Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Доценко, А. С. Хорошкин, Формулы характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 1, 1–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:51:52

Формулы характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды*

© 2007. В. В. Доценко, А. С. Хорошкин

§1. Введение

1.1. Описание полученных результатов. Пусть V — векторное пространство, на котором заданы две кососимметричные операции, каждая из которых является лиевской скобкой (удовлетворяет тождеству Якоби), причем эти лиевские скобки согласованы, т.е. любая их линейная комбинация является лиевской скобкой. Такая алгебраическая структура называется алгеброй с двумя согласованными скобками. Для нее, как и для произвольной алгебраической структуры, можно рассмотреть свободную алгебру такого типа с n образующими $a_1, \dots, a_n$. Один из естественных вопросов, связанных с этой алгеброй, состоит в том, чтобы исследовать, насколько большой она является. Точнее этот вопрос ставится так. Эта алгебра градуирована (даже мультиградуирована), и однородные компоненты конечномерны. Каковы размерности этих однородных компонент? Традиционно для алгебраических структур ответ дается следующей последовательностью действий. Сначала для «полилинейной части» свободной алгебры (т.е. пространства элементов, в которые каждая образующая входит один раз) вычисляется структура S_n -модуля (для естественного действия перестановками образующих). После этого полученная информация используется для вычисления размерностей всех однородных компонент. В нашем случае удастся доказать, что размерность полилинейной части свободной алгебры равна n^{n-1} , и вычислить характер представления симметрической группы S_n в этом пространстве. Изложению этих результатов и посвящена данная работа.

Мы также получаем аналогичные результаты для «бигамильтоновой» свободной алгебры. Бигамильтонова алгебра — аналог алгебры Пуассона для пары согласованных скобок. А именно, это векторное пространство, на котором заданы две кососимметричные операции, являющиеся согласованными скобками, и одна симметричная операция — коммутативное ассоциативное умножение, причем такое, что каждая из скобок является его дифференцированием. Для такой свободной алгебры с n образующими размерность соответствующего пространства равна $(n+1)^{n-1}$, и характер представления симметрической группы тоже оказывается возможным вычислить.

Гипотеза о том, что размерность полилинейной части свободной бигамильтоновой алгебры равна $(n+1)^{n-1}$, была высказана Б. Л. Фейгиным несколько лет назад. Такую же размерность имеет пространство диагональных гармонических многочленов из работы [14]. Изначально предполагалось, что эти пространства

*Работа первого автора поддержана грантом президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ НШ-2044.2003.2 и грантом INTAS 03-3350. Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 04-01-00637 и грантом INTAS 03-3350.

имеют не только одинаковую размерность, но и являются изоморфными представлениями симметрической группы. Это утверждение неверно, и на данный момент не удалось обнаружить концептуального объяснения совпадения размерностей.

1.2. Используемая техника. Основным средством вычисления размерностей и характеров для нас является развитая В. Гинзбургом и М. Капрановым теория кошулевой двойственности для операд и кошулевых операд. Оказывается, что хотя операда пары согласованных скобок устроена довольно нетривиально, операда, отвечающая ей при кошулевой двойственности, куда более обозрима. Для кошулевых операд известен способ получать из информации о размерностях пространств операды аналогичную информацию для двойственной операды. А именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1 [13]. *Положим $f_{\mathcal{Q}}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dim \mathcal{Q}(n)}{n!} x^n$. Если операда $\mathcal{Q}$ кошулева, то $f_{\mathcal{Q}}(-f_{\mathcal{Q}}(-x)) = x$.*

Пример 1. Для операды Ли $\mathcal{L}ie$ имеем $\dim \mathcal{L}ie(n) = (n-1)!$, так что $f_{\mathcal{L}ie}(x) = -\ln(1-x)$. Для отвечающей ей при кошулевой двойственности операды $\mathcal{C}om$ имеем $\dim \mathcal{C}om(n) = 1$, так что $f_{\mathcal{C}om}(x) = \exp(x) - 1$. Хорошо известно, что эти операды кошулевы. Функциональное уравнение в этом случае принимает вид $-\ln(1 + \exp(-x) - 1) = x$.

Имеет место и аналогичное функциональное уравнение на производящие функции характеров представлений симметрических групп в пространствах операды. Поэтому для нас оказывается важным, что операда пары согласованных скобок кошулева. Это удастся проверить. Фактически на данный момент для этого известно несколько разных способов. Один из них состоит в использовании идей недавней работы [17], в которой изучается связь кошулевых операд и коэн-маколеевых частично упорядоченных множеств. Другой способ состоит в использовании результатов второго автора, получившего критерий кошулевости в терминах дистрибутивных решеток, аналогичный критерию кошулевости для алгебр. (Такой способ доказательства подробно обсуждается в работе [8].) После того как кошулевость доказана, все вычисления заключаются в обращении степенных рядов.

1.3. План статьи. Мы предполагаем известными основные понятия теории операд. Тем не менее для удобства читателя мы напоминаем некоторые определения в те моменты, когда соответствующие понятия используются.

В §2 мы определяем рассматриваемые в настоящей статье операды и устанавливаем их простейшие свойства. В этом параграфе мы не используем общего определения операды, апеллируя к наглядности рассматриваемых объектов. В §3 мы напоминаем существенные для нас понятия теории кошулевой двойственности для операд и определяем производящие функции характеров, вычисление которых для рассматриваемых операд является основным результатом этой статьи. В §4 мы приводим доказательство кошулевости рассматриваемых операд. В §5, используя функциональные уравнения на производящие функции характеров, мы вычисляем эти производящие функции для каждой из рассматриваемых операд. В §6 мы обсуждаем конструкцию мономиального базиса в полилинейной части свободной алгебры с двумя согласованными

скобками. Формула для размерности доказывает, что семейство мономов, предложенное Берштейном [1]¹⁾, является базисом. В §7 мы приводим известные на данный момент результаты о разложении изучаемых представлений в сумму неприводимых. Наконец, §8 является служебным. В него вынесены определения, связанные с формальными степенными рядами и вычетами, а также одно вспомогательное вычисление.

Все векторные пространства и алгебры в данной работе определены над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Иногда удобно считать это поле алгебраически замкнутым; в такие моменты это будет специально оговариваться.

1.4. Благодарности. Мы благодарны нашему учителю Б. Л. Фейгину за постановку задачи, полезные обсуждения и значительную помощь в редактировании этого текста. Также мы хотим выразить признательность А. Н. Кириллову, от которого мы узнали о работе [17], и В. Гинзбургу и П. Этингофу за обсуждение результатов этой статьи.

§2. Определения рассматриваемых операд

2.1. Операды $\mathcal{Com}$, $\mathcal{Lie}$ и $\mathcal{P}$. Напомним ряд стандартных определений. Операда $\mathcal{Lie}$ порождена одной кососимметричной бинарной операцией $\{\cdot, \cdot\}$, на которую налагается одно квадратичное соотношение — требуется, чтобы в любой алгебре над этой операдой было выполнено тождество Якоби (1). Таким образом, алгебра над такой операдой — это алгебра Ли. Операда $\mathcal{Com}$ порождена одной симметричной бинарной операцией $\star$, на которую наложено квадратичное соотношение, означающее ассоциативность этой операции. Алгебра над такой операдой — ассоциативная коммутативная алгебра.

Пуассонова операда $\mathcal{P}$ устроена чуть более сложно. Она порождена симметричной операцией $\star$ и кососимметричной операцией $\{\cdot, \cdot\}$; симметричная операция порождает внутри $\mathcal{P}$ операду, изоморфную $\mathcal{Com}$, а кососимметричная — операду, изоморфную $\mathcal{Lie}$, и они связаны соотношением, которое означает, что кососимметричная операция является дифференцированием симметричной («правило Лейбница дифференцирования произведения»):

$$\{a, b \star c\} = \{a, b\} \star c + b \star \{a, c\}.$$

Алгебра над этой операдой называется алгеброй Пуассона; примером такой алгебры является алгебра функций на многообразии с операцией умножения и скобкой, заданной пуассоновым бивекторным полем.

2.2. Операды $\mathcal{Lie}_2$ и $\mathcal{Com}_2$. Операда $\mathcal{Lie}_2$ (называемая также операдой пары согласованных скобок) порождена двумя кососимметричными операциями (далее мы называем их скобками) $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$. Соотношения в этой операде заключаются в том, что любая линейная комбинация этих скобок удовлетворяет тождеству Якоби. Это эквивалентно выполнению в любой алгебре над этой операдой тождества Якоби для каждой из скобок:

$$\{a, \{b, c\}_1\}_1 + \{b, \{c, a\}_1\}_1 + \{c, \{a, b\}_1\}_1 = 0, \quad (1)$$

$$\{a, \{b, c\}_2\}_2 + \{b, \{c, a\}_2\}_2 + \{c, \{a, b\}_2\}_2 = 0, \quad (2)$$

¹⁾Как сообщил нам П. Этингоф, другое такое семейство мономов обнаружила независимо Фу Лиу (Fu Liu).

а также шестичленного соотношения, связывающего эти операции,

$$\begin{aligned} & \{a, \{b, c\}_1\}_2 + \{b, \{c, a\}_1\}_2 + \{c, \{a, b\}_1\}_2 \\ & + \{a, \{b, c\}_2\}_1 + \{b, \{c, a\}_2\}_1 + \{c, \{a, b\}_2\}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Операда пары коммутативных умножений $\mathcal{Com}_2$ порождена двумя симметричными бинарными операциями (далее мы называем их умножениями) $\star_1$ и $\star_2$, для которых в любой алгебре над этой операдой выполнены тождества ассоциативности

$$a \star_1 (b \star_1 c) = (a \star_1 b) \star_1 c, \quad (4)$$

$$a \star_2 (b \star_2 c) = (a \star_2 b) \star_2 c, \quad (5)$$

а также тождества

$$\begin{aligned} a \star_1 (b \star_2 c) &= a \star_2 (b \star_1 c) = b \star_1 (a \star_2 c) \\ &= b \star_2 (a \star_1 c) = c \star_1 (a \star_2 b) = c \star_2 (a \star_1 b), \end{aligned} \quad (6)$$

означающие, что шесть элементов, получающихся из трех данных элементов с помощью двух разных умножений, равны между собой.

Заметим, что на пространствах этих операд помимо симметрических групп действует группа SL_2 (ибо она действует на пространстве бинарных операций, которыми порождены эти операды).

Предложение 2. *Размерность пространства $\mathcal{Com}_2(n)$ равна n . Представление группы S_n в нем изоморфно прямой сумме n экземпляров тривиального представления. Как представление группы SL_2 оно изоморфно неприводимому n -мерному представлению $L(n)$.*

Доказательство. Заметим, что размерность пространства $\mathcal{Com}_2(n)$ не больше n : для каждого $k = 0, 1, \dots, n-1$ все мономы, получающиеся с помощью k умножений первого типа и $n-1-k$ умножений второго типа, равны между собой. С другой стороны, это соображение объясняет, как предъявить явную реализацию свободной алгебры над такой операдой. А именно, базисный элемент состоит из мультимножества, элементы которого суть образующие алгебры, и числа, меньшего мощности мультимножества (числа умножений первого типа); операции определяются очевидным образом. Поэтому размерность в точности равна n . Утверждения о представлениях очевидны (в случае группы SL_2 проще всего вычислить веса этого представления, которые оказываются равными $n-1, n-3, \dots, 1-n$, что и требуется). $\square$

2.3. Операда $\mathcal{P}_2$. Бигамильтонова операда $\mathcal{P}_2$ порождена тремя операциями, две из которых $(\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2)$ кососимметричны и одна $(\star)$ симметрична. При этом кососимметричные операции — это две согласованные лиевские скобки (это значит, что выполняются тождества (1)–(3)), а симметричная операция — ассоциативное умножение, причем каждая скобка является его дифференцированием:

$$\{a, b \star c\}_1 = \{a, b\}_1 \star c + b \star \{a, c\}_1, \quad (7)$$

$$\{a, b \star c\}_2 = \{a, b\}_2 \star c + b \star \{a, c\}_2. \quad (8)$$

§3. Операды: сводка результатов

3.1. S-модули и операды. Через $\mathbb{S}\text{-mod}$ мы обозначаем категорию $\mathbb{S}$ -модулей, т.е. наборов векторных пространств $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}(n), n \geq 1\}$, где каждое $\mathcal{V}(k)$ является S_k -модулем. Множество всех морфизмов между $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ в этой категории есть по определению

$$\text{Hom}_{\mathbb{S}\text{-mod}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \bigoplus_{n \geq 1} \text{Hom}_{S_n}(\mathcal{V}(n), \mathcal{W}(n)).$$

Определим прямую сумму, тензорное произведение и двойственный модуль равенствами $(\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})(n) = \mathcal{V}(n) \oplus \mathcal{W}(n)$, $(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})(n) = \mathcal{V}(n) \otimes \mathcal{W}(n)$ и $(\mathcal{V}^*)(n) = (\mathcal{V}(n))^*$.

Важным для нас примером $\mathbb{S}$ -модуля является модуль Det , у которого $\text{Det}(n)$ — знаковое представление симметрической группы S_n . Нам понадобится вариант двойственного модуля $\mathcal{V}^\vee$, получающийся из обычного подкручиванием на знаковое представление: $\mathcal{V}^\vee = \mathcal{V}^* \otimes \text{Det}$. В некоторых случаях мы рассматриваем дифференциальные градуированные $\mathbb{S}$ -модули. Для них все указанные конструкции определяются аналогично. Градуированным аналогом модуля Det служит модуль $\mathcal{E}$, у которого пространство $\mathcal{E}(n)_{1-n}$ одномерно и является знаковым представлением симметрической группы, а остальные пространства $\mathcal{E}(n)_k$ нулевые.

Любому $\mathbb{S}$ -модулю $\mathcal{V}$ можно сопоставить функтор из категории $\mathcal{F}in$ конечных множеств (с биекциями в качестве отображений) в категорию векторных пространств. А именно, положим для n -элементного множества I

$$\mathcal{V}(I) = \mathbb{k} \text{Hom}_{\mathcal{F}in}([n], I) \otimes_{\mathbb{k}S_n} \mathcal{V}(n).$$

(Здесь $[n]$ — «стандартное» n -элементное множество $\{1, \dots, n\}$.)

Для $\mathbb{S}$ -модулей $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ определим композицию $\mathcal{V} \circ \mathcal{W}$ по правилу

$$(\mathcal{V} \circ \mathcal{W})(n) = \bigoplus_{m=1}^n \mathcal{V}(m) \otimes_{\mathbb{k}S_m} \left(\bigoplus_{f: [n] \rightarrow [m]} \bigotimes_{l=1}^m \mathcal{W}(f^{-1}(l)) \right), \quad (9)$$

где сумма берется по всем сюръекциям f . Чуть более обозримое, но менее инвариантное определение:

$$(\mathcal{V} \circ \mathcal{W})(n) = \bigoplus_{m=1}^n \mathcal{V}(m) \otimes_{\mathbb{k}S_m} \left(\bigoplus_{i_1 + \dots + i_m = n} \bigotimes_{l=1}^m \mathcal{W}(i_l) \right). \quad (10)$$

Эта операция снабжает категорию $\mathbb{S}$ -модулей структурой моноидальной категории. Операда — это моноид в этой категории. Более развернутое определение см. в [16] или в [7].

Аналогично определяется теоретико-множественная операда. Отличие лишь в том, что в этом случае ключевым является понятие $\mathbb{S}$ -множества (набора множеств $\{M_k, k \geq 1\}$ с действием симметрических групп; вместо тензорных произведений рассматриваются декартовы). По любой теоретико-множественной операде можно построить обычную операду, заменив все множества на их линейные оболочки и продолжив композиции на линейные комбинации по линейности.

Пусть V — векторное пространство. По определению операда линейных отображений $\mathcal{E}nd_V$ — это набор $\{\mathcal{E}nd_V(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V), n \geq 1\}$ пространств

полилинейных отображений пространства V в себя с очевидными операциями композиции.

Определим в терминах операды линейных отображений алгебру над операдой $\mathcal{O}$; задать на векторном пространстве структуру такой алгебры — это значит задать морфизм операды $\mathcal{O}$ в соответствующую операду линейных отображений. Таким образом, алгебра над операдой $\mathcal{O}$ — это векторное пространство W и набор отображений $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathbb{K}S_n} W^{\otimes n} \rightarrow W$ с очевидными условиями согласования. Свободная алгебра с пространством образующих X над операдой $\mathcal{O}$ — это $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathbb{K}S_n} X^{\otimes n}$.

В этой работе мы для упрощения формулировок рассматриваем только операды $\mathcal{Q}$ с $\mathcal{Q}(1) = \mathbb{K}$.

3.2. Задание операд образующими и соотношениями. Свободная операда $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$, порожденная $\mathbb{S}$ -модулем $\mathcal{O}$ (с $\mathcal{O}(1) = 0$), определяется следующим образом. В этой операде базис состоит из деревьев специального вида. Во-первых, у них есть выделенная вершина валентности 1 — корень. Во-вторых, у дерева из $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}(n)$ ровно n листьев. Наконец, у дерева есть внутренние вершины (не листья и не корень), в которых стоят базисные элементы множества образующих $\mathcal{O}$, — если у вершины k потомков, то стоящий в ней элемент должен принадлежать $\mathcal{O}(k)$. Единственное дерево с пустым множеством внутренних вершин порождает одномерное пространство $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}(1)$. Композиция дерева t с l листьями и деревьев $t_1, \dots, t_l$ состоит в том, что корневые вершины деревьев $t_1, \dots, t_l$ склеиваются с соответствующими листьями дерева t (и в каждом случае два ребра, которые мы склеиваем, объединяются в одно, а вершина становится внутренней точкой этого ребра).

Свободные операды используются при задании операд образующими и соотношениями. Пусть $\mathcal{O}$ — образующие операды, а $\mathcal{R}$ есть $\mathbb{S}$ -подмодуль в $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$. Идеал, порожденный этим $\mathbb{S}$ -подмодулем в $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$, — это линейная оболочка всех деревьев, у которых хотя бы в одной вершине стоит элемент из $\mathcal{R}$. Операда с образующими $\mathcal{O}$ и соотношениями $\mathcal{R}$ — это результат факторизации свободной операды по такому идеалу.

3.3. Кошулева двойственность для операд. Пусть операда $\mathcal{Q}$ порождена бинарными операциями $\mathcal{O}$, соотношения $\mathcal{R}$ между которыми квадратичны, т. е. связывают тернарные операции, получающиеся из данных композициями. В этом случае операда называется квадратичной. Как и в случае кошулевой двойственности для квадратичных алгебр, квадратичной операде $\mathcal{Q}$ сопоставляется операда $\mathcal{Q}^!$, которая порождена операциями $\mathcal{O}^{\vee}$ с соотношениями, отвечающими аннулятору соотношений для операды $\mathcal{Q}$ при естественном спаривании. При этом, как и для алгебр, выполняется свойство $(\mathcal{Q}^!)^! \simeq \mathcal{Q}$.

Предложение 3. $\mathcal{Com}^! \simeq \mathcal{Lie}$, $\mathcal{P}^! \simeq \mathcal{P}$, $\mathcal{Lie}_2^! \simeq \mathcal{Com}_2$.

Доказательство. Первые два изоморфизма хорошо известны (они установлены, например, в [13]), оставшийся проверяется аналогично. $\square$

Кобар-комплекс $\mathbf{C}(\mathcal{Q})$ операды $\mathcal{Q}$ — это свободная операда с образующими $\{\mathcal{Q}^*(n), n \geq 2\}$, на которой задан дифференциал d с $d^2 = 0$. Напомним здесь вкратце его определение, отсылая читателя к книге [16] за подробностями (включая правильный выбор градуировки на свободной операде и правило выбора знаков в формуле для дифференциала).

Заметим, что из наличия структуры операды на $\mathcal{Q}$ следует наличие отображений

$$\phi_{m,n,k}^*: \mathcal{Q}^*(m+n-1) \rightarrow \mathcal{Q}^*(m) \otimes \mathcal{Q}^*(n),$$

двойственных к отображениям композиции

$$\begin{aligned} \phi_{m,n,k}: \mathcal{Q}(m) \otimes \mathcal{Q}(n) \\ \simeq \mathcal{Q}(m) \otimes \mathcal{Q}(1)^{\otimes(k-1)} \otimes \mathcal{Q}(n) \otimes \mathcal{Q}(1)^{\otimes(m-k)} \rightarrow \mathcal{Q}(m+n-1) \end{aligned} \quad (11)$$

в $\mathcal{Q}$. Дифференциал на образующих свободной операды задается суммированием таких отображений с подходящими знаками, а на элементах, получающихся из образующих с помощью композиции, действует с помощью операдного аналога тождества Лейбница (со знаками, учитывающими градуировку).

Мы будем использовать версию кобар-комплекса, получающуюся из комплекса $\mathbf{C}(\mathcal{Q})$ подкручиванием на знак, $\mathbf{D}(\mathcal{Q}) = \mathbf{C}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{E}$. Нулевые когомологии этого кобар-комплекса изоморфны операде $\mathcal{Q}^!$.

Определение 1. Операда $\mathcal{Q}$ кошулева, если $H^i(\mathbf{D}(\mathcal{Q})) = 0$ при $i \neq 0$.

Замечание 1. Хорошо известно ([13], [15]), что операды $\mathcal{L}ie$, $\mathcal{C}ot$ и $\mathcal{P}$ кошулевы.

Напомним, что если операда $\mathcal{Q}$ квадратична, то на $\mathbb{S}$ -модуле $\mathcal{Q} \circ ((\mathcal{Q}^!)^\vee)$ есть дифференциал, снабжающий его структурой комплекса (см. [16]). Этот комплекс (по аналогии с квадратичными алгебрами) называется комплексом Кошуля операды $\mathcal{Q}$.

Предложение 4 [13]. Пусть $\mathcal{Q}$ — квадратичная операда. Следующие условия эквивалентны:

- Операда $\mathcal{Q}$ кошулева.
- Операда $\mathcal{Q}^!$ кошулева.
- При $n > 1$ подкомплекс $\mathcal{Q} \circ ((\mathcal{Q}^!)^\vee)(n)$ комплекса Кошуля операды $\mathcal{Q}$ ацикличесен.

3.4. Дистрибутивные законы. В этом разделе мы вкратце напоминаем основную результат работы Маркла [15]. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — две квадратичные операды. Обозначим через $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ их пространства образующих, а через $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ — пространства соотношений. Обозначим через $\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \bullet \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ подпространство в свободной операде $\mathcal{F}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{B}}}$, порожденное элементами вида $\phi(1, \psi)$, где $\phi \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, $\psi \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ (а 1 означает тождественную унарную операцию, отвечающую дереву без внутренних вершин). Аналогичный смысл имеет обозначение $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} \bullet \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$. Предположим, что дано отображение

$$d: \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \bullet \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \bullet \mathcal{O}_{\mathcal{B}}.$$

Рассмотрим операду $\mathcal{C}$ с образующими $\mathcal{O}_{\mathcal{C}} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ и соотношениями $\mathcal{R}_{\mathcal{C}} = \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{D} \oplus \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, где $\mathcal{D} = \{x - d(x) \mid x \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \bullet \mathcal{O}_{\mathcal{A}}\}$. Легко видеть, что естественное включение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}$$

дает отображение $\mathbb{S}$ -модулей $\xi: \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$. Эти $\mathbb{S}$ -модули биградуированы (если полагать степень элементов $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ равной $(1, 0)$, а степень элементов $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ равной $(0, 1)$), и отображение сохраняет степень.

Следующее предложение доказано в работе [15].

Предложение 5. Пусть операды $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ кошулевы и отображение ξ является изоморфизмом на однородных компонентах степеней $(2, 1)$ и $(1, 2)$. Тогда

- (i) ξ есть изоморфизм биградуированных $\mathbb{S}$ -модулей $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$;
- (ii) операда $\mathcal{C}$ тоже кошулева.

Если условия предложения 5 выполнены, то говорят, что отображение d определяет дистрибутивный закон между $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} \bullet \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \bullet \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$.

3.5. Производящие функции и характеры. Как мы уже упоминали во введении, любой операде (более общо, $\mathbb{S}$ -модулю) $\mathcal{Q}$ сопоставляется формальный степенной ряд — экспоненциальная производящая функция размерностей

$$f_{\mathcal{Q}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dim \mathcal{Q}(n)}{n!} x^n,$$

причем если операда $\mathcal{Q}$ кошулева, то

$$f_{\mathcal{Q}}(-f_{\mathcal{Q}}(-x)) = x.$$

Это функциональное уравнение автоматически следует из функционального уравнения на более общие производящие функции, которые мы сейчас определим.

Представлению M симметрической группы S_n отвечает его характер, который отождествляется [5] с симметрическим многочленом $F_M(x_1, x_2, \dots)$ степени n от бесконечного числа переменных. Сопоставим $\mathbb{S}$ -модулю $\mathcal{V}$ элемент $F_{\mathcal{V}}(x_1, \dots, x_k, \dots) = \sum_{n \geq 1} F_{\mathcal{V}(n)}(x_1, \dots, x_k, \dots)$ кольца симметрических функций Λ — пополнения кольца симметрических многочленов от бесконечного числа переменных по нормированию, задаваемому степенью многочлена. Такое пополнение изоморфно кольцу формальных степенных рядов от (бесконечного числа) переменных степеней $1, 2, 3, \dots$, в качестве которых можно взять, например, ньютоновские степенные суммы $p_1, \dots, p_n, \dots$. Такой ряд является производящей функцией для характеров симметрических групп: значение характера пространства $\mathcal{V}(n)$ на перестановке, которая разлагается в произведение n_1 циклов длины 1, $\dots$, n_k циклов длины k , получается из коэффициента при $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ умножением на $1^{n_1} n_1! \cdots k^{n_k} n_k!$.

Заметим, что $f_{\mathcal{V}}(x) = F_{\mathcal{V}}|_{p_1=x, p_2=p_3=\dots=0}$.

Если на $\mathcal{V}$ действует группа Γ , причем ее действие перестановочно с действием симметрических групп, то на каждом пространстве $\mathcal{V}(n)$ действует $S_n \times \Gamma$, и пространству $\mathcal{V}$ мы сопоставляем элемент кольца Λ_{Γ} симметрических функций над кольцом характеров группы Γ (или, что то же самое, характер группы Γ со значениями в симметрических функциях). Мы обозначаем этот элемент через $F_{\mathcal{V}}(x_1, \dots, x_n, \dots; g)$, где $g \in \Gamma$.

Доопределим $F_{\mathcal{V}}$ для (дифференциального) градуированного модуля $\mathcal{V} = \bigoplus_i \mathcal{V}_i$. А именно положим $F_{\mathcal{V}} = \sum_i (-1)^i F_{\mathcal{V}_i}$ (эйлерова характеристика модуля $\mathcal{V}$).

3.6. Функциональное уравнение на характеры. Напомним определение плетизма для симметрических функций.

Определение 2. Фиксируем симметрическую функцию $H(x_1, x_2, \dots)$. Плетизм, отвечающий функции H (плетистическая подстановка функции H), — это кольцевой $\mathbb{k}$ -гомоморфизм $\Lambda \rightarrow \Lambda$ (образ элемента F обозначается через $F \circ H$), для которого $p_n \circ H = H(x_1^n, x_2^n, \dots)$.

Предложение 6 [13]. Для любых двух $\mathbb{S}$ -модулей $\mathcal{V}, \mathcal{W}$

$$F_{\mathcal{V} \circ \mathcal{W}} = F_{\mathcal{V}} \circ F_{\mathcal{W}}.$$

Обобщим стандартное определение плетизма на Λ_{Γ} следующим очевидным образом.

Определение 3. Фиксируем $H(x_1, x_2, \dots; g) \in \Lambda_{\Gamma}$. Плетизм, отвечающий функции H (плетистическая подстановка функции H), — это линейный над кольцом характеров гомоморфизм $F \mapsto F \circ H$ кольца Λ_{Γ} в себя, определяемый на симметрических функциях равенством $p_n \circ H = H(x_1^n, x_2^n, \dots; g^n)$.

Доказательство формулы для характера композиции в этом случае аналогично доказательству в [13].

Из определения очевидно, что верна формула

$$p_n \circ (H(p_1, p_2, \dots, p_k, \dots; g)) = H(p_n, p_{2n}, \dots, p_{kn}, \dots; g^n).$$

Обозначим через ε линейную над кольцом характеров группы Γ инволюцию кольца Λ_{Γ} , переводящую p_n в $-p_n$.

Теорема 1. Пусть операда $\mathcal{Q}$ кошулева. Тогда в кольце Λ_{Γ} верно равенство

$$\varepsilon(F_{\mathcal{Q}}) \circ \varepsilon(F_{\mathcal{Q}'}) = p_1. \quad (12)$$

Эта теорема доказывается аналогично соответствующему утверждению в [13]; доказательство состоит в подсчете двумя способами эйлеровой характеристики комплекса Кошуля данной операды.

§4. Кошулевость и коэн-маколеевость

В этом разделе мы доказываем, что рассматриваемые операды кошулевы. Для доказательства используем результаты, связывающие кошулевы операды и коэн-маколеевы частично упорядоченные множества.

Пусть множество M снабжено отношением строгого частичного порядка $<$. В дальнейшем для такого частично упорядоченного множества мы будем использовать сокращение: ч.у. множество.

В случае если для элементов a, b выполнено условие $a < b$, говорят, что a меньше, чем b , а b больше, чем a .

Определение 4. 1) Пусть $x < y$ — два элемента ч.у. множества M . Интервалом (x, y) называется подмножество множества M , состоящее из всех элементов z , для которых $x < z < y$. Отрезком $[x, y]$ называется $(x, y) \cup \{x\} \cup \{y\}$.

2) Если $x < y$ и $(x, y) = \emptyset$, то говорят, что y покрывает x , и пишут $x \prec y$.

В этом разделе мы рассматриваем только теоретико-множественные операды и их линейные оболочки. Ниже мы используем для операды то же обозначение, что и для ее линейной оболочки, если из контекста ясно, какая из них рассматривается в каждый момент, а в неочевидных случаях явно указываем, о какой из двух операд идет речь. Мы будем использовать удобный способ работать одновременно с теоретико-множественной операдой и ее линейной оболочкой. А именно, выберем в качестве реализации n -го множества операды $\mathcal{A}$ множество полилинейных мономов в свободной алгебре с n образующими над линейной оболочкой этой операды.

В качестве основного примера мы рассматриваем операду $\mathcal{Com}_2$; ясно, что она является линейной оболочкой теоретико-множественной операдой, поскольку базис полилинейной части свободной алгебры в силу соотношений можно получить с помощью факторизации конечного множества по отношению эквивалентности.

Пусть $\mathcal{A}$ — теоретико-множественная операда. Построим по ней набор ч.у. множеств $\Pi_n(\mathcal{A})$ следующим образом. Элемент одного из таких множеств $\Pi_n(\mathcal{A})$ — это пара (I, ψ) , где I — разбиение $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ множества из n элементов в объединение нескольких непересекающихся подмножеств, а $\psi = \{\psi_s, s = 1, \dots, k\}$ — набор элементов операдой, $\psi_s \in \mathcal{A}(I_s)$ для каждого $s = 1, \dots, k$. По определению элемент (I, ψ) меньше элемента (J, ϕ) , если I получается из J измельчением (подразбиением некоторых подмножеств; $J_s = \bigsqcup_{l=1}^{m_s} I_{l,s}$), а набор «операций» ϕ получается из набора ψ операдной композицией с некоторыми элементами $\eta_s \in \mathcal{A}(m_s)$: $\phi_s = \eta_s(\psi_{1,s}, \dots, \psi_{m_s,s})$.

Кошулевость линейной оболочки такой операдой связана с гомологическими свойствами построенных частично упорядоченных множеств.

Определение 5. *Порядковый комплекс ч.у. множества M — это векторное пространство $C_*(M)$ с базисом из конечных возрастающих цепей $(m_0 < \dots < m_k)$ и дифференциалом d ,*

$$d(a_0 < \dots < a_k) = \sum_i (-1)^i (a_0 < \dots < a_{i-1} < a_{i+1} < \dots < a_k).$$

Определение 6. Гомологии порядкового комплекса называются *гомологиями ч.у. множества M* и обозначаются через $H_*(M)$.

Определение 7. Конечное ч.у. множество M называется *коэн-маколеевым*, если $H_i(M) = 0$ при всех положительных i , меньших длины максимальной цепи в M .

В работе [17] доказан следующий результат:

Предложение 7. *Пусть теоретико-множественная операда $\mathcal{A}$ такова, что для любого набора ее элементов $\alpha_i \in \mathcal{A}(m_i)$, $i = 1, \dots, k$, выполнено условие*

() отображение $\mathcal{A}(k) \rightarrow \mathcal{A}(m_1 + \dots + m_k)$, $\beta \mapsto \beta(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, инъективно.*

Тогда линейная оболочка этой операдой кошулева, если и только если все ч.у. множества $\Pi_n(\mathcal{A})$ коэн-маколеевы.

Это предложение было успешно использовано, например, в работе [11], где доказывается, в частности, коэн-маколеевость ч.у. множества отмеченных разбиений конечного множества¹⁾. Идея доказательства в нашем случае довольно похожа на использованную в [11].

Имеет место следующее очевидное предложение.

Предложение 8. *Условие (*) выполнено для операдой $\mathcal{Com}_2$.*

Определение 8. Назовем ч.у. множество M *полумодулярным сверху*, если для любых $a, b, c \in M$, для которых $c \prec a, b$, найдется $d \in M$, такой, что $a, b \prec d$.

¹⁾Такие ч.у. множества совпадают с ч.у. множествами, построенными по теоретико-множественной операдой $\mathcal{Perm}$ (см. [17]). Вообще операдой $\mathcal{Perm}$ и $\mathcal{Com}_2$ похожи: так, например, у них равны производящие функции размерностей (но действие симметрических групп различается, и это приводит к радикальному различию между двойственными операдой).

Ч.у. множество M называется *вполне полумодулярным сверху*, если любой его отрезок полумодулярен сверху.

Из работы [9] можно извлечь (см. [11]) следующий критерий коэн-маколеевости.

Предложение 9. *Если конечное ч.у. множество M вполне полумодулярно сверху, то оно коэн-маколеево.*

Рассмотрим подробнее множества $\Pi_n = \Pi_n(\mathcal{Com}_2)$. Элемент множества Π_n — это набор мономов в свободной алгебре с n образующими над операдой $\mathcal{Com}_2$, в которые каждая образующая входит (суммарно) один раз. Измельчение отвечает замене каких-то мономов в наборе на их сомножители.

Теорема 2. *Для любого n ч.у. множество Π_n коэн-маколеево.*

Доказательство. Докажем, что Π_n вполне полумодулярно сверху. Рассмотрим сначала максимальные (по длине) отрезки $\Pi_{n,s}$ этого множества. Наибольший элемент отрезка $\Pi_{n,s}$ — моном, где использовано s умножений первого типа и $n - 1 - s$ второго.

Лемма 1. *Множество $\Pi_{n,s}$ полумодулярно сверху.*

Доказательство. Пусть a, b, c — три элемента из $\Pi_{n,s}$, причем a и b покрывают c . Обозначим через $M = \{M_1, \dots, M_t\}$ набор мономов, отвечающий c . Ясно, что каждый из элементов a, b получается из c перемножением каких-то *двух* из этих мономов. Рассмотрим три случая.

1) a получается из c заменой M_j, M_k на $M_j \star_\alpha M_k$, а b — заменой M_l, M_m на $M_l \star_\beta M_m$, где все индексы j, k, l, m попарно различны. Тогда пусть d получается из c заменой M_j, M_k, M_l, M_m на $M_j \star_\alpha M_k, M_l \star_\beta M_m$.

2) a получается из c заменой M_j, M_k на $M_j \star_\alpha M_k$, а b — заменой M_j, M_l на $M_j \star_\beta M_l$, где индексы j, k, l попарно различны. Тогда пусть d получается из c заменой M_j, M_k, M_l на $M_j \star_\alpha M_k \star_\beta M_l$.

3) a получается из c заменой M_j, M_k на $M_j \star_\alpha M_k$, а b — заменой M_j, M_k на $M_j \star_\beta M_k$. Тогда ясно, что $\alpha \neq \beta$ и в c существует еще один моном M_l (иначе a, b были бы двумя различными максимальными элементами в отрезке — противоречие). Пусть d получается из c заменой M_j, M_k, M_l на $M_j \star_\alpha M_k \star_\beta M_l$.

В каждом из случаев d покрывает a и b . $\square$

Лемма 2. *Любой отрезок в Π_n изоморфен декартову произведению нескольких максимальных отрезков Π_{n_i, r_i} (в множествах Π_{n_i} с меньшими номерами).*

Доказательство. Рассмотрим наибольший элемент отрезка $[x, y]$. Ему отвечает набор мономов i , в частности, разбиение $[n] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_s$. В соответствии с этим разбиением отрезок $[x, y]$ разлагается в декартово произведение отрезков $[x_1, y_1] \times \dots \times [x_s, y_s]$, в каждом из которых наибольший элемент y_t является мономом из $\mathcal{Com}_2(I_t)$. Положим $\tilde{x} = x_k, \tilde{y} = y_k$, и пусть $m_1, \dots, m_r$ — мономы, составляющие $\tilde{x}$, а моном, отвечающий $\tilde{y}$, получается из них с помощью s умножений первого типа. Тогда ясно, что отрезок $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ изоморфен отрезку $\Pi_{r,s}$ в множестве Π_r (заменим в элементах этого отрезка образующие на соответствующие мономы). $\square$

Ясно, что декартово произведение полумодулярных сверху множеств полумодулярно сверху. Значит, Π_n вполне полумодулярно сверху. Поскольку конечное вполне полумодулярное сверху ч.у. множество коэн-маколеево, теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Оперადы $\mathcal{L}ie_2$, $\mathcal{Com}_2$, $\mathcal{P}_2$ кошулевы; $\mathbb{S}$ -модули $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{Com} \circ \mathcal{L}ie_2$ изоморфны.

Доказательство. Для операд $\mathcal{Com}_2$ кошулевость является немедленным следствием доказанной теоремы и предложения 7. Операда $\mathcal{L}ie_2$ кошулева как двойственная к кошулевой операде. Оба утверждения, касающиеся операд $\mathcal{P}_2$, следуют из предложения 5, ибо эта операда построена из кошулевых операд $\mathcal{Com}$ и $\mathcal{L}ie_2$ с помощью дистрибутивного закона (правила Лейбница) — доказательство этого аналогично доказательству соответствующего утверждения для операд Пуассона в [15]. $\square$

§5. Вычисление характеров и размерностей

5.1. Пример применения функциональных уравнений. В качестве примера докажем хорошо известный результат о структуре операд Ли. Так как $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{Com}$, а

$$F_{\mathcal{Com}}(p_1, \dots, p_n, \dots) = \sum_{k \geq 1} h_k = \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k} \right) - 1$$

(здесь h_n , $n \geq 1$, — полные симметрические функции (в случае симметрических многочленов от конечного числа переменных h_n — сумма всех мономов степени n), т. е. многочлены Шура, отвечающие разбиениям из одного слагаемого), то

$$\exp \left(- \sum_{k \geq 1} \frac{p_k \circ F_{\mathcal{L}ie}}{k} \right) - 1 = -p_1, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{k \geq 1} \frac{p_k \circ F_{\mathcal{L}ie}}{k} = -\ln(1 - p_1).$$

Докажем следующую формулу, напоминающую формулу обращения Мёбиуса [3].

Лемма 3 (формула обращения Мёбиуса в кольце Λ). Для $A, B \in \Lambda$ соотношения

$$A = \sum_{k \geq 1} p_k \circ B \quad \text{и} \quad B = \sum_{k \geq 1} \mu_k p_k \circ A$$

равносильны. (Здесь μ — теоретико-числовая функция Мёбиуса.)

Доказательство. Выведем, например, из первого соотношения второе:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \mu_k p_k \circ A &= \sum_{k \geq 1} \mu_k p_k \circ \left(\sum_{l \geq 1} p_l \circ B \right) \\ &= \sum_{k \geq 1, l \geq 1} \mu_k p_{kl} \circ B = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d|n} \mu_d \right) p_n \circ B = p_1 \circ B = B. \quad \square \end{aligned}$$

Из доказанной формулы следует, что

$$F_{\mathcal{L}ie} = - \sum_{k \geq 1} \frac{\mu_k p_k \circ \ln(1 - p_1)}{k} = - \sum_{k \geq 1} \frac{\mu_k \ln(1 - p_k)}{k} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k|n} \mu_k p_k^{n/k}.$$

Это равенство (доказанное другим способом еще в [10]) равносильно, как известно, следующему факту [4].

Теорема 3. Если основное поле алгебраически замкнуто, то представление группы S_n в пространстве $\mathcal{L}ie(n)$ изоморфно представлению $\text{Ind}_{H_n}^{S_n} \tau_n$, где

H_n — подгруппа, порожденная фиксированным циклом длины n , а τ_n — (любое) точное одномерное представление этой группы.

5.2. Формулы для $SL_2 \times S_n$ -характеров. Напомним, что на пространствах всех рассматриваемых операд действует группа SL_2 (это действие происходит из действия на двумерном пространстве образующих операды $\mathcal{L}ie_2$), причем это действие перестановочно с действием симметрических групп. Всю информацию об этих операдах мы извлечем из функционального уравнения на характеры и явного описания (см. предложение 2) представления $\mathcal{C}ot_2(n)$ группы $SL_2 \times S_n$. Кольцо характеров группы SL_2 изоморфно кольцу многочленов Лорана от переменной q (так, например, характер n -мерного неприводимого представления равен $(q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$); элемент кольца Λ_{SL_2} , отвечающий S -модулю $\mathcal{V}$, мы обозначаем через $F_{\mathcal{V}}(p_1, \dots, p_n, \dots; q)$. Это обозначение немного отличается от введенного выше, но мы надеемся, что это не приведет к путанице. В этом случае плетизм устроен следующим образом: $p_n \circ q = q^n$.

Здесь мы приводим полученные нами формулы для характеров рассматриваемых операд. Их доказательству посвящен разд. 5.3.

Введем следующие обозначения:

$$a_n(q) = \mu_n \frac{q^n - q^{-n}}{n(q - q^{-1})}, \quad c_n(q) = \sum_{d|n} \frac{q^d}{d} a_{n/d}(q^d), \quad d_n(q) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} a_{n/d}(q^d).$$

Перейдем к формулировке основной теоремы. Мы вычисляем значения $SL_2 \times S_n$ -характеров представлений в пространствах наших операд. Значения характеров на элементах группы S_n — характеры группы SL_2 , т. е. многочлены Лорана. Рассмотрим перестановку $\sigma \in S_n$, в разложение которой на независимые циклы входит n_1 циклов длины 1, $\dots$, n_t циклов длины t .

Основная теорема. 1. Значение характера представления $\mathcal{P}_2(n)$ на перестановке σ равно

$$\prod_{s \geq 1} \left[\prod_{m=1}^{n_s} \left(\sum_{d|s} (s n_d c_{s/d}(q^d)) - s m (q^s - q^{-s}) + s d_s(q) \right) \right] \times \prod_{s \geq 2} \frac{\sum_{d|s, d \neq s} n_d c_{s/d}(q^d) + d_s(q)}{\sum_{d|s, d \neq s} n_d c_{s/d}(q^d) + n_s q^{-s} + d_s(q)}. \quad (13)$$

2. Значение характера представления $\mathcal{L}ie_2(n)$ на перестановке σ вычисляется по следующему правилу. Пусть $n_1 = n_2 = \dots = n_{k-1} = 0$, $n_k \neq 0$ (т. е. длина кратчайшего встречающегося цикла равна k). Тогда характер обращается в нуль на этой перестановке, если среди циклов есть хотя бы один, длина которого не делится на k ; в противном случае характер равен

$$a_k(q) \prod_{j=1}^{n_k-1} ((n_k - j)q^k + j q^{-k}) \times \prod_{\substack{s \geq 2: \\ n_s \neq 0}} \left[\prod_{m=1}^{n_s-1} \left(\sum_{d: k|d, d|s} (s n_d c_{s/d}(q^d)) - s m (q^s - q^{-s}) \right) \sum_{d: k|d, d|s, d \neq s} s n_d c_{s/d}(q^d) \right]. \quad (14)$$

Замечание 2. Приведем здесь для сравнения с формулой для характера операды $\mathcal{P}_2$ формулу для характера пространства диагональных гармонических многочленов. Из результатов работы Хаймана [14] легко получить, что значение характера пространства диагональных гармонических многочленов от n пар переменных на перестановке, в разложении которой в произведение независимых циклов входит n_1 циклов длины 1, n_2 циклов длины 2 и т. д., равно

$$\frac{(-1)^{\sum_{m \geq 1} (m-1)n_m} q^{-n(n-1)/2}}{1 + q + q^2 + \dots + q^n} \prod_{m \geq 1} (1 + q^m + q^{2m} + \dots + q^{nm})^{n_m}. \quad (15)$$

Как минимум, эти две формулы объединяет тот довольно неожиданный факт, что значения характера симметрической группы в каждом из случаев разлагаются на небольшие (по сравнению со значением характера) множители.

Размерности, S_n -характеры и SL_2 -характеры рассматриваемых операд легко получаются из формул основной теоремы при различных специализациях. Мы не приводим формул для S_n -характера (отвечающих подстановке $q = 1$), поскольку они ненамного проще формул основной теоремы. Формулы для размерностей и SL_2 -характеров достаточно просты и красивы, чтобы привести их отдельно.

Следствие 2. *Имеют место равенства*

$$f_{\mathcal{L}ie_2}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1} x^n}{n!}, \quad f_{\mathcal{P}_2}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^{n-1} x^n}{n!}.$$

Далее, обозначим через $f_{\mathcal{A}}(x, q)$ экспоненциальную производящую функцию SL_2 -характеров (для $\mathbb{S}$ -модуля $\mathcal{A}$ с действием SL_2). Тогда имеют место равенства

$$f_{\mathcal{L}ie_2}(x, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (kq + (n-k)q^{-1}) x^n}{n!}, \quad (16)$$

$$f_{\mathcal{P}_2}(x, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (kq + 1 + (n-k)q^{-1}) x^n}{n!}. \quad (17)$$

Доказательство. Производящая функция размерностей получается из характера с помощью подстановки $p_1 = x$, $p_k = 0$ при $k > 1$, $q = 1$. С SL_2 -характером даже проще: не нужно подставлять $q = 1$. $\square$

5.3. Доказательство основной теоремы.

5.3.1. *Операда $\mathcal{L}ie_2$.* Заметим, что $SL_2 \times S_n$ -характер $F_{\mathcal{C}om_2}(p_1, \dots, p_n, \dots; q)$ операды $\mathcal{C}om_2$ равен

$$\sum_{n \geq 1} \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} h_n = \frac{\exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{q^k p_k}{k}\right) - \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{q^{-k} p_k}{k}\right)}{q - q^{-1}}. \quad (18)$$

Положим для краткости $G := F_{\mathcal{L}ie_2}(p_1, \dots, p_n, \dots; q)$. Из теоремы 1 следует, что G удовлетворяет функциональному уравнению

$$-\frac{1}{q - q^{-1}} \left(\exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{-q^k p_k \circ G}{k}\right) - \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{-q^{-k} p_k \circ G}{k}\right) \right) = p_1.$$

Полагая $H := \sum_{k \geq 1} \frac{q^k - q^{-k}}{k(q - q^{-1})} p_k \circ G$, имеем

$$p_1 = \frac{\exp((q - q^{-1})H) - 1}{q - q^{-1}} \exp\left(-\sum_{k \geq 1} \frac{q^k p_k \circ G}{k}\right).$$

Лемма 4 (q -аналог формулы обращения Мёбиуса). Для $A, B \in \Lambda_{SL_2}$ соотношения

$$A = \sum_{k \geq 1} \frac{q^k - q^{-k}}{k(q - q^{-1})} p_k \circ B \quad \text{и} \quad B = \sum_{k \geq 1} \mu_k \frac{q^k - q^{-k}}{k(q - q^{-1})} p_k \circ A$$

равносильны.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. $\square$

Тогда из леммы 4 следует, что $\sum_{k \geq 1} \frac{q^k p_k \circ G}{k} = \sum_{m \geq 1} c_m(q) p_m \circ H$. Таким образом,

$$p_1 = \frac{\exp((q - q^{-1})H) - 1}{q - q^{-1}} \exp\left(-\sum_{m \geq 1} c_m(q) p_m \circ H\right),$$

откуда

$$p_k = p_k \circ p_1 = \frac{\exp((q^k - q^{-k})p_k \circ H) - 1}{q^k - q^{-k}} \exp\left(-\sum_{m \geq 1} (c_m(q^k) p_{km} \circ H)\right).$$

Положим $z_k = p_k \circ H$. Заметим, что эта замена переменных треугольна и

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_k}{\partial z_k} &= \exp(z_k(q^k - q^{-k})) \exp\left(-\sum_{m \geq 1} c_m(q^k) z_{km}\right) \\ &\quad + \frac{\exp(z_k(q^k - q^{-k})) - 1}{q^k - q^{-k}} (-q^k) \exp\left(-\sum_{m \geq 1} c_m(q^k) z_{km}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{m \geq 1} c_m(q^k) z_{km}\right) \frac{q^k - q^{-k} \exp(z_k(q^k - q^{-k}))}{q^k - q^{-k}}. \end{aligned}$$

Мы хотим вычислить коэффициент при $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ ряда H . Он равен вычету $\text{Res} \frac{H(p_1, \dots, p_n, \dots; q)}{p_1^{n_1+1} \cdots p_k^{n_k+1}} dp$ (для краткости мы полагаем $dp = dp_1 \cdots dp_k$, $dz = dz_1 \cdots dz_k$), формулу для которого мы сейчас получим. Преобразуем этот вычет:

$$\begin{aligned} &\text{Res} \prod_{l=1}^k \left(\exp\left(-\sum_{m \geq 1} c_m(q^l) z_{lm}\right) \frac{\exp(z_l(q^l - q^{-l})) - 1}{q^l - q^{-l}} \right)^{-n_l-1} z_l dp \\ &= \text{Res} \prod_{l=1}^k \left(\exp\left(-\sum_{m \geq 1} c_m(q^l) z_{lm}\right) \frac{\exp(z_l(q^l - q^{-l})) - 1}{q^l - q^{-l}} \right)^{-n_l-1} z_l \\ &\quad \times \prod_{l=1}^k \left(\exp\left(-\sum_{m \geq 1} c_m(q^l) z_{lm}\right) \frac{q^l - q^{-l} \exp(z_l(q^l - q^{-l}))}{q^l - q^{-l}} \right) dz; \end{aligned}$$

последнее выражение равно

$$\text{Res } z_1 \prod_{m=1}^k \left[\exp \left(z_m \sum_{d|m} n_d c_{m/d}(q^d) \right) \times \left(\frac{\exp(z_m(q^m - q^{-m})) - 1}{q^m - q^{-m}} \right)^{-n_m-1} \frac{q^m - q^{-m} \exp(z_m(q^m - q^{-m}))}{q^m - q^{-m}} \right] dz.$$

Этот вычет, очевидно, представляется в виде произведения одномерных, которые вычисляются с помощью леммы 5 (см. приложение). Положим $x = z_m$, $n = n_m$, $a = \sum_{d|m} n_d c_{m/d}(q^d)$, $b = q^m - q^{-m}$, $\lambda = q^m$, $\mu = q^{-m}$. Рассмотрим отдельно случаи $m > 1$ и $m = 1$. В первом случае мы должны вычислить вычет

$$\text{Res } \frac{\exp(ax)b^{n+1}}{(\exp(bx) - 1)^{n+1}} \frac{\lambda - \mu \exp(bx)}{b} dx = \text{Res } b^n \frac{\lambda \exp(ax) - \mu \exp((a+b)x)}{(\exp(bx) - 1)^{n+1}} dx, \quad (19)$$

что с помощью леммы 5 переписывается в виде

$$\begin{aligned} b^n \left(\lambda \frac{(a-b)(a-2b) \cdots (a-nb)}{n! b^{n+1}} - \mu \frac{a(a-b) \cdots (a-(n-1)b)}{n! b^{n+1}} \right) \\ = \frac{(a-b)(a-2b) \cdots (a-nb)}{n!} \frac{a - n\lambda}{a - nb}. \end{aligned} \quad (20)$$

(Формула записана в таком виде для того, чтобы она была верна и при $n = 0$ — тогда пустое произведение в числителе дроби равно единице по стандартному соглашению, и значение вычета тоже получается равным единице.)

Пусть теперь $m = 1$. Сохраним те же обозначения. Тогда искомым вычет равен, очевидно, производной вычисленного нами вычета по параметру a в точке $\sum_{d|1} n_d c_{m/d}(q^d) = n_1 c_1(q) = n_1 q = n\lambda$ в соответствии с нашими обозначениями. Поэтому единственным слагаемым, не обращающимся в нуль при дифференцировании, будет то, где дифференцируется скобка $(a - n\lambda)$. Получаем, что вычет равен $(a-b)(a-2b) \cdots (a-(n-1)b)/n!$ (при $n = 0$ значение равно нулю).

Следствием наших вычислений является такая формула для ряда H :

$$\begin{aligned} H(p_1, \dots, p_n, \dots; q) = \sum_{k, n_1 > 0, n_2 \cdots n_k \geq 0} \frac{p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}}{n_1! \cdots n_k!} \prod_{l=1}^{n_1-1} ((n_1 - l)q + lq^{-1}) \\ \times \prod_{s=2}^k \left[\prod_{l=1}^{n_s} \left(\sum_{d|s} n_d c_{s/d}(q^d) - l(q^s - q^{-s}) \right) \frac{\sum_{d|s, d \neq s} n_d c_{s/d}(q^d)}{(\sum_{d|s, d \neq s} n_d c_{s/d}(q^d) + n_s q^{-s})} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Выше мы указывали, что характер операды $\mathcal{L}ie_2$ связан с рядом H формулой

$$F_{\mathcal{L}ie_2}(p_1, \dots, p_n, \dots; q) = \sum_{k \geq 1} a_k(q) p_k \circ H. \quad (22)$$

Отсюда формула для характера, указанная в формулировке основной теоремы, получается непосредственно (при вычислении коэффициента при каждом мономе реально не нужно ничего суммировать).

5.3.2. Операда $\mathcal{P}_2$. Заметим, что

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{P}_2}(p_1, \dots, p_n, \dots; q) &= F_{\mathcal{C}om \circ \mathcal{L}ie_2}(p_1, \dots, p_n, \dots; q) \\ &= F_{\mathcal{C}om}(p_1, \dots, p_n, \dots) \circ F_{\mathcal{L}ie_2}(p_1, \dots, p_n, \dots; q) \\ &= \left(\exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k} \right) - 1 \right) \circ F_{\mathcal{L}ie_2}(p_1, \dots, p_n, \dots; q). \end{aligned}$$

Мы опять сводим вычисление значений характера к подсчету многомерных вычетов. Положим $y_i = p_i \circ G$, $z_i = p_i \circ H$ (обозначения G , H введены выше). Замена переменных $p_i \mapsto y_i$ верхнетреугольна, а замена $y_i \mapsto z_i$ строго верхнетреугольна. Поэтому, чтобы выразить вычет формы, заданной в координатах $p_1, \dots, p_k$, через вычет формы в координатах $z_1, \dots, z_k$, надо вычислять произведение $\prod_{l=1}^k \partial p_l / \partial y_l$. Поскольку $-p_1 = \varepsilon(F_{\mathcal{C}om_2}) \circ G$, имеем

$$-p_k = p_k \circ (\varepsilon(F_{\mathcal{C}om_2}) \circ G) = F_{\mathcal{C}om_2}(-y_k, \dots, -y_{kn}, \dots; q^k)$$

и потому $\frac{\partial p_k}{\partial y_k} = \left(\frac{\partial}{\partial p_1} F_{\mathcal{C}om_2} \right)(-y_k, \dots, -y_{kn}, \dots; q^k)$.

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \text{Res} \frac{1}{p_1^{n_1+1} \dots p_k^{n_k+1}} F_{\mathcal{P}_2}(p_1, \dots, p_n, \dots; q) dp \\ = \text{Res} \left(\exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{y_k}{k} \right) - 1 \right) \prod_{l=1}^k \frac{(\frac{\partial}{\partial p_1} F_{\mathcal{C}om_2})(-y_l, \dots, -y_{ln}, \dots; q)}{(-F_{\mathcal{C}om_2}(-y_l, \dots, -y_{ln}, \dots; q))^{n_l+1}} dz. \end{aligned}$$

В терминах переменных z_i последний вычет можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\exp \left(\sum_{m \geq 1} d_m(q) z_m \right) - 1 \right) \\ \times \prod_{l=1}^k \left[\left(\frac{\exp((q^l - q^{-l})z_l) - 1}{q^l - q^{-l}} \exp \left(- \sum_{m \geq 1} c_m(q^l) z_{ml} \right) \right)^{-n_l-1} \right. \\ \left. \times \frac{q^l - q^{-l} \exp((q^l - q^{-l})z_l)}{q^l - q^{-l}} \exp \left(- \sum_{m \geq 1} c_m(q^l) z_{ml} \right) \right] dz. \end{aligned}$$

Таким образом, нужно вычислить разность вычетов

$$\begin{aligned} \text{Res} \prod_{m=1}^k \left[\exp \left(z_m (d_m(q) + \sum_{d|m} n_d c_{m/d}(q^d)) \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{\exp(z_m(q^m - q^{-m})) - 1}{q^m - q^{-m}} \right)^{-n_m-1} \frac{q^m - q^{-m} \exp(z_m(q^m - q^{-m}))}{q^m - q^{-m}} \right] dz \end{aligned}$$

и

$$\text{Res} \prod_{m=1}^k \left[\exp \left(z_m \sum_{d|m} n_d c_{m/d}(q^d) \right) \times \left(\frac{\exp(z_m(q^m - q^{-m})) - 1}{q^m - q^{-m}} \right)^{-n_m-1} \frac{q^m - q^{-m} \exp(z_m(q^m - q^{-m}))}{q^m - q^{-m}} \right] dz,$$

аналогичных рассмотренным в п. 5.3.1. Оказывается, что второй из них равен нулю, что немедленно дает формулу, приведенную нами выше.

§ 6. Мономиальный базис

С помощью формулы для размерности удается предъявить базис полилинейной части свободной алгебры над операдой $\mathcal{L}ie_2$. Мы используем следующий результат (который будет опубликован в [2]).

Предложение 10. Для множества $A = \{a_1, \dots, a_n, a_1 < \dots < a_n\}$ рекурсивно определим семейство мономов $\mathfrak{B}(A)$ в свободной алгебре с двумя согласованными скобками и множеством образующих A следующим образом.

- Для $A = \{a_1\}$ положим $\mathfrak{B}(A) = \{a_1\}$.
- Если $n > 1$, то моном b принадлежит $\mathfrak{B}(A)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:
 - 1) $b = \{a_i, b'\}_1$, где $i < n$, $b' \in \mathfrak{B}(A \setminus \{a_i\})$;
 - 2) $b = \{b_1, b_2\}_2$, где $b_1 \in \mathfrak{B}(A_1)$, $b_2 \in \mathfrak{B}(A_2)$ для некоторых A_1, A_2 , $A_1 \sqcup A_2 = A$, $a_n \in A_2$, причем либо $b_1 = a_i$ для некоторого i , либо b_1 получается применением скобки первого типа к двум базисным мономам от меньшего числа образующих.

Тогда $|\mathfrak{B}(A)| = |A|^{|A|-1}$ и линейная оболочка семейства $\mathfrak{B}(A)$ совпадает с полилинейной частью рассматриваемой свободной алгебры.

(Доказательство этого утверждения заключается в явной проверке того, что рассматриваемые мономы порождают полилинейную часть свободной алгебры, и в решении функционального уравнения на производящую функцию количеств элементов в построенных семействах мономов.)

Из формулы для размерности немедленно следует

Теорема 4. $\mathfrak{B}(A)$ — базис полилинейной части свободной алгебры с двумя согласованными скобками и множеством образующих A .

Следствие 3. Базис полилинейной части свободной бигамильтоновой алгебры с множеством образующих A составляют мономы $b_1 \star \dots \star b_k$, где $b_j \in \mathfrak{B}(A_j)$ (для всевозможных разбиений $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$ множества A ; порядок частей не важен, и можно для определенности считать, что множества A_i упорядочены по наименьшему элементу).

Доказательство. Согласно следствию 1, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{C}om \circ \mathcal{L}ie_2$, откуда (просто в силу определения композиции $\mathcal{S}$ -модулей) и следует доказываемое утверждение. $\square$

§ 7. Кратности неприводимых представлений

Здесь мы приводим некоторые результаты о структуре S_n -модулей в пространствах кратностей неприводимых представлений SL_2 и структуре SL_2 -мо-

дулей в пространствах кратностей неприводимых представлений S_n в пространствах $\mathcal{L}ie_2(n)$ и $\mathcal{P}_2(n)$. Мы используем следующие обозначения: $\mathbb{1} = \pi_n$ и $V = \pi_{n-1,1}$ обозначают соответственно тривиальное и симплициальное представления группы S_n , а $L(n)$ обозначает n -мерное неприводимое представление группы SL_2 .

7.1. S_n -кратности.

Предложение 11. *Имеют место изоморфизмы SL_2 -модулей*

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(\mathbb{1}, \mathcal{L}ie_2(n)) \simeq 0, \quad (23)$$

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(V, \mathcal{L}ie_2(n)) \simeq L(1)^{\otimes(n-1)}, \quad (24)$$

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(\mathbb{1}, \mathcal{P}_2(n)) \simeq L(0), \quad (25)$$

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(V, \mathcal{P}_2(n)) \simeq L(1) \oplus L(1)^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus L(1)^{\otimes(n-1)}. \quad (26)$$

Доказательство. Разберем подробно случай операды $\mathcal{L}ie_2$; случай операды $\mathcal{P}_2$ аналогичен. В качестве реализации представления $\mathcal{L}ie_2(n)$ мы будем использовать представление в полилинейной части свободной алгебры.

Рассмотрим сначала изоморфизм (23). Для выделения инвариантов представления воспользуемся проектором $\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$ из групповой алгебры симметрической группы. Достаточно проверить, что этот проектор аннулирует любой моном в свободной алгебре. Рассмотрим произвольный моном m ; пусть a_i и a_j — две образующие на максимальном уровне вложенности скобок. Разобьем все перестановки в формуле для проектора на пары $(\tau, \tau \cdot (ij))$. Ясно, что в результате применения этих перестановок к m мы получим два слагаемых, которые отличаются только знаком. Значит, проектор действует нулем, что и требовалось.

Перейдем к изоморфизму (24). Рассмотрим в S_n подгруппу S_{n-1} , сохраняющую n . Согласно закону взаимности Фробениуса, для любого представления T группы S_n

$$\mathrm{Hom}_{S_{n-1}}(\mathbb{1}, \mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} T) = \mathrm{Hom}_{S_n}(\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \mathbb{1}, T) = \mathrm{Hom}_{S_n}(\mathbb{1} \oplus V, T).$$

Применяя это утверждение к представлению $T = \mathcal{L}ie_2(n)$, куда тривиальное представление не входит, получаем

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(V, \mathcal{L}ie_2(n)) = \mathrm{Hom}_{S_{n-1}}(\mathbb{1}, \mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \mathcal{L}ie_2(n)).$$

Найдем инварианты S_{n-1} в пространстве $\mathcal{L}ie_2(n)$. Как и выше, для нахождения инвариантов мы используем проектор из групповой алгебры. Такой проектор аннулирует любой моном, в котором участвует скобка образующих a_i и a_j с $i, j < n$. Поэтому в инвариант могут входить с ненулевыми коэффициентами только левонормированные коммутаторы, в которых на максимальном уровне вложенности есть образующая a_n . Все такие коммутаторы — базисные мономы. Для каждой скобочной структуры все соответствующие мономы должны входить с одинаковыми коэффициентами в силу инвариантности. Легко заметить, что SL_2 -характер пространства таких элементов равен характеру модуля $L(1)^{\otimes(n-1)}$, что и требовалось. $\square$

7.2. SL_2 -кратности.

Предложение 12. *Если основное поле алгебраически замкнуто, то имеют место изоморфизмы S_n -модулей (обозначения введены в разд. 5.1)*

$$\mathrm{Hom}_{SL_2}(L(n-1), \mathcal{L}ie_2(n)) \simeq \mathrm{Ind}_{H_n}^{S_n} \tau_n, \quad (27)$$

$$\mathrm{Hom}_{SL_2}(L(n-3), \mathcal{L}ie_2(n)) \simeq \bigoplus_{k=2}^{n-1} \mathrm{Ind}_{H_k}^{S_n} \tau_k, \quad (28)$$

$$\mathrm{Hom}_{SL_2}(L(n-1), \mathcal{P}_2(n)) \simeq \mathrm{Ind}_{H_n}^{S_n} \tau_n. \quad (29)$$

Доказательство. Используем формулы для характера. Заметим, что значение S_n -характеров рассматриваемых модулей очевидным образом связано со значениями $SL_2 \times S_n$ -характера операды $\mathcal{L}ie_2$: характер представления в пространстве $\mathrm{Hom}_{SL_2}(L(n-1), \mathcal{L}ie_2(n))$ равен коэффициенту при q^{n-1} , а сумма характера представления в пространстве $\mathrm{Hom}_{SL_2}(L(n-1), \mathcal{L}ie_2(n))$ и характера представления в пространстве $\mathrm{Hom}_{SL_2}(L(n-3), \mathcal{L}ie_2(n))$ равна коэффициенту при q^{n-3} . Это следует из того, что $n-1$ и $n-3$, очевидно, являются максимальными весами в SL_2 -модуле $\mathcal{L}ie_2(n)$.

Заметим, что степень лорановского многочлена $c_s(q)$ равна s при $s = 1$ и не превосходит $s-2$ при остальных s . Поэтому степень по q коэффициента при $p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ формального степенного ряда $H(p_1, \dots, p_n, \dots)$ из (21) равна $n_1 - 1 + \sum_{s \geq 1} (s(n_s - 1) + n_s - 2k_s)$ для некоторых целых положительных k_s , что равно $-1 + \sum_{s \geq 1} sn_s - 2 \sum_{s \geq 1} k_s = n - 1 - 2 \sum_{s \geq 1} k_s$. Поэтому в случае $L(n-1)$ нам надо рассматривать только вклад в $F_{\mathcal{L}ie_2(n)}$ коэффициента при p_1^n в H , а в случае $L(n-3)$ — еще вклад в $F_{\mathcal{L}ie_2(n)}$ коэффициента при $p_1^{n-s_{n_s}} p_s^{n_s}$. Заметим, что в формуле для $F_{\mathcal{L}ie_2(n)}$ слагаемые, отвечающие применению плетизма с p_i к $p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, имеют степень $i(-1 + \sum_{s \geq 1} sm_s - 2 \sum_{s \geq 1} k_s) + i - 1 = \sum_{s \geq 1} ism_s - 2i \sum_{s \geq 1} k_s - 1$. Поэтому вклад в коэффициент при q^{n-3} вносят только те слагаемые, где вычисляется плетизм с p_1 , т. е. слагаемые из H .

Чтобы проверить формулу (27), осталось заметить, что векторы максимального веса в нашем представлении отвечают мономам, в которых все скобки одинаковы, и потому применима теорема Клячко.

Для доказательства формулы (28) заметим, что доказываемое утверждение с учетом формулы (27) эквивалентно тому, что коэффициент при q^{n-3} в $F_{\mathcal{L}ie_2(n)}$ равен характеру представления $\bigoplus_{k=2}^n \mathrm{Ind}_{H_k}^{S_n} \tau_k$. Поскольку $\mathrm{Ind}_{H_k}^{S_n} \tau_k \simeq \mathrm{Ind}_{S_k}^{S_n} \mathrm{Ind}_{H_k}^{S_k} \tau_k$, последний характер равен (в кольце симметрических функций) $\chi = \sum_{k=2}^n p_1^{n-k} F_{\mathcal{L}ie(k)}$. Для доказательства осталось проверить равенство всех коэффициентов нашей симметрической функции и χ , что легко вывести из явной формулы (21).

Утверждение об операде $\mathcal{P}_2$ очевидным образом следует из доказанного, поскольку старшие векторы веса $n-1$ в $\mathcal{P}_2(n)$ лежат в подпространстве $\mathcal{L}ie_2(n)$. $\square$

§8. Приложение: формальные степенные ряды и вычеты

В вычислениях у нас возникают формальные степенные ряды и ряды Лорана, в том числе от бесконечного числа переменных. В случае одной переменной

все обозначения и термины стандартны. Как обычно, если $f(z)$ — ряд Лорана, то вычетом формальной 1-формы $f(z) dz$ (который мы обозначаем через $\text{Res } f(z) dz$) мы называем коэффициент при $1/z$ ряда $f(z)$.

В наших вычислениях многократно встречаются вычеты специального вида, вычисленные в следующей лемме.

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$\text{Res } \frac{\exp(az)}{(\exp(bz) - 1)^n} dz = \frac{(a-b)(a-2b)\dots(a-(n-1)b)}{b^n(n-1)!}.$$

Доказательство. Заметим, что при $n > 1$

$$\frac{\exp(az)}{(\exp(bz) - 1)^n} dz = \frac{\exp((a-b)z)}{b(1-n)} \cdot d\left(\frac{1}{(\exp(bz) - 1)^{n-1}}\right).$$

Поскольку вычет точной формы равен нулю, получаем

$$\text{Res } \frac{\exp(az)}{(\exp(bz) - 1)^n} dz = \frac{a-b}{b(n-1)} \text{Res } \frac{\exp((a-b)z)}{(\exp(bz) - 1)^{n-1}} dz,$$

и итерация этого соотношения с учетом формулы $\text{Res } \frac{\exp(cz)}{\exp(bz)-1} dz = \frac{1}{b}$ дает требуемое. $\square$

В случае бесконечного числа переменных возникающие у нас формальные степенные ряды лежат в пополнении кольца симметрических функций. Все возникающие ряды Лорана имеют вид $f(p_1, \dots, p_n, \dots)/(p_1 \cdots p_k)^N$ (для всевозможных натуральных N, k), где f — формальный степенной ряд. Для ряда Лорана g определим вычет формальной дифференциальной формы $g(p_1, \dots, p_n, \dots) dp_1 \cdots dp_k$ как коэффициент ряда g при $1/(p_1 \cdots p_k)$. В случае бесконечного числа переменных формула преобразования вычета при замене переменных нам потребуется в следующей форме (фактически не использующей бесконечномерность):

Предложение 13. *Предположим, что ряд Лорана f содержит переменные p_i с $i > k$ только в неотрицательных степенях. Рассмотрим замену переменных*

$$p_s \mapsto a_s(t_1, \dots, t_n, \dots) = t_s g_s(t_1, \dots, t_n, \dots), \quad s \geq 1,$$

где все g_s — формальные степенные ряды с $g_s(0, \dots, 0, \dots) \neq 0$. Тогда

$$f(p_1, \dots, p_n, \dots) dp_1 \cdots dp_k = f(a_1, \dots, a_n, \dots) \det \left(\frac{\partial a_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=1, \dots, k} dt_1 \cdots dt_k.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать равенство выражений, получающихся при подстановке $p_l = t_l = 0$ для всех $l > k$. После этого все сводится к формулам для конечномерных вычетов. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. А. Берштейн, *Частное сообщение*, 2004.
- [2] М. А. Берштейн, В. В. Доценко, А. С. Хорошкин, *Квадратичные алгебры, связанные с бигамильтоновой операдой*, готовится к печати.
- [3] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика*, Мир, М., 1998.
- [4] А. А. Клячко, *Элементы Ли в тензорной алгебре*, Сиб. матем. ж., **15:6** (1974), 1296–1304.

- [5] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [6] В. А. Смирнов, *Симплициальные и операдные методы в теории гомотопий*, Факториал Пресс, М., 2002.
- [7] Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Мир, М., 1990.
- [8] А. С. Хорошкин, *Кошулевы операды и дистрибутивные решетки*, готовится к печати.
- [9] A. Björner, M. Wachs, *On lexicographically shellable posets*, Trans. Amer. Math. Soc., **277**:1 (1983), 323–341.
- [10] A. J. Brandt, *The free Lie ring and Lie representations of the full linear group*, Trans. Amer. Math. Soc., **56**:3 (1944), 528–536.
- [11] F. Chapoton, B. Vallette, *Pointed and multi-pointed partitions of types A and B*, J. Algebraic Combin., **23**:4, 295–316; <http://arxiv.org/math.QA/0410051>.
- [12] B. Fresse, *Koszul duality of operads and homology of partition posets*, Contemp. Math., **346** (2004), 115–215.
- [13] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J., **76**:1 (1994), 203–272.
- [14] M. Haiman, *Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane* <http://arxiv.org/math.AG/0201148>.
- [15] M. Markl, *Distributive laws and Koszulness*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **40**:2 (1996), 307–323; <http://arxiv.org/hep-th/9409192>.
- [16] M. Markl, S. Shnider, J. D. Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 96, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2002.
- [17] B. Vallette, <http://arxiv.org/math.AT/0405312>.

Независимый московский университет
e-mail: vladimir.dotsenko@gmail.com

Институт теоретической и экспериментальной физики
e-mail: khorosh@itep.ru

Поступило в редакцию
1 ноября 2005 г.