Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Акбаров, Абсолютная теория гомологий стереотипных алгебр, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 1, 76–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:16:53

Абсолютная теория гомологий стереотипных алгебр*

© 2000. С. С. АКБАРОВ

В заметках [1–3] автором была описана категория $\mathfrak{S}$ стереотипных локально выпуклых пространств и отмечались некоторые ее приложения в топологической алгебре и функциональном анализе.

В частности, в [2] было заявлено, что категория $\mathfrak{S}$ позволяет строить *относительную теорию гомологий* стереотипных алгебр по примеру нынешней теории гомологий банаховых алгебр [4, 5]. Этот подход идейно восходит к конструкции относительной абелевой категории Маклейна [6] и применительно к категории $\mathfrak{S}$ состоит в том, что, рассматривая категорию стереотипных модулей ${}_A\mathfrak{S}$ над фиксированной стереотипной алгеброй A , мы, во-первых, изучаем только те свойства этих модулей, которые получаются «факторизацией по категории $\mathfrak{S} = {}_{\mathbb{C}}\mathfrak{S}$ », и, во-вторых, количественно оцениваем эти свойства гомологиями в обычной абелевой категории (не топологизированных) векторных пространств над $\mathbb{C}$.

В настоящей заметке предлагается новый (по-видимому, более естественный) подход к теории гомологий стереотипных алгебр, который можно назвать *абсолютной теорией гомологий*, состоящий в том, что, во-первых, изучаются все свойства категории ${}_A\mathfrak{S}$ (без факторизации по $\mathfrak{S}$), и, во-вторых, количественно эти свойства оцениваются гомологиями в (неабелевой) категории $\mathfrak{S}$.

1. Структура относительной категории в классе стереотипных модулей. Напомним определение стереотипной алгебры и стереотипного модуля. Для любых стереотипных пространств X, Y, Z [1, 3] над $\mathbb{C}$ условимся билинейное отображение $\beta: X \times Y \rightarrow Z$ называть *непрерывным*, если для всякой окрестности нуля $W \subseteq Z$ и любых компактов $S \subseteq X$ и $T \subseteq Y$ найдутся окрестности нуля $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$, такие, что $\beta(S, V) \subseteq W$ и $\beta(U, T) \subseteq W$.

Стереотипной алгеброй, как и в [2], мы называем произвольную ассоциативную алгебру A над $\mathbb{C}$ с единицей, являющуюся одновременно стереотипным пространством, причем умножение $(a, b) \mapsto a \cdot b$ должно быть непрерывной билинейной формой в описанном смысле. *Стереотипным модулем* над A называется всякий A -модуль X , являющийся стереотипным пространством, причем умножение на элементы из A — также непрерывная форма в указанном смысле.

Для всякой стереотипной алгебры A символами ${}_A\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_A$ обозначаются категории стереотипных левых и правых A -модулей (с линейными над A непрерывными отображениями в качестве морфизмов). Для любых стереотипных A -модулей X и Y обозначим через $Y:{}_AX$ пространство A -морфизмов $\varphi: X \rightarrow Y$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах, а символом $Y \odot_A X$ — его псевдонасыщение (в смысле [3]): $Y \odot_A X = (Y:{}_AX)^\Delta$. В частности, при $A = \mathbb{C}$ получаем внутреннее пространство операторов $Y \odot X$, определенное в [3].

*Статья поддержана грантом РФФИ № 99-01-01254.

Пусть, кроме того, для любых A -морфизмов $\alpha: E \rightarrow F$ и $\beta: G \rightarrow H$ $\mathbb{C}$ -морфизм $(\beta \otimes_A \alpha): (G \otimes_A F) \rightarrow (H \otimes_A E)$ действует по формуле

$$(\beta \otimes_A \alpha)(\psi) = \beta \circ \psi \circ \alpha.$$

Оправданием этому обозначению служат тождества

$$(\gamma \circ \beta) \otimes \alpha = (\gamma \otimes 1) \circ (\beta \otimes \alpha), \quad \gamma \otimes (\beta \circ \alpha) = (1 \otimes \alpha) \circ (\gamma \otimes \beta).$$

Используемое далее понятие *относительной категории* (enriched category) подробно описано в монографиях [7–9].

ТЕОРЕМА 1. *Для всякой стереотипной алгебры A категории ${}_A\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_A$ являются относительными категориями над категорией $\mathfrak{S}$ с внутренним Hom -функтором $\text{Hom}(X, Y) = Y \otimes_A X$.*

2. Инъективность и проективность. Стереотипный левый модуль P над стереотипной алгеброй A называется *проективным* (в абсолютном смысле), если всякий эпиморфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ в категории ${}_A\mathfrak{S}$ порождает эпиморфизм $(\varphi \otimes_A 1_P): (X \otimes_A P) \rightarrow (Y \otimes_A P)$ в категории $\mathfrak{S}$: $\varphi \in \text{Epi}({}_A\mathfrak{S}) \implies \varphi \otimes_A 1_P \in \text{Epi}(\mathfrak{S})$. Это эквивалентно условию плоскости: $\varphi \in \text{Mono}(\mathfrak{S}_A) \implies \varphi \circ 1_P \in \text{Mono}(\mathfrak{S})$, где $X \circ_A Y = (X^* \otimes_A Y)^*$ — стереотипное тензорное произведение. Таким образом, в абсолютной теории гомологий стереотипных алгебр понятия проективности и плоскости совпадают.

Двойственным образом, стереотипный (левый) модуль Q над стереотипной алгеброй A называется *инъективным* (в абсолютном смысле), если всякий мономорфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ в категории ${}_A\mathfrak{S}$ порождает эпиморфизм $(1_Q \otimes_A \varphi): (Q \otimes_A Y) \rightarrow (Q \otimes_A X)$ в категории $\mathfrak{S}$: $\varphi \in \text{Mono}({}_A\mathfrak{S}) \implies 1_Q \otimes_A \varphi \in \text{Epi}(\mathfrak{S})$. Это эквивалентно условию «коплоскости»: $\varphi \in \text{Epi}(\mathfrak{S}_A) \implies \varphi \otimes_A 1_P \in \text{Epi}(\mathfrak{S})$, где $X \otimes_A Y = X \otimes_A Y^*$ — стереотипное тензорное копроизведение.

Аналогично определяются правые проективные и инъективные модули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Левый (правый) A -модуль P проективен тогда и только тогда, когда правый (левый) A -модуль $Q = P^*$ инъективен.*

ПРИМЕРЫ. 1. *Для стереотипного пространства X , рассматриваемого как стереотипный $\mathbb{C}$ -модуль, абсолютная проективность эквивалентна абсолютной инъективности и эквивалентна выполнению условия стереотипной аппроксимации для X [3].*

2. *Абсолютно свободные модули, т.е. модули вида $A_I = \mathbb{C}_I \otimes_{\mathbb{C}} A$, где I — произвольное множество, являются (левыми и правыми) проективными (в абсолютном смысле) над A .*

3. *Абсолютно косвободные модули, т.е. модули вида $(A^*)^I = \mathbb{C}^I \otimes_{\mathbb{C}} (A^*)$, где I — произвольное множество, являются (левыми и правыми) инъективными (в абсолютном смысле) над A .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для всякого стереотипного модуля X над A найдется абсолютно свободный модуль A_I и эпиморфизм $\pi: A_I \rightarrow X$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для всякого стереотипного модуля X над A найдется абсолютно косвободный модуль $(A^*)^I$ и мономорфизм $\sigma: X \rightarrow (A^*)^I$.*

Назовем морфизм стереотипных A -модулей $\pi: X \rightarrow Y$ *аппроксимативной ретракцией*, если существует направленность морфизмов $\rho_i: Y \rightarrow X$, такая, что $\pi \circ \rho_i \xrightarrow{Y \otimes_A Y} 1_Y$ ($i \rightarrow \infty$). Это равносильно тому, что морфизм $(\pi \otimes 1_Y): (X \otimes_A Y) \rightarrow (Y \otimes_A Y)$ является эпиморфизмом.

Из определения ясно, что

$$\pi \text{ — ретракция} \implies \pi \text{ — аппроксимативная ретракция} \\ \implies \pi \text{ — эпиморфизм.}$$

Двойственным образом, морфизм $\sigma: X \rightarrow Y$ мы называем *аппроксимативной коретракцией*, если существует направленность морфизмов $\rho_i: Y \rightarrow X$, такая, что $\rho_i \circ \sigma \xrightarrow{X \otimes_A X} 1_X$ ($i \rightarrow \infty$). Это равносильно тому, что морфизм $(1_X \otimes \sigma): (X \otimes_A Y) \rightarrow (X \otimes_A X)$ является эпиморфизмом.

Понятно, что

$$\sigma \text{ — коретракция} \implies \sigma \text{ — аппроксимативная коретракция} \\ \implies \sigma \text{ — мономорфизм.}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Морфизм π является аппроксимативной ретракцией тогда и только тогда, когда $\sigma = \pi^*$ — аппроксимативная коретракция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Модуль $P \in {}_A\mathfrak{S}$ абсолютно проективен тогда и только тогда, когда существует аппроксимативная ретракция $\pi: A_I \rightarrow P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Модуль $Q \in {}_A\mathfrak{S}$ абсолютно инъективен тогда и только тогда, когда существует аппроксимативная коретракция $\sigma: Q \rightarrow (A^*)^I$.

3. Абсолютная гомологическая размерность. Последовательность

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} X_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} X_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

морфизмов в категории ${}_A\mathfrak{S}$ или $\mathfrak{S}_A$ называется *точной* (в абсолютном смысле), если для любого i

$$\text{Im } \varphi_i = \text{Ker } \varphi_{i+1}.$$

Проективной резольвентой левого (правого) стереотипного A -модуля X (в абсолютном смысле) называется всякая точная цепочка

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{\pi_0} P_0 \xleftarrow{\pi_1} P_1 \longleftarrow \cdots$$

A -морфизмов в ${}_A\mathfrak{S}$ (или $\mathfrak{S}_A$), в которой все модули P_i абсолютно проективны.

Если существует n , такое, что $P_{n+1} = 0$, то резольвента называется *конечной*, а число $l = \min\{n : P_{n+1} = 0\}$ — ее *длиной*. Длина самой короткой проективной резольвенты левого (правого) A -модуля X называется *левой (правой) проективной размерностью* модуля X над A и обозначается $\text{dlp}_A X$ ($\text{drp}_A X$).

Двойственным образом, *инъективной резольвентой* левого (правого) стереотипного A -модуля X (в абсолютном смысле) называется всякая точная цепочка

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\sigma_0} Q_0 \xrightarrow{\sigma_1} Q_1 \longrightarrow \cdots$$

A -морфизмов в ${}_A\mathfrak{S}$ (или $\mathfrak{S}_A$), в которой все модули Q_i абсолютно инъективны.

Если существует n , такое, что $Q_{n+1} = 0$, то резольвента называется *конечной*, а число $l = \min\{n : Q_{n+1} = 0\}$ — ее *длиной*. Длина самой короткой инъективной резольвенты левого (правого) A -модуля X называется *левой (правой) инъективной размерностью* модуля X над A и обозначается $\text{dli}_A X$ ($\text{dri}_A X$).

В силу принципа двойственности величины $\text{dlp}_A X$, $\text{drp}_A X$, $\text{dli}_A X$, $\text{dri}_A X$ связаны между собой равенствами

$$\text{dlp}_A X = \text{dri}_A X^*, \quad \text{dli}_A X = \text{drp}_A X^*. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 8. *Всякий стереотипный модуль X над произвольной стереотипной алгеброй A обладает инъективной и проективной резольвентами (в абсолютном смысле).*

Левой (правой) *проективной размерностью* стереотипной алгебры A называется величина

$$\mathrm{dlp}(A) = \sup\{\mathrm{dlp}_A X, X \in {}_A\mathfrak{S}\} \quad (\mathrm{drp}(A) = \sup\{\mathrm{drp}_A X, X \in \mathfrak{S}_A\}).$$

Аналогично, левой (правой) *инъективной размерностью* стереотипной алгебры A называется величина

$$\mathrm{dli}(A) = \sup\{\mathrm{dli}_A X, X \in {}_A\mathfrak{S}\} \quad (\mathrm{dri}(A) = \sup\{\mathrm{dri}_A X, X \in \mathfrak{S}_A\}).$$

Из формул (1) следуют соотношения

$$\mathrm{dlp}(A) = \mathrm{dri}(A), \quad \mathrm{drp}(A) = \mathrm{dli}(A).$$

Величина

$$\mathrm{dh}(A) = \max\{\mathrm{dlp}(A), \mathrm{drp}(A)\} = \max\{\mathrm{dli}(A), \mathrm{dri}(A)\}$$

называется (*абсолютной*) *гомологической размерностью* стереотипной алгебры A .

ПРИМЕРЫ. 1. Абсолютная гомологическая размерность поля $\mathbb{C}$ равна нулю, $\mathrm{dh} \mathbb{C} = 0$.

2. Абсолютная гомологическая размерность алгебры операторов $\mathcal{L}(X)$ равна нулю, $\mathrm{dh} \mathcal{L}(X) = 0$, тогда и только тогда, когда стереотипное пространство X обладает стереотипной аппроксимацией.

3. Абсолютная гомологическая размерность алгебры $C(T)$ непрерывных функций на компакте T равна нулю, $\mathrm{dh} C(T) = 0$, тогда и только тогда, когда компакт T является дискретным (и, следовательно, конечным) пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из-за неабелевости категорий ${}_A\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_A$ в стереотипной теории равенство нулю абсолютной гомологической размерности не означает, что все модули должны непременно быть проективными (или инъективными). Это условие гарантирует существование проективной и инъективной резольвент нулевой длины для произвольного модуля X ,

$$0 \leftarrow X \leftarrow P \leftarrow 0, \quad 0 \rightarrow X \rightarrow Q \rightarrow 0,$$

что в данном случае следует понимать лишь как существование биморфизмов (но необязательно изоморфизмов) $\pi: P \rightarrow X$ и $\sigma: X \rightarrow Q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акбаров С. С. Матем. заметки, **57**, № 3, 463–466 (1995).
2. Акбаров С. С. Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 4, 68–72 (1995).
3. Акбаров С. С. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 2, 71–76 (1999).
4. Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. МГУ, М., 1986.
5. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. Наука, М., 1989.
6. Маклейн С. Гомология. Мир, М., 1966.
7. MacLane S. Categories for working mathematician. Springer-Verlag, N.Y., 1971.
8. Kelly G. Basic concepts of enriched category theory. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 64, 1982.
9. Артамонов В. А., Сапий В. Н., Скорняков Л. А., Шеврин Л. Н., Шульгейфер Е. Г. Общая алгебра, т. 2. Наука, М., 1991.