Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Т. Хабибуллин, Начально-краевая задача на полуоси для уравнения МКдФ, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 1, 65–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:18:20

УДК 517.9

Начально-краевая задача на полуоси для уравнения МКдФ*

© 2000. И. Т. ХАБИБУЛЛИН

§1. Введение

Метод обратной задачи рассеяния является эффективным средством изучения нелинейных интегрируемых уравнений [1]. Он позволяет строить широкие классы частных решений этих уравнений, а также достаточно полно исследовать задачу Коши, включая получение явных асимптотических формул для решений при больших значениях времени. Что касается смешанной задачи, то здесь успехи метода более скромны. Начально-краевая задача для интегрируемых уравнений в общей постановке плохо поддается исследованию этим методом (см., например, [2]); исключения составляют специальные типы краевых условий (см. [3, 4, 5, 6]). Задача отыскания новых классов краевых условий, совместимых в том или ином смысле с интегрируемостью, так же, как и развитие аналитического механизма интегрирования соответствующих граничных задач, представляет несомненный интерес.

Отметим, что во всех известных исследованных ранее примерах начально-краевая задача интегрируется сведением к задаче Коши на всей оси путем продолжения начального условия согласно некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению (преобразования Беклунда). В основе алгоритма продолжения лежит свойство инвариантности уравнения относительно преобразования типа отражения $x \rightarrow -x$. В работах [7, 8] был разработан симметричный тест на совместимость граничного условия со свойством интегрируемости уравнения. На основе этого теста в [8] и [9] были найдены примеры граничных условий для уравнений типа Кортевега–де Фриза, заведомо не обладающих четностью по x . Для интегрирования соответствующих начально-краевых задач идея продолжения на всю ось непригодна, и в настоящей работе используется альтернативный подход, суть которого состоит в том, что влияние краевого условия учитывается путем введения дополнительной ветви в контур сопряжения в ассоциированной задаче Римана. В линейной теории этот метод восходит к Н. Винеру и Э. Хопфу [10]. В нелинейных задачах близкие идеи развивались в [2, 11]. В качестве основной модели мы рассматриваем начально-краевую задачу

$$u_t = u_{xxx} + 6\varepsilon u_x u^2, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x)|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad (3)$$

*Работа поддержана РФФИ, грант № 98-01-00576.

для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза в квадранте $x \geq 0$, $t \geq 0$. Предполагается, что выполнены условия согласования $u_0(0) = u_{0x}(0) = 0$ начального значения и краевых условий в угловой точке $x = 0$, $t = 0$ и что начальное значение $u_0(x)$ убывает достаточно быстро. Рассматриваемая задача является корректно поставленной. Заметим, что проблема корректности смешанной задачи типа (1)–(3) для линейных и квазилинейных уравнений третьего порядка хорошо исследована (см., например, [12, 13, 14]). Любопытно, что эта же задача на левой полуоси $x < 0$ некорректна, — в этом случае нужно ставить лишь одно краевое условие в точке $x = 0$. Отсюда непосредственно следует, что свести продолжением задачу (1)–(3) к задаче Коши на всей оси в случае произвольного $u_0(x)$ в принципе невозможно.

На начальные условия мы налагаем довольно жесткие ограничения, означающие отсутствие дискретного спектра вспомогательной линейной системы уравнений (см. ниже условия (i)–(iv) в §5), оставляя, тем самым, в стороне важный вопрос о явных солитоноподобных решениях краевой задачи (1)–(2). В этой связи упомянем недавнюю работу [15], где дано эффективное описание класса алгебро-геометрических решений уравнения Кортевега–де Фриза, удовлетворяющих интегрируемым краевым условиям.

Обсудим кратко содержание работы. В §2 рассматривается линейный аналог задачи (1)–(3) и методом Винера–Хопфа строится его явное решение. В §3 формулируется представление Лакса начально-краевой задачи на полуоси. В §4 решается прямая задача рассеяния для ассоциированной линейной системы уравнений. На полуоси задача рассеяния перестает быть однозначной в отличие от задачи рассеяния на всей прямой [16]. Появляется произвол даже в выборе контура сопряжения — в этой задаче он не совпадает с непрерывным спектром уравнения по x . В §5 доказывается, что в случае полуоси матрица рассеяния однозначно определяет потенциал уравнения. При этом обратная задача рассеяния сводится к задаче Римана на шести лучах, разделяющих комплексную плоскость на равные секторы. В §6 в данные рассеяния вводится зависимость от времени и проверяется, что потенциал, восстановленный в обратной задаче рассеяния, удовлетворяет начально-краевой задаче (1)–(3). В последнем, седьмом разделе обсуждается проблема разрешимости задачи Римана на системе лучей.

§2. Решение смешанной задачи в линейном случае

Этот параграф носит вспомогательный характер. Его цель — показать наглядно на простом примере основные моменты предлагаемого метода и тем самым облегчить чтение последующих параграфов.

Рассмотрим линейную задачу того же типа, что (1)–(3),

$$u_t = u_{xxx}, \quad (4)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = q(x), \quad q(x)|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (6)$$

Применим к уравнению (4) преобразование Фурье, а не Лапласа, как это принято в подобных случаях. Положим $v(\xi, t) = \int_0^\infty u(x, t) e^{i\xi x} dx$; тогда, как легко видеть, функция $v(\xi, t)$ будет решением уравнения

$$v_t(\xi, t) = u_{xx}(0, t) + i\xi^3 v(\xi, t), \quad (7)$$

содержащего неизвестную функцию $u_{xx}(0, t)$. Для того чтобы исключить возникшую недоопределенность, введем новую неизвестную функцию $h(\xi, t) = v(\xi, t) - v(\omega\xi, t)$, где $\omega = e^{2i\pi/3}$ — кубический корень из единицы. Функция $h(\xi, t)$ удовлетворяет уже более простому уравнению $h_t = i\xi^3 h$, которое очевидным образом решается. Остается обратить замену переменной. Для этой цели, а также ниже при решении задачи рассеяния нам понадобятся следующие геометрические объекты. Выделим на комплексной плоскости шесть равных секторов $I_1, \dots, I_6$ при помощи лучей ℓ_j , исходящих из начала координат: $\ell_j = \{\xi, \arg(\xi) = \pi(j-1)/3\}$, так что I_j — сектор, заключенный между лучами ℓ_j и ℓ_{j+1} (см. рисунок ниже)

Контур сопряжения

Заметим, что по построению функция $h(\xi, t)$ при $t = 0$ аналитична в секторе I_1 и стремится к нулю на бесконечности. Эти свойства сохраняются и при $t > 0$, но нарушаются при $t < 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что искомая функция при $t > 0$ выражается в виде суммы трех интегралов типа Коши:

$$2\pi i v(\xi) = \int_{\ell_1} \frac{h(s) ds}{s - \xi} + \int_{\ell_4} \frac{h(\omega^2 s) ds}{s - \xi} + \int_{\ell_5} \frac{h(\omega s) ds}{s - \xi}. \quad (8)$$

Здесь интегрирование ведется по лучам ℓ_j в направлении от начала координат. Непрерывность функции (8) в замкнутой верхней полуплоскости гарантируется условием $h(0) = 0$.

Формула (8) заметно упрощается при $\xi \in I_1 \cup I_2 \cup \ell_2$. Действительно, для таких ξ интегрирование по лучу ℓ_4 можно заменить интегрированием по лучу ℓ_3 , а затем заменой $\nu = \xi^3$ свести все три интеграла в (8) к одному интегралу по лучу ℓ_1 :

$$2\pi i v(\xi) = \int_{\ell_1} \frac{h(\nu^{1/3}) d\nu}{\nu - \xi^3}, \quad \xi \in I_1 \cup I_2.$$

Для $\xi \in I_3$ функцию $v(\xi)$ находим из равенства $v(\xi) = v(\omega^2 \xi) - h(\omega^2 \xi)$. Применяя обратное преобразование Фурье к $v(\xi, t)$, находим искомое решение $u(x, t)$ задачи (4)–(6).

§3. Представление Лакса начально-краевой задачи на полуоси

Для удобства рассмотрим систему двух уравнений в частных производных, содержащую как частный случай уравнение (1):

$$u_t = u_{xxx} - 6u_x u u^+, \quad u_t^+ = u_{xxx}^+ - 6u_x^+ u u^+. \quad (9)$$

Положим по аналогии с (2) и (3)

$$u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u^+|_{x=0} = u_x^+|_{x=0} = 0, \quad (10)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \rightarrow 0, \quad u^+(x, 0) = u_0^+(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Все наши рассуждения ниже выдерживают инволюцию $u^+ = -\varepsilon u$, сводящую задачу (9)–(11) к задаче (1)–(3). Система уравнений (9) является условием совместности следующей переопределенной системы линейных уравнений

$$y_x = (-i\xi\sigma_3 + U)y, \quad (12)$$

$$y_t = (4i\xi^3\sigma_3 - 4\xi^2U - \xi V_1 - V_0)y, \quad (13)$$

где

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2i uu^+ & -2u_x \\ -2u_x^+ & 2i uu^+ \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & iu \\ -iu^+ & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} -uu_x^+ + u^+u_x & -iu_{xx} + 2iu^2u^+ \\ iu_{xx}^+ - 2i uu^{+2} & uu_x^+ - u^+u_x \end{pmatrix}.$$

Вдоль прямой $x = 0$ в силу граничных условий (10) уравнение (13) принимает вид

$$y_t = (4i\xi^3\sigma_3 - U_{xx})y. \quad (14)$$

Производя замену параметра $\nu = -4\xi^3$ в последнем уравнении, снова приходим к уравнению Захарова–Шабата вида (12).

Итак, три линейные системы уравнений (12), (13) и (14) задают представление Лакса для начально-краевой задачи (9)–(11).

§ 4. Прямая задача рассеяния на полуоси

Имея в виду, что потенциал $U(x, 0)$ стремится к нулю достаточно быстро, построим матричное решение $y(x, \xi)$ вспомогательной линейной задачи (12), фиксируя при $x \rightarrow +\infty$ асимптотически тригонометрическое поведение

$$y_+(x, \xi) \rightarrow e^{-i\xi x \sigma_3},$$

справедливое для всех вещественных ξ . Как известно, такое матричное решение всегда существует, а его столбцы $y^{(1,2)}(x, \xi)$ определяют два вектора $\psi(x, \xi) = y^1(x, \xi)e^{i\xi x}$ и $\phi(x, \xi) = y^2(x, \xi)e^{-i\xi x}$, допускающие аналитическое продолжение по параметру ξ с вещественной оси соответственно в нижнюю и верхнюю полуплоскости комплексной плоскости. При этом матричная функция $(\psi(x, \xi), \phi(x, \xi))$ стремится к единичной матрице при $\mathbb{R} \ni \xi \rightarrow \infty$. Назовем матрицу $T(\xi) = (\psi(\xi), \phi(\xi))$, составленную из столбцов $\psi(\xi) = \psi(0, \xi)$ и $\phi(\xi) = \phi(0, \xi)$, матрицей рассеяния системы (12) на полуоси.

Так как полное решение прямой задачи рассеяния состоит в отыскании пары линейно независимых векторных аналитических решений системы уравнений (12) в каждой точке комплексной плоскости ξ , за исключением, быть может, точек множества меры нуль (см., например, [16]), то требуется построить еще одно векторное решение. В нашей задаче x принимает только неотрицательные значения; поэтому имеется некий произвол в выборе второго аналитического по параметру решения. Распорядимся этим произволом следующим образом.

Составим из столбцов матрицы рассеяния $T(\xi)$ матричные функции $\Psi_j(\xi)$, аналитические в секторах I_j соответственно, полагая

$$\begin{aligned}\Psi_1(\xi) &= (\psi(\omega^2\xi), \phi(\xi)), \\ \Psi_2(\xi) &= \Psi_3(\xi) = (\psi(\omega\xi), \phi(\xi)), \\ \Psi_4(\xi) &= \Psi_5(\xi) = (\psi(\xi), \phi(\omega^2\xi)), \\ \Psi_6(\xi) &= (\psi(\xi), \phi(\omega\xi)).\end{aligned}\tag{15}$$

Завершим обсуждение прямой задачи рассеяния построением решения $y(x, \xi)$ линейной задачи (12), задав его значение в точке $x = 0$,

$$y(0, \xi) = \Psi_j(\xi), \quad \xi \in I_j.$$

Можно доказать, что функция $\Psi(x, \xi) = \Psi_j(x, \xi)$, заданная в виде

$$\Psi_j(x, \xi) = y(x, \xi)e^{i\xi x \sigma_3}, \quad \xi \in I_j,$$

является кусочно-аналитической функцией, определенной на всей плоскости спектрального параметра ξ . При переходе из сектора I_j в сектор I_{j+1} ψ -функция совершает скачок:

$$\Psi_{j+1}(x, \xi) = \Psi_j(x, \xi)R_j(x, \xi).\tag{16}$$

Система соотношений (16) задает задачу Римана на лучах $\{\ell_j\}$. Задача Римана (16) нормирована условием на бесконечности $\Psi_j(x, \infty) = 1$. Кроме того, можно показать, что имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\Psi_j(x, \xi) = 1 + \sum_{k=1}^N \Psi_{jk}(x)\xi^{-k} + O(\xi^{-N-1}), \quad I_j \ni \xi \rightarrow \infty,\tag{17}$$

если коэффициенты $u_0(x)$, $u_0^+(x)$ системы уравнений (12) — гладкие быстро убывающие функции. Нетрудно проверить, что переменная x входит в матрицы сопряжения явным образом:

$$R_j(x, \xi) = e^{-i\xi x \sigma_3} R_j(0, \xi) e^{i\xi x \sigma_3}.\tag{18}$$

§5. Обратная задача рассеяния

В обратной задаче рассеяния рассматривается проблема восстановления потенциала $U(x)$ системы (12) по заданной матрице рассеяния. Напомним (см. выше), что матрица рассеяния начально-краевой задачи на полуоси характеризуется парой вектор-функций $\psi(\xi)$, $\phi(\xi)$, аналитических соответственно в нижней и в верхней полуплоскостях, координаты которых при $\xi \in \mathbb{R}$ связаны равенством $\psi_1(\xi)\phi_2(\xi) - \psi_2(\xi)\phi_1(\xi) = 1$. Это соотношение, с учетом аналитических свойств входящих в него функций, позволяет выразить $\psi_1(\xi)$, $\phi_2(\xi)$ через $\psi_2(\xi)$ и $\phi_1(\xi)$ по известным формулам [1], если заранее заданы нули функций $\psi_1(\xi)$, $\phi_2(\xi)$, расположенные в областях $\text{Im } \xi < 0$ и $\text{Im } \xi > 0$ соответственно, и, кроме того, $1 + \psi_2(\xi)\phi_1(\xi) \neq 0$ при $\text{Im } \xi = 0$.

Отметим, что матрица рассеяния начально-краевой задачи на полуоси, в отличие от случая всей оси, однозначно определяет потенциал системы уравнений (12). Сформулируем точное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $T(\xi)$ и $\tilde{T}(\xi)$ — матрицы рассеяния, соответствующие потенциалам $U(x)$ и $\tilde{U}(x)$. Тогда из равенства $T(\xi) = \tilde{T}(\xi)$ следует равенство $U(x) = \tilde{U}(x)$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Предположим, что $T(\xi) = \tilde{T}(\xi)$. Тогда задача Римана (16) имеет два решения $\Psi_{j+1}(x, \xi) = \Psi_j(x, \xi)R_j(x, \xi)$ и $\tilde{\Psi}_{j+1}(x, \xi) = \tilde{\Psi}_j(x, \xi)R_j(x, \xi)$. Обозначим через $f(x, \xi)$ отношение этих двух решений:

$$f(x, \xi) = \tilde{\Psi}_j(x, \xi)\Psi_j^{-1}(x, \xi) = \tilde{\Psi}_{j+1}(x, \xi)\Psi_{j+1}^{-1}(x, \xi).$$

Очевидно, что функция $f(x, \xi)$ ограничена на бесконечности по ξ и удовлетворяет линейному уравнению по x : $f_x = i\xi[f, \sigma_3] + uf\sigma_2 - \tilde{u}\sigma_2f$, причем $f(0, \xi) = 1$. Поэтому она ограничена при всех ξ и по теореме Лиувилля не зависит от ξ . Тогда из указанного линейного уравнения на f вытекает равенство $[f, \sigma_3] = 0$. Следовательно, $f_x = 0$ и потому $f(x, \xi) \equiv 1$, а значит, $U(x) = \tilde{U}(x)$.

Исключим из рассмотрения некоторые вырожденные случаи в обратной задаче рассеяния. Предположим, что выполнены дополнительные требования:

- (i) $1 + \psi_2(\xi)\phi_1(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}$,
- (ii) $\log(1 + \psi_2(\xi)\phi_1(\xi))|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = 0$,
- (iii) $\langle \phi(\xi), \psi(\omega^2\xi) \rangle \neq 0$ при $\xi \in \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2$,
- (vi) $\langle \phi(\xi), \psi(\omega\xi) \rangle \neq 0$ при $\xi \in \bar{I}_2 \cup \bar{I}_3$,

где кососкалярное произведение $\langle X, Y \rangle$ двумерных векторов X и Y определяется как детерминант составленной из них матрицы: $\langle X, Y \rangle = \det(X, Y)$, а черта над буквой обозначает замыкание множества.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть задана пара функций $\phi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ вида

$$\phi_1(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{i\xi x} f_1(x) dx, \quad \psi_2(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-i\xi x} f_1(x) dx,$$

где $f_{1,2}(x)$ быстро убывают вместе со всеми производными. Построим матрицу $T(\xi) = (\psi(\xi), \phi(\xi))$, выбирая остальные координаты векторов ψ и ϕ в виде интегралов типа Коши:

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi) &= \exp\left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1 + \psi_2(s)\phi_1(s))}{s - \xi} ds\right), & \operatorname{Im} \xi < 0, \\ \phi_2(\xi) &= \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1 + \psi_2(s)\phi_1(s))}{s - \xi} ds\right), & \operatorname{Im} \xi > 0. \end{aligned}$$

Пусть выполнены все условия (i)–(vi). Тогда для того чтобы матрица $T(\xi)$ была матрицей рассеяния на полуоси, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \geq 0$ существовало невырожденное ($\det \Psi_j \neq 0$ для $\xi \in \bar{I}_j$) решение задачи Римана (16) с матрицами сопряжения

$$\begin{aligned} R_1(0, \xi) &= \frac{1}{A_{22}(\xi)} \begin{pmatrix} -A_{11}(\omega^2\xi) & 0 \\ -A_{21}(\xi) & A_{22}(\xi) \end{pmatrix}, \\ R_3(0, \xi) &= \frac{1}{A_{11}(\omega^2\xi)} \begin{pmatrix} 1 & A_{12}(\omega^2\xi) \\ A_{21}(\omega^2\xi) & -A_{22}(\omega^2\xi) \end{pmatrix}, \\ R_5(0, \xi) &= \frac{1}{A_{11}(\omega\xi)} \begin{pmatrix} A_{11}(\omega\xi) & A_{12}(\omega\xi) \\ 0 & -A_{22}(\omega\xi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$R_6(0, \xi) = \frac{1}{A_{22}(\omega\xi)} \begin{pmatrix} -A_{11}(\xi) & -A_{12}(\xi) \\ -A_{21}(\omega\xi) & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = R_4 = 1,$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}(\xi) &= \langle \psi(\omega^2\xi), \phi(\omega\xi) \rangle, & A_{12}(\xi) &= \langle \phi(\xi), \phi(\omega\xi) \rangle, \\ A_{21}(\xi) &= \langle \psi(\omega^2\xi), \psi(\omega\xi) \rangle, & A_{22}(\xi) &= \langle \phi(\xi), \psi(\omega^2\xi) \rangle. \end{aligned}$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Необходимость условий (16), (18) была доказана в §3. Докажем их достаточность. По заданной матрице рассеяния $T(\xi) = (\psi(\xi), \phi(\xi))$ построим указанные в теореме матрицы сопряжения R_j . Предположим, что при всех $x \geq 0$ задача Римана (16), (18) однозначно разрешима. Найдём потенциал $U(x)$ системы уравнений (12). Для этого продифференцируем равенство (16) по x и приведем его к виду

$$\Psi_{j+1,x} \Psi_{j+1}^{-1} - i\xi \Psi_{j+1} \sigma_3 \Psi_{j+1}^{-1} = \Psi_{j,x} \Psi_j^{-1} - i\xi \Psi_j \sigma_3 \Psi_j^{-1} = g.$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Лиувилля и асимптотическим представлением (17), легко можно получить, что $g = -i\xi \sigma_3 + U$, т. е.

$$\Psi_{j,x} = -i\xi [\sigma_3, \Psi_j] + U \Psi_j. \quad (19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРЕДЛОЖЕНИЮ 2. Функции A_{ij} и матрицы сопряжения R_j обладают некоторыми аналитическими свойствами. Например, A_{11} аналитична в области $I_1 \cup I_6 \cup \ell_1$, A_{12} — в секторе I_1 , A_{21} — в секторе I_2 и, наконец, A_{22} аналитична в области $I_1 \cup I_2 \cup \ell_2$. Матрицы сопряжения R_1 и R_5 аналитичны соответственно в I_2 и I_5 . А матрицы R_3 и R_6 , вообще говоря, определены только на соответствующих контурах ℓ_4 и ℓ_1 .

§6. Временная динамика и краевые условия

Сложность начально-краевой задачи состоит в том, что трудно описать временную динамику матрицы рассеяния. Некоторое представление об этой проблеме дает уравнение (7) на функцию $v(\xi, t)$ в линейном случае. Другое дело агрегаты R_j , рациональным образом выражающиеся через элементы матрицы рассеяния. Методически нам удобнее постулировать эту динамику в обратной задаче рассеяния, чем выводить непосредственно из прямой задачи. Пусть матрицы сопряжения $R_j(x, \xi, t)$ в задаче Римана (16), (18) эволюционируют по времени согласно уравнениям $R_{j,t} = 4i\xi^3 [\sigma_3, R_j]$ так, что

$$R_j(x, \xi, t) = e^{4i\xi^3 t \sigma_3} R_j(x, \xi) e^{-4i\xi^3 t \sigma_3}. \quad (20)$$

Продифференцируем равенство (16) по t , а затем, пользуясь формулой (20), приведем его к виду

$$\Psi_{j+1,t} \Psi_{j+1}^{-1} + 4i\xi^3 \Psi_{j+1} \sigma_3 \Psi_{j+1}^{-1} = \Psi_{j,t} \Psi_j^{-1} + 4i\xi^3 \Psi_j \sigma_3 \Psi_j^{-1} = h.$$

Применяя теорему Лиувилля к функции h и воспользовавшись асимптотическим представлением (17), получаем, что h имеет вид $4i\xi^3 \sigma_3 - 4\xi^2 U - \xi V_1 - V_0$ (см. формулу (13)). Следовательно, Ψ_j удовлетворяет уравнению вида

$$\Psi_{j,t} = 4i\xi^3 [\sigma_3, \Psi_j] - (4\xi^2 U + \xi V_1 + V_0) \Psi_j. \quad (21)$$

Легко заметить, что в силу условий (19), (21) функция

$$y(x, \xi, t) = \Psi_j(x, \xi, t)e^{(4\xi^3 t - \xi x)i\sigma_3}$$

является решением переопределенной системы уравнений (12), (13); поэтому потенциал $U(x, t)$, построенный при помощи задачи Римана, задает решение системы нелинейных уравнений (9), причем начальные условия (11) заведомо выполнены. Проверим выполнение краевых условий (10). Для этого достаточно показать, что при $x = 0$ система уравнений (21) инвариантна относительно поворота $\xi \rightarrow \omega\xi$, т. е. наряду с функциями $\Psi_j(\xi, t)$ функции $\Phi_j(\xi, t) = \Psi_{j+2}(\omega\xi, t)$ также являются решениями системы уравнений (21). Для значений индекса j , больших чем шесть, Ψ_j доопределяется по периодичности по j . По построению для любого j функция $\Phi_j(\xi, t)$ аналитична в секторе I_j , так же, как и функция $m_j(\xi, t) = \Psi_j^{-1}(\xi, t)\Phi_j(\xi, t)$ (условия (i)–(iv) по-прежнему считаются выполненными, поэтому $\det \Psi_j \neq 0$ при $\xi \in \bar{I}_j$). В результате преобразования получаем новую задачу Римана, аналогичную (16),

$$\Phi_{j+1}(\xi) = \Phi_j(\xi)r_j(\xi), \quad r_j(\xi) = R_j(\omega\xi), \quad (22)$$

с матрицами сопряжения $r_j(\xi) = m_j(\xi)^{-1}R_j(\xi)m_{j+1}(\xi)$. При $t = 0$ непосредственным вычислением можно проверить, что матрицы m_1, m_3, m_5 верхнетреугольные, а m_2, m_4, m_6 нижнетреугольные. В силу этой треугольной структуры функции

$$\tilde{m}_j(\xi, t) = e^{4i\xi^3\sigma_3 t}m_j(\xi, 0)e^{-4i\xi^3\sigma_3 t}$$

аналитичны в соответствующих секторах I_j . Но тогда функции $\tilde{\Phi}_j(\xi, t) = \Psi_j(\xi, t)\tilde{m}_j(\xi, t)$ также задают решение задачи Римана (22), а из условия единственности решения следует, что функция $\tilde{\Phi}_j(\xi, t)$ совпадает с функцией $\Phi_j(\xi, t)$, а значит, $\tilde{m}_j \equiv m_j$. Поэтому произведение функций $(\Psi_j e^{4i\xi^3\sigma_3 t})^{-1} \times \Phi_j e^{4i\xi^3\sigma_3 t}$ равно $m_j(\xi, 0)$, иначе говоря, не зависит от t , т. е. функции $y(\xi, t) = \Psi_j e^{4i\xi^3\sigma_3 t}$ и $\tilde{y}(\xi, t) = \Phi_j e^{4i\xi^3\sigma_3 t}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению вида (13). По построению имеем $\tilde{y}(\xi, t) = y(\omega\xi, t)$; следовательно, в точке $x = 0$ уравнение (13) не меняется при повороте $\xi \rightarrow \omega\xi$, а тогда оно имеет вид (14). Это означает выполнение краевого условия (10).

В силу своей треугольности (см. предложение 2 и замечание к нему) матрицы сопряжения R_1 и R_5 остаются аналитическими в секторах I_2 и I_5 соответственно и при $t > 0$.

§ 7. О разрешимости задачи Римана на системе лучей

Задача Римана об аналитическом сопряжении на системе лучей, к которой свелась обратная задача рассеяния, является мало исследованной, хотя родственные формулировки этой задачи встречались ранее в связи с интегрированием уравнений Пенлеве [18]. Но в нашем случае задача Римана на лучах имеет дополнительную внутреннюю симметрию, благодаря которой удастся свести ее к хорошо исследованной задаче на вещественной оси некоторыми преобразованиями, разными для $x = 0$ и для $x > 0$.

Пусть сначала $x = 0, t \geq 0$. Заметим сразу, что функции $\Psi_1(\xi, t)$ и $\Psi_6(\xi, t)$ аналитичны не только в предписанных областях I_1 и I_6 , но и в более широких областях $I_1 \cup I_2 \cup \ell_2$ и $I_5 \cup I_6 \cup \ell_6$ соответственно; кроме того, они связаны друг с

другом инволюцией вида $\Psi_6(\xi, t) = \Psi_1(\omega\xi, t)$. Введем в рассмотрение еще одну функцию Ψ_{ex} , полагая $\Psi_{\text{ex}}(\xi, t) = \Psi_1(\omega^2\xi, t)$. Эти три функции задают решение задачи Римана

$$\Psi_1 = \Psi_6 M_6, \quad \Psi_6 = \Psi_{\text{ex}} M_{\text{ex}}, \quad \Psi_{\text{ex}} = \Psi_1 M_1, \quad (23)$$

на системе трех лучей ℓ_1, ℓ_3, ℓ_5 и удовлетворяют одной и той же системе дифференциальных уравнений вида (21). Поэтому матрицы сопряжения M_1, M_6, M_{ex} эволюционируют по t по известным формулам

$$M(\xi, t) = e^{4i\xi^3\sigma_3 t} M(\xi, 0) e^{-4i\xi^3\sigma_3 t}. \quad (24)$$

Можно проверить, что задачи Римана (16), (20) и (23), (24) эквивалентны: решение одной задачи преобразуется в решение другой задачи по простым явным формулам. Пусть, например, задано решение задачи (23). Тогда искомые в задаче (16) функции $\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5$ выражаются в виде

$$\Psi_2 = \Psi_1 R_1, \quad \Psi_3 = \Psi_{\text{ex}} N_3, \quad \Psi_4 = \Psi_{\text{ex}} N_4, \quad \Psi_5 = \Psi_6 R_5^{-1},$$

где N_3 и N_4 — верхнетреугольная и нижнетреугольная матрицы. При $t = 0$ нетрудно проверить, что N_3 и N_4 аналитичны в I_3 и I_4 , а в силу формул $N_{3,4}(\xi, t) = e^{4i\xi^3\sigma_3 t} N_{3,4}(\xi, 0) e^{-4i\xi^3\sigma_3 t}$ и ввиду треугольной матричной структуры они остаются аналитическими и при $t > 0$.

В задаче (23) сделаем замену переменной $\xi = \nu^{1/3}$. При этом если ξ описывает комплексную плоскость, то ν описывает трехлистную риманову поверхность, причем функция $\Psi(\nu, t) = \Psi_1(\xi, t)$ имеет на всех трех листах одни и те же значения, т.е. не имеет точек ветвления, но претерпевает скачок при переходе через положительную полуось $\nu > 0$. Задача Римана на трех лучах переходит в задачу на вещественной оси

$$\Phi(\nu, t) \Psi(\nu, t) = C(\nu, t), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

где $\Phi(\nu, t) = -A_{22}(\omega\xi) \Psi_6^{-1}(\xi, t)$, а матрица сопряжения выбрана так: $C(\nu, t) = -A_{22}(\omega\xi)$ при $\nu \leq 0$ ($\xi \in \ell_2$) и $C(\nu, t) = -A_{22}(\omega\xi) R_6(0, \xi, t)$ при $\nu > 0$ ($\xi \in \ell_2$). Итак, для того чтобы решить задачу (16), достаточно решить задачу (25). Теперь ясно, что задача (16) разрешима, если функции $\psi_2(\xi), \phi_1(\xi)$ близки к нулю. Это следует из классической теоремы о факторизации в окрестности единицы (см., например, [17]). Другим достаточным условием разрешимости задачи (25) является положительная определенность матрицы сопряжения. Пусть в начально-краевой задаче (9)–(11) наложено условие редукции $u^+(x, t) = -\varepsilon u(x, t)$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогда столбцы ψ и ϕ матрицы рассеяния T удовлетворяют инволюции $\phi_2(\xi) = \psi_1^*(\xi^*)$, $\phi_1(\xi) = -\varepsilon \psi_2^*(\xi^*)$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение. В этом случае матрица сопряжения в задаче Римана (25) в силу предположений (i)–(iv) из §5 является положительно определенной. Действительно, условие редукции дает $A_{22}^*(\omega\xi) = A_{22}(\omega\xi)$ при $\xi \in \ell_2$. Кроме того, $A_{22}(0) = A_{22}(\infty) = -1$, $A_{22}(\xi) \neq 0$, а следовательно, $A_{22}(\xi) < 0$ вдоль луча ℓ_2 , так что $C(\nu, t) > 0$ при $\nu \leq 0$. Вычислим при $\nu \geq 0$ главные миноры матрицы $C(\nu, t)$: $\det_1 C(\nu, t) = A_{11}(\xi)$, $\det_2 C(\nu, t) = \det C(\nu, t) = |A_{22}(\xi)|^2$. В силу упомянутых предположений оба главных минора положительны. Поэтому $C(\nu, t)$ положительно определена; кроме того, она является непрерывной по Гёльдеру. Этого достаточно для разрешимости задачи Римана на вещественной оси (25).

Перейдем теперь к точкам полупрямой $0 < x < \infty$, $t = \text{const} > 0$, предполагая, что задача Римана (16)–(18), (20) решена при $x = 0$, $t > 0$. В этом случае мы фактически знаем матрицу рассеяния $T(\xi, t) = (\psi(\xi, t), \phi(\xi, t))$ начально-краевой задачи на полуоси $x \geq 0$ и приходим к задаче о восстановлении потенциала системы уравнений (12) по известной матрице рассеяния. Единственное решение этой задачи (о единственности см. выше предложение 1) можно построить двумя способами: при помощи задачи Римана (16)–(18) на системе лучей и каноническим способом — при помощи задачи Римана на вещественной оси [16]:

$$\hat{\phi}(x, \xi, t) = \hat{\psi}(x, \xi, t) \begin{pmatrix} 1 & \phi_1(\xi, t)e^{-2i\xi x} \\ -\psi_2(\xi, t)e^{2i\xi x} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\phi}(x, \infty, t) = 1. \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что при $x \geq 0$ и при фиксированном t упомянутые две задачи эквивалентны, если выполнены предположения (i)–(iv). Решения этих задач связаны друг с другом равенствами вида

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x, \xi, t) &= \psi_1(x, \xi, t)m_1(x, \xi, t), & \hat{\phi}(x, \xi, t) &= \psi_3(x, \xi, t)m_3(x, \xi, t), \\ \hat{\psi}(x, \xi, t) &= \psi_5(x, \xi, t)m_5(x, \xi, t), & \hat{\psi}(x, \xi, t) &= \psi_6(x, \xi, t)m_6(x, \xi, t), \end{aligned}$$

где $m_j(x, \xi, t)$ — треугольные кусочно-аналитические матричные функции. Для примера приведем явное представление матрицы $m_3(x, \xi, t)$:

$$m_3(x, \xi, t) = \Psi_3^{-1} \hat{\phi} = \frac{1}{A_{11}(\omega^2 \xi)} \begin{pmatrix} \phi_2(\xi, t) & 0 \\ -\psi_2(\omega \xi, t)e^{2i\omega \xi x} & A_{11}(\omega^2 \xi) \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно (см., например, [16]), что при наложении условий редукции $u^+(x, t) = -\varepsilon u(x, t)$, $\varepsilon = \pm 1$ и при выполнении предположений (i)–(ii) задача Римана (26) однозначно разрешима.

Остается добавить, что для случая $\varepsilon = -1$ предположения (i)–(iv) не налагают никакого ограничения на начальные условия в начально-краевой задаче (1)–(3) — они всегда выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Наука, М., 1980.
2. Fokas A. S., Its A. R. An initial-boundary value problem for the sine-Gordon equation in laboratory coordinates. ТМФ, **92**, № 3, 386–403 (1992).
3. Ablowitz M. J., Segur H. J. The inverse scattering problem in a semi-infinite interval. J. Math. Phys., **16**, 1054–1066 (1975).
4. Склянин Е. К. Граничные условия для интегрируемых систем. Функци. анализ и его прил., **21**, вып. 2, 86–87 (1987).
5. Tarasov V. O. The integrable initial-boundary value problem on a semiline: nonlinear Schrödinger and sine-Gordon equations. Inverse Problems, **7**, No. 3, 435–449 (1991).
6. Хабибуллин И. Т. Об интегрируемости начально-краевых задач. ТМФ, **86**, № 1, 43–51 (1991).
7. Habibullin I. T. Symmetries of boundary problems. Phys. Lett. A, **178**, No. 5–6, 369–375 (1993).
8. Gürel B., Gürses M., Habibullin I. Boundary value problems for integrable equations compatible with the symmetry algebra. J. Math. Phys., **36**, No. 12, 6809–6821 (1995).
9. Adler V., Gürel B., Gürses M., Habibullin I. Boundary conditions for integrable equations. J. Phys. A, Math. Gen., **30**, 3505–3513 (1997).

10. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, М., 1962.
11. *Кричевер И. М.* Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения sine-Gordon. ДАН СССР, **253**, 288–292 (1980).
12. *Рамазанов М. Д.* Краевая задача для одного типа дифференциальных уравнений. Матем. сб., **64**, № 2, 234–261 (1964).
13. *An Ton Bui*, Initial boundary value problem for the Korteweg–de Vries equation. J. Differential Equations, **25**, No. 3, 288–309 (1977).
14. *Фаминский А. В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений. Труды ММО, **51**, 54–94 (1988).
15. *Адлер В. Э., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Краевая задача для уравнения КдФ на полуоси. ТМФ, **110**, № 1, 98–113 (1997).
16. *Шабат А. Б.* Обратная задача рассеяния. Дифф. уравнения, **15**, № 10, 1824–1835 (1979).
17. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. Мир, М., 1979.
18. *Jimbo M., Miwa T.* Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II. Phys. D, **2**, No. 3, 407–448 (1981).

Институт математики Уфимского научного центра РАН,
отдел математической физики
email: ihabib@imat.rb.ru

Поступило в редакцию
18 мая 1998 г.