изоморфно } U \setminus E. \quad (13.7)$$

В силу односвязности группы G , равенства $\mathfrak{X}(G) = 0$ и леммы 3 группа $\text{Pic}(G/H)$ изоморфна группе $\mathfrak{X}(H)$. Последняя же, как нетрудно вывести

из (13.6), имеет порядок 2. С другой стороны, из (13.7), (13.2) и леммы 4 вытекает, что $\text{Pic}(G/H)$ является группой без кручения. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Согласно замечанию 3, в действительности $U \setminus E = U$. С помощью тех же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 3, отсюда выводится, что L^0 либо не является нормальным, либо изоморфно $G *_H M^0$, где $x^4 y^4 + M^0 = N \cap L^0$ (и, значит, гладко).

14. В первоначальном варианте работы доказывалось только, что L не является аффинным открытым подмножеством в своем замыкании. Доказательство основывалось на соображениях, отличных от приведенных здесь. Мы благодарим Э. Б. Винберга, побудившего нас исследовать L более подробно. Он обнаружил также ошибочное рассуждение в одной из промежуточных версий настоящей работы.

Мы также признательны Г. Кемперу за помощь при проведении вычислений и Х. Крафту за несколько замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elliot E. B.* An introduction to the algebra of quantics, 2nd ed. Oxford Univ Press, Oxford, 1913.
2. *Fankhauser M.* Fixed points for reductive group actions on acyclic varieties. Ann. Inst. Fourier, **45**, No. 5, 1249–1281 (1995).
3. *Fossum R., Iversen B.* On Picard groups of algebraic fibre spaces. J. Pure Appl. Algebra, **3**, 269–280 (1973).
4. *Gelfand I. M., Kapranov M., Zelevinsky A.* Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1994.
5. *Kraft H.* Challenging problems on affine n -space. Séminaire Bourbaki, 47ème année, **802**, 1–19 (1994–95).
6. *Oliver R.* Weight systems for $\text{SO}(3)$ -actions. Ann. of Math., **103**, 637–644 (1979).
7. *Попов В. Л.* Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения. Известия АН СССР, сер. мат., **38**, 294–322 (1974).
8. *Rosenlicht M.* Toroidal algebraic groups. Proc. Amer. Math. Soc., **12**, 984–988 (1961).

Московский независимый университет,
email: katsylo@katsylo.mccme.ru

Московский государственный институт
электроники и математики,
email: popov@ppc.msk.ru

Поступило в редакцию
16 сентября 1998 г.