Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, О спектре векторного оператора Шрёдингера, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 1, 39–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:58:17

О спектре векторного оператора Шрёдингера*

© 2007. Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко

Памяти Марка Григорьевича Крейна

§1. Введение. Изложение результатов

А. Оператор Штурма–Лиувилля. Пусть $L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$ — стандартное гильбертово пространство квадратично интегрируемых вектор-функций $y(x)$, $x \geq 0$. Пусть дана непрерывная функция $x \mapsto Q(x)$, $x \geq 0$, значения которой — эрмитовы операторы в $\mathbb{C}^n$, причем $Q(x) \geq 0$, $x \geq 0$.

Рассмотрим симметрический оператор L , полученный как замыкание оператора, который определен выражением

$$(ly)(x) = -y''(x) + Q(x)y(x), \quad x \geq 0, \quad (1)$$

на пространстве вектор-функций $y(x)$ класса гладкости C^2 , удовлетворяющих условию $y(0) = 0$ и обращающихся в нуль при достаточно больших x . Известно, что оператор L самосопряжен; это следует из общей теоремы В. Б. Лидского о признаках самосопряженности дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций [1].

Для любого оператора $S = S^*$ с дискретным ограниченным снизу спектром $\{\lambda_k, k = 1, \dots\}$ введем «считающую» функцию $N(S, \lambda) = \max\{k : \lambda_k \leq \lambda\}$. Для скалярного оператора Штурма–Лиувилля (в этом случае мы обозначаем потенциал через $q(x)$) будем обозначать эту функцию через $N^q(\lambda)$.

Мы обращаемся к старой теме — асимптотике «считающей» функции для указанного оператора L (в предположении дискретности спектра). При $n = 1$ круг вопросов, связанных с дискретным спектром, основательно изучен. Согласно известному результату А. М. Молчанова (см. [2]), дискретность спектра равносильна условию

$$\int_c^{c+h} q(x) dx \rightarrow +\infty \quad \text{при } c \rightarrow +\infty \text{ для любого } h > 0.$$

Для краткости назовем это соотношение *условием Молчанова*.

В ряде работ рассматривалось асимптотическое распределение спектра (ограничимся ссылкой на книгу [3, гл. 7]). Основной результат состоит в том, что при «достаточно правильном» поведении функции $q(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ справедливо соотношение

$$N^q(\lambda) \simeq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{(\lambda - q(x))_+} dx, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

*Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 05-01-00001. Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 05-01-00989 и грантом НШ 5247.2005.1.

При $n > 1$ аналогичные результаты получены при достаточно жестких ограничениях. Эти результаты формулируются в терминах функций $q_1(x) \leq \dots \leq q_n(x)$ — собственных значений оператора $Q(x)$. Этой теме посвящены, в частности, работы [6], [7]. В работах [4], [5] изучен и более сложный случай $n = \infty$, которого мы не будем касаться.

Прежде чем излагать результаты настоящей работы, зафиксируем следующий (используемый далее) способ задания функции $x \mapsto Q(x)$, $x \geq 0$ (потенциала). Пусть даны функции $q_k(x) \geq 0$ и вектор-функции $e_k(x)$, $x \geq 0$, $k = 1, \dots, n$, такие, что $\{e_k(x)\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$ для любой точки $x \geq 0$, причем все указанные функции гладкие (класса C^2); таким образом, мы не требуем, чтобы величины $q_k(x)$ были «упорядочены по неубыванию». Этим данным $\{q_k(x), e_k(x)\}$ поставим в соответствие функцию $Q(x)$, $x \geq 0$, по правилу $Q(x)e_k(x) = q_k(x)e_k(x)$, $k = 1, \dots, n$. (Мы оставляем в стороне вопрос о множестве потенциалов, представимых в такой форме.)

Обратимся теперь к оператору L . Некоторые простые сведения о его спектре можно получить из рассмотрения функций $q^-(x) = \min\{q_k(x), k = 1, \dots, n\}$ и $q^+(x) = \max\{q_k(x), k = 1, \dots, n\}$, $x \geq 0$. Нетрудно показать (повторяя рассуждения из упомянутой работы Молчанова), что для дискретности спектра достаточно выполнения условия Молчанова для функции q^- . С другой стороны, условие Молчанова для функции q^+ необходимо для дискретности спектра (в частности, в случае потенциала, равномерно ограниченного на $[0, +\infty)$, спектр не может быть дискретным). В упомянутых выше работах [4], [5] дискретность спектра обеспечивалась именно благодаря первому из этих условий, а асимптотика спектра определялась функциями $q_k(x)$.

В приведенной ниже теореме 1 показано, что в этих вопросах играют роль не только указанные $\{q_k(x)\}$, но также соответствующие собственные векторы $\{e_k(x)\}$ оператора $Q(x)$. Этот эффект проявляется особенно отчетливо в случае, когда $Q(x)$ — одномерный оператор для всех $x \geq 0$; таким образом, $Q(x)$ имеет единственный собственный вектор $e(x)$ с отличным от нуля (неотрицательным) собственным значением $q(x)$. В этом случае введенная выше функция $q^-(x)$ обращается в нуль тождественно; однако благодаря условию $q(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и «вращению» (единственного!) собственного вектора $e(x)$ может быть достигнута дискретность спектра оператора L . Асимптотика спектра (точнее, считающей функции $N(L, \lambda)$) также определяется ростом функции $q(x)$ и «скоростью вращения» вектора $e(x)$. (Описанная здесь ситуация рассмотрена ниже в теоремах 2 и 3.)

В теоремах 1–3 рассматривается асимптотика спектра; результаты относительно дискретности спектра получаются попутно. В теореме 4 рассматривается задача о дискретности спектра, естественным образом возникающая из сказанного выше: описать все непрерывные вектор-функции $e(x)$, $x \geq 0$, обладающие тем свойством, что для любой непрерывной функции $q(x)$, стремящейся к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, оператор Штурма–Лиувилля с потенциалом $v \mapsto Q(x)v = q(x)(v, e(x))e(x)$, $v \in \mathbb{C}^n$, имеет дискретный (и ограниченный снизу) спектр. Это свойство вектор-функции назовем свойством D . В теореме 4 мы сможем дать лишь довольно простые достаточные условия, обеспечивающие это свойство.

Переходим к подробному изложению результатов. Оказывается целесообразным различать случаи «умеренного вращения» собственных векторов оператора $Q(x)$ и «быстрого вращения» этих векторов. Начнем с первого случая.

В дальнейшем, имея положительные неубывающие функции $f_k(\lambda)$, $k = 1, 2$, $\lambda \geq 0$, будем писать $f_1(\lambda) \simeq f_2(\lambda)$, $\lambda \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует такое $h = h(\varepsilon)$, что $f_1((1 - \varepsilon)\lambda) \leq f_2(\lambda) \leq f_1((1 + \varepsilon)\lambda)$ при $\lambda > h$.

Теорема 1. Пусть $q_k(x) \geq 1$, $k = 1, 2, \dots$, и выполнены следующие условия:

- (a) $q'_j = o(q_j(\sqrt{q_j} + \sqrt{q_k}))$, $j \neq k$,
- (b) $(e'_j, e'_k) = o(\sqrt{q_j q_k})$, $j \neq k$,
- (c) $(e_j, e'_k) = o(\sqrt{q_j} + \sqrt{q_k})$,
- (d) $(e_j, e''_k) = o(\sqrt{q_k}(\sqrt{q_j} + \sqrt{q_k}))$, $j \neq k$,

при $x \mapsto +\infty$.

Тогда

$$N(L, \lambda) \simeq \sum_{k=1}^n N^{q_k + |e'_k|^2}(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

если скалярные операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами $q_k + |e'_k|^2$ имеют дискретный спектр.

(Напомним, что $N^{q_k + |e'_k|^2}(\lambda)$ — это «считающая» функция для спектра скалярного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $q_k + |e'_k|^2$.)

Особо рассмотрим случай $n = 2$; при этом ограничимся случаем вещественных вектор-функций $e_k(x)$, $k = 1, 2$. Пусть $e_1(x) = (\cos \phi(x), \sin \phi(x))$, $e_2(x) = (-\sin \phi(x), \cos \phi(x))$ — собственные векторы и $q_1(x)$, $q_2(x)$ — соответствующие собственные значения оператора $Q(x)$. Тогда указанное в теореме 1 ограничение (b) выполняется тривиальным образом, а ограничения (a), (c) и (d) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} q'_k &= o(q_k(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})), \quad \phi' = o(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}), \\ \phi'' &= o(\sqrt{q_k}(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

При этих условиях теорема 1 дает соотношение

$$N(L, \lambda) \simeq N^{q_1 + (\phi')^2}(\lambda) + N^{q_2 + (\phi')^2}(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Перейдем к случаю «быстрого вращения» собственных векторов. Чтобы отделить основную идею дальнейшего, ограничимся следующим («экстремальным») случаем: оператор $Q(x)$ имеет ранг 1 при каждом $x \geq 0$; таким образом, он имеет единственный (с точностью до множителя) собственный вектор с ненулевым (точнее, положительным) собственным значением. Для изучения этого случая понадобятся некоторые приготовления.

Для любого отрезка Δ и функции $f \in C(\Delta)$ введем следующую норму: $\|f\|_* = \sup \left| \int_{\Delta'} f(x) dx \right|$; здесь Δ' пробегает все отрезки, лежащие в Δ . В случае необходимости пишем $\|f\|_{*, \Delta}$. Отметим неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) y(x) dx \right| \leq \|f\|_* \int_{\Delta} |y'(x)| dx, \quad f \in C(\Delta), \quad y \in C_0^\infty(\Delta); \quad (6)$$

оно получается немедленно интегрированием по частям.

Введенная сейчас норма $\| \cdot \|_*$ очевидным образом переносится на функции с векторными (и операторными) значениями. Введем также обычные нормы

$$\|f\|_{\infty, \Delta} = \max\{|f(x)|, x \in \Delta\}, \quad \|f\|_{1, \Delta} = \int_{\Delta} |f(x)| dx.$$

Вернемся к упомянутой выше функции $x \mapsto Q(x)$, такой, что $Q(x)$ имеет ранг 1 для всех $x \geq 0$. Для дальнейшего целесообразно записать ее в виде $Q(x) = q(x)R(x)$, где $q(x) \geq 1$, а $R(x)$ определяется вектор-функцией $l(x)$ по формуле $R(x)v = (v, l(x))l(x)$, $v \in \mathbb{C}^n$ (функции $x \mapsto q(x)$ и $x \mapsto l(x)$ предполагаются непрерывными).

Теорема 2. Пусть $A = A^*$ — оператор в $\mathbb{C}^n$, а $\{a_k, k = 1, \dots, n\}$ — его собственные числа, причем $a_k > 0$, $k = 1, \dots, n$. Предположим, что для некоторого $b > 0$ функция $x \mapsto R(x)$ удовлетворяет условию

$$\|\sqrt{q}\|_{\infty, \Delta} \|R - A\|_{*, \Delta} \rightarrow 0, \quad (7)$$

когда отрезок Δ длины b уходит в бесконечность.

Предположим также, что

$$q'(x) = O(q^{3/2}(x)), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Тогда

$$N(L, \lambda) \simeq \sum_{k=1}^n N^{a_k q}(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

если оператор Штурма–Лиувилля с потенциалом q имеет дискретный спектр.

Следующее предложение дает примеры последовательностей «быстро колеблющихся» функций, сходящихся (относительно нормы $\|\cdot\|_*$) к константам; это предложение послужит источником примеров к теореме 2.

Предложение 1. Пусть даны T -периодическая функция $x \mapsto f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, суммируемая в $[0, T]$, $T^{-1} \int_{[0, T]} f(x) dx = a$, и гладкая функция $x \mapsto w(x)$, $x \geq 0$, причем $w'(x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Положим $f^\circ(x) = f(w(x))$ и возьмем отрезок $\Delta = [c_1, c_2]$. Тогда

$$\|f^\circ - a\|_{*, \Delta} \leq 8 \frac{\|f\|_{1, \Delta}}{w'(c_1)}. \quad (10)$$

Используем это предложение для построения функций $Q(x) = q(x)R(x)$, $x \geq 0$, удовлетворяющих условиям теоремы 2. Возьмем T -периодическую непрерывную вектор-функцию $x \mapsto l(x) = (l^1(x), \dots, l^n(x))$, такую, что матрица $A = (a_{jk})$, $a_{jk} = \int_{[0, T]} l^j(x) \overline{l^k(x)} dx$, невырождена. Возьмем, далее, функцию $x \mapsto w(x)$ из предложения 1 и непрерывную функцию $x \mapsto q(x)$, такую, что $q(x) = o((w'(x))^2)$, $x \rightarrow \infty$. Пусть $Q(x) = (q_{jk}(x))$, $q_{jk}(x) = q(x) l^j(w(x)) \overline{l^k(w(x))}$. Из предложения 1 следует, что для этой функции выполнено условие (7); таким образом, для соответствующего оператора L выполнено соотношение (9).

Рассмотрим подробнее следующий частный случай: $n = 2$ и $Q(x)$ — оператор ранга 1 для всех $x \geq 0$. Точнее, предположим, что $e_1(x) = (\cos \phi(x), \sin \phi(x))$, $e_2(x) = (-\sin \phi(x), \cos \phi(x))$ — собственные векторы для $Q(x)$ с собственными значениями $q(x) \geq 1$ и 0 соответственно, причем $\phi(x)$, $q(x)$ — функции класса гладкости C^2 . Таким образом,

$$Q(x) = q(x) \begin{pmatrix} \cos^2 \phi(x) & \cos \phi(x) \sin \phi(x) \\ \sin \phi(x) \cos \phi(x) & \sin^2 \phi(x) \end{pmatrix}.$$

Теоремы 1 и 2 дают такой результат:

Теорема 3. 1) Если $q' = o(q^{3/2})$, $\phi' = o(\sqrt{q})$ и $\phi'' = o(\sqrt{q})$, $x \rightarrow +\infty$, то

$$N(L, \lambda) \simeq N^{(\phi')^2}(\lambda) + N^q(\lambda) \quad (11)$$

при условии, что операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами q и $(\phi')^2$ имеют дискретный спектр.

2) Если $q' = O(q^{3/2})$, $\phi' \uparrow +\infty$ и $q = o((\phi')^2)$, $x \rightarrow +\infty$, то

$$N(L, \lambda) \simeq 2N^{q/2}(\lambda) \quad (12)$$

при условии, что оператор Штурма–Лиувилля с потенциалом q имеет дискретный спектр.

Таким образом, теорема 3 охватывает два «крайних» случая $\sqrt{q} = o(\phi')$ и $\phi' = o(\sqrt{q})$. Вопрос об асимптотике считающей функции для функций $\sqrt{q}$ и ϕ' , имеющих одинаковый порядок при $x \rightarrow +\infty$, остается нерешенным.

Сейчас мы несколько уточним утверждение 1) этой теоремы при некоторых дополнительных ограничениях. Предположим, что $q \uparrow +\infty$, $\phi' \uparrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$ и что функции q_1 и ϕ_1 , обратные к функциям q и ϕ' , удовлетворяют условию

$$q_1(t) = o(\phi_1(t)), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Предположим также, что для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом q считающая функция удовлетворяет соотношению (2); пусть аналогичное соотношение выполняется и для потенциала $(\phi')^2$.

Следствие 1. При этих условиях справедливо соотношение

$$N(L, \lambda) \simeq N^{(\phi')^2}(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

Таким образом, в случае 1 этой теоремы («медленное вращение» собственных векторов $e_1(x)$, $e_2(x)$) асимптотика считающей функции $N(L, \lambda)$ определяется в основном «скоростью вращения» $\phi'(x)$. В случае 2 («быстрого вращения») эта асимптотика зависит только от $q(x)$.

Заметим, что случай $n = 2$ изучен другим способом (оценки следа резольвенты) в [11]; однако этот способ дает содержательные результаты лишь при достаточно жестких ограничениях.

Наконец, обратимся к упомянутой выше задаче о вектор-функциях со свойством D . Зафиксируем вектор-функцию $e(x)$, $x \geq 0$, $|e(x)| = 1$, и рассмотрим оператор L , заданный потенциалом $v \mapsto Q(x)v = q(x)(v, e(x))e(x)$ с произвольной неотрицательной функцией $q(x)$, $x \geq 0$. Требуется наложить ограничения на указанную вектор-функцию, при которых L имеет дискретный (положительный) спектр для любой функции $q(x)$, стремящейся к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Введем форму $v \mapsto |\Delta|^{-1} \int_{\Delta} |(v, e(x))|^2 dx$, $v \in \mathbb{C}^n$, для любого интервала $\Delta \subset [0, +\infty)$. Ее можно задать также равенством $v \mapsto (S_{\Delta}v, v)$, $S_{\Delta} = |\Delta|^{-1} \int_{\Delta} P(x) dx$, где $P(x)$ — проектор вида $v \mapsto (v, e(x))e(x)$. Обозначим через $\varkappa(\Delta)$ наименьшее значение указанной формы на сфере $|v| = 1$ (это наименьшее собственное значение $\lambda_1(S_{\Delta})$ оператора S_{Δ}).

Теорема 4. Пусть для любого $A > 0$ существует такое $h > 0$, что $\varkappa(\Delta) \geq Ah^2$ для всех интервалов вида $\Delta = (c, c+h)$ с достаточно большим c . Тогда вектор-функция $e(x)$, $x \geq 0$, обладает свойством D .

Следствие 2. Пусть $n = 2$ и вектор-функция $e(x)$ вещественна. Пусть $|e'(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, а функция $|e''(x)|$, $x \geq 0$, ограничена. Тогда имеет место свойство D .

Следствие 3. Пусть дана T -периодическая вектор-функция $g(x) = (g^1(x), \dots, g^n(x))$, $x \geq 0$, и матрица $G = (g_{jk})$, $g_{jk} = \int_{[0,T]} g^j(x) \bar{g}^k(x) dx$, невырожденна. Пусть положительная функция $w(x)$, $x \geq 0$, удовлетворяет условию $w'(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда вектор-функция $e(x) = g(w(x))$, $x \geq 0$, обладает свойством D .

В. Оператор Шрёдингера. Переходя к оператору Шрёдингера, ограничимся аналогом теоремы 2 (теорема 1 легко переносится на оператор Шрёдингера). Возьмем функцию $x \mapsto q(x)$ и вектор-функцию $x \mapsto l(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$; обе функции гладкие. Введем по аналогии с разд. А операторы $R(x)$, действующие по формуле $v \mapsto R(x)v = (v, l(x))l(x)$, $v \in \mathbb{C}^n$. Рассмотрим самосопряженный оператор L , полученный как замыкание оператора, заданного выражением

$$(ly)(x) = -\Delta y(x) + q(x)R(x)y(x), \quad y \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n).$$

Наша цель — асимптотическая оценка функции $N(L, \lambda)$. Считаящую функцию для скалярного оператора Шрёдингера с потенциалом $x \mapsto q(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, обозначим через $N^q(\lambda)$. Напомним, что

$$N^q(\lambda) \simeq v_m(2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} (\lambda - q(x))_+^{m/2} dx, \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (15)$$

(здесь v_m — объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$) при некоторых ограничениях на потенциал q [2, гл. 17].

Предварительно введем аналог нормы $\| \cdot \|_*$ для функций от m переменных; неравенство (6) подсказывает, как это сделать. Для любой компактной области $V \subset \mathbb{R}^m$ (с хорошей границей) и функции $f \in C(V)$ положим

$$\|f\|_{*,V} = \sup \left\{ \frac{|\int_V f(x)y(x) dx|}{\int_V |\nabla y(x)| dx}, y \in C_0^\infty(V), y \neq 0 \right\}.$$

(Это одна из модификаций соболевских норм.)

Нам понадобится простое неравенство, связывающее нормы $\| \cdot \|_*$ в одномерном и многомерном случаях. Возьмем непрерывную функцию $f(x)$, $x \in \Delta = [c_1, c_2]$. Определим в шаровом слое $D = D(c_1, c_2) = \{x \in \mathbb{R}^m : c_1 \leq |x| \leq c_2\}$ функцию $\check{f}(x) = f(|x|)$, $x \in D$.

Предложение 2. Справедливо неравенство

$$\|\check{f}\|_{*,D} \leq 2 \|f\|_{*,\Delta}. \quad (16)$$

Это неравенство и предложение 1 приводят к простым примерам последовательностей «быстро колеблющихся» функций (от нескольких переменных), сходящихся к константам относительно нормы $\| \cdot \|_*$. Достаточно взять те же функции $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto w(x)$, $x \in \mathbb{R}$, которые были введены в предложении 1, и определить в упомянутом шаровом слое $D = D(c_1, c_2)$ функцию $x \mapsto f^\circ(x) = f(w(|x|))$, $x \in D$. Тогда

$$\|f^\circ - a\|_{*,D} \leq 16 \frac{\int_{c_1}^{c_2} |f(x)| dx}{w'(c_1)}.$$

Эти соображения будут использованы для построения примеров к следующей теореме 5.

Вернемся к оператору Шрёдингера L .

Теорема 5. Пусть $A = A^*$ — оператор в $\mathbb{C}^n$, а $\{a_k, k = 1, \dots, n\}$ — набор его собственных чисел, причем $a_k > 0$. Предположим, что для некоторого $b > 0$ функция $x \mapsto R(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\sqrt{q}\|_{\infty, V} \|R - A\|_{*, V} \rightarrow 0, \quad (17)$$

когда куб V со стороной b уходит в ∞ . Предположим также, что $|\nabla q(x)| = O(q^{3/2}(x))$, $|x| \rightarrow +\infty$.

Тогда

$$N(L, \lambda) \simeq \sum_{k=1}^n N^{a_k q}(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (18)$$

если оператор Шрёдингера с потенциалом q имеет дискретный спектр.

Предложения 1 и 2 позволяют построить примеры к теореме 4. Возьмем те же функции $l^1(x), \dots, l^n(x)$, $w(x)$, $x \geq 0$, и матрицу A , что описаны после предложения 1. Возьмем, далее, такую функцию $x \mapsto q(x) \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^m$, что $q(x) = o((w'(|x|)^2)$, $|x| \rightarrow \infty$. Тогда матричный потенциал $x \mapsto Q(x) = (q_{jk}(x))$, $q_{jk}(x) = q(x)l^j(w(|x|))\bar{l}^k(w(|x|))$, $x \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяет условиям теоремы 4, и, следовательно, соответствующая ей считающая функция имеет асимптотику (18). Чтобы привести простой явный пример такого рода, возьмем произвольные числа $b_1 > \dots > b_m > 0$ и функцию $q(x) = o(|x|^2)$ и рассмотрим матричный потенциал

$$Q(x) = (q_{jk}(x)), \quad q_{jk}(x) = q(x) \cos b_k |x|^2 \cos b_j |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда для соответствующего оператора L имеем $N(L, \lambda) \simeq nN^{q/2}(\lambda)$, если оператор Шрёдингера с потенциалом $q(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, имеет дискретный спектр.

§2. Доказательство теоремы 1

Напомним простые понятия и факты. Пусть в гильбертовом пространстве H даны два симметрических оператора A , B с общей областью определения, причем A полуограничен снизу. Говорят, что оператор B подчинен оператору A , если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $-\varepsilon A - cI \leq B \leq \varepsilon A + cI$ с некоторой постоянной $c = c(\varepsilon)$; говорят также, что форма $h \mapsto (Bh, h)$ подчинена форме $h \mapsto (Ah, h)$, $h \in H$. Нам понадобится следующее свойство таких операторов.

Предложение 3. Пусть замыкания операторов A , $A+B$ самосопряженны, положительны и имеют дискретный спектр. Тогда $N(A, \lambda) \simeq N(A+B, \lambda)$.

Действительно, из вариационного принципа для собственных значений вытекают неравенства $(1 - \varepsilon)\lambda_k(A) - c \leq \lambda_k(A+B) \leq (1 + \varepsilon)\lambda_k(A) + c$. Переходя к считающим функциям для операторов A и $A+B$, получаем требуемое.

Для доказательства теоремы 1 удобно перейти от L к соответствующей квадратичной форме

$$(Ly, y) = \int_0^\infty ((y', y') + (Qy, y)) dx. \quad (19)$$

Преобразуем последнюю форму следующим образом. Возьмем унитарную матрицу со столбцами $e_k(x)$. Тогда $U^*(x)Q(x)U(x) = D(x)$, где $D(x)$ — диагональная матрица с элементами $q_k(x)$ на диагонали. Введем матрицы-функции $A = U'^*U'$ и $B = U^*U'$ и запишем A в виде $A = A^0 + A^1$, где A^0 диагональна, а диагональные элементы матрицы A^1 равны нулю. Таким образом, $A = (a_{jk})$ и $B = (b_{jk})$, где $a_{jk} = (e'_j, e'_k)$ и $b_{jk} = (e_j, e'_k)$. Введем оператор $L_1 z = U^* L U z$; достаточно изучить его спектр, ибо он унитарно эквивалентен оператору L . Понадобится также оператор $L^0 y = -y'' + (D + A^0)y$ — прямая сумма скалярных операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами $q_k + |e'_k|^2$. Замена $y = U z$ приводит форму (19) к виду

$$(L_1 z, z) = (L^0 z, z) + (A^1 z, z) - 2 \operatorname{Re}(B z', z) dx. \quad (20)$$

Покажем, что две последние формы в этой сумме подчинены первой. Вторая форма получается интегрированием членов вида $a_{jk} z_j \bar{z}_k$, $j \neq k$. Согласно условию (b) теоремы 1, $a_{jk} = o(\sqrt{q_j q_k})$, откуда $a_{jk} z_j \bar{z}_k = \alpha_{jk} (q_j |z_j|^2 + q_k |z_k|^2)$ с некоторой функцией $\alpha_{jk} \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$. Заметим, что в первую форму из (20) также входят интегралы от $(q_j |z_j|^2 + q_k |z_k|^2)$. Отсюда видно, что вторая форма подчинена форме $(L^0 z, z)$.

Оценка третьей формы (это сумма слагаемых вида $b_{jk} z'_j \bar{z}_k$) менее тривиальна. Пусть сначала $j \neq k$. Положим $\varepsilon_{jk} = b_{jk}(\sqrt{q_j} + \sqrt{q_k})^{-1}$. Тогда

$$\int b_{jk} z'_j \bar{z}_k = \int \varepsilon_{jk} \sqrt{q_k} z'_j \bar{z}_k dx - \int \varepsilon_{jk} \sqrt{q_j} z_j \bar{z}'_k dx - \int (\varepsilon_{jk} \sqrt{q_j})' z_j \bar{z}_k dx \quad (21)$$

(применяется интегрирование по частям). Покажем, что каждое слагаемое в последней сумме подчинено форме $(L^0 z, z)$. Действительно,

$$|\varepsilon_{jk} \sqrt{q_k} z'_j \bar{z}_k| \leq |\varepsilon_{jk}| (|z'_j|^2 + q_k |z_k|^2).$$

Заметим, что второй сомножитель в последнем произведении входит также в форму $(L^0 z, z)$ из (20). Согласно условию (c), $\varepsilon_{jk} = o(1)$, $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, рассматриваемое слагаемое подчинено форме $(L^0 z, z)$. Аналогично, второе слагаемое из (21) также подчинено форме $(L^0 z, z)$. Осталось рассмотреть последнее слагаемое из (21). Оно имеет то же строение, что рассмотренный уже интеграл от $a_{jk} z_j \bar{z}_k$, и оценивается при помощи тех же рассуждений. Чтобы повторить их, достаточно проверить, что $(\varepsilon_{jk} \sqrt{q_j})' = o(\sqrt{q_j q_k})$. Это равносильно соотношению

$$\left(\frac{b_{jk} \sqrt{q_j}}{\sqrt{q_j} + \sqrt{q_k}} \right)' = o(\sqrt{q_j q_k}),$$

которое сразу следует из условий (a), (c), (d) теоремы 1.

Наконец, слагаемые вида $b_{kk} z'_k \bar{z}_k$ также подчинены форме $(L^0 z, z)$, что видно из п. (c) при $j = k$.

Итак, два последних слагаемых в (20) подчинены первому (т.е. форме $(L^0 z, z)$). Из предложения 3 следует, что $N(L, \lambda) \simeq N(L^0, \lambda)$, $\lambda \rightarrow +\infty$. Этим доказана теорема 1.

§3. Доказательство теоремы 2

Предварительно приведем «формулу локализации», указанную в [10] (она воспроизведена также в книге [8, гл. 1]) в виде, удобном для дальнейшего. Рас-

смотрим произвольный оператор вида (1). В этом месте удобнее считать, что он задан на всей прямой $\mathbb{R}$. Возьмем «разложение единицы» на $\mathbb{R}$ — набор функций $\{\phi_k(x), k \in \mathbb{Z}\}$ из пространства $C_0^\infty(\mathbb{R})$, таких, что $\sum_k \phi_k^2(x) = 1$. Их можно выбрать в виде $\phi_k(x) = \phi(x - k)$ с фиксированной функцией $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Будем считать, что $\phi_k \phi_j = 0$ при $|j - k| > 1$. Введем также функцию $x \mapsto \omega(x) = 2 \sum_k |\phi'_k(x)|^2$. Для любой функции $y \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ положим $y_k = y\phi^2$, $z_k = y\phi_k\phi_{k-1}$. Тогда справедливо равенство

$$(Ly, y) = \sum_k ((L - \omega)y_k, y_k) + 2 \sum_k ((L - \omega)z_k, z_k) \quad (22)$$

(«формула локализации»).

Вернемся к теореме 2. Положим $B(x) = q(x)(R(x) - A)$ и введем оператор $L_0 y(x) = -y''(x) + q(x)Ay(x)$ с тем же граничным условием $y(0) = 0$. Итак, $L = L_0 + B$, где оператор B определяется равенством $(By)(x) = B(x)y(x)$.

Лемма 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$ со следующим свойством: для любого отрезка Δ длины b выполняется неравенство

$$|(By, y)| \leq \varepsilon(L^0 y, y) + N(\varepsilon)(y, y), \quad y \in C_0^\infty(\Delta). \quad (23)$$

Доказательство. Положим $\tau_\Delta = \|\sqrt{q}\|_{\infty, \Delta} \|R - A\|_{*, \Delta}$. Согласно условию (7),

$$\tau_\Delta \rightarrow 0, \quad (24)$$

когда Δ уходит в $+\infty$, сохраняя при этом длину.

Учитывая неравенство (6), получаем

$$\begin{aligned} |(By, y)| &\leq \|R - A\|_* \int_\Delta |(qy, y)'| dx \\ &\leq \|R - A\|_* \int_\Delta (|q'(x)|y(x)|^2 + 2q(x)|y(x)||y'(x)|) dx. \end{aligned}$$

Используем условие (8) и применим неравенство Коши–Буняковского ко второму слагаемому в подынтегральной функции; получим

$$\begin{aligned} |(By, y)| &\leq M \|R - A\|_* \int_\Delta (q^{3/2}(x)|y(x)|^2 + 2q(x)|y(x)||y'(x)|) dx \\ &\leq M \tau_\Delta \int_\Delta (|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2) dx \leq M \tau_\Delta (L^0 y, y). \end{aligned}$$

(Здесь M — некоторая постоянная.)

Отсюда и из (24) видно, что неравенство (23) выполняется для достаточно далеко расположенных Δ (причем можно взять $N(\varepsilon) = 0$). Следовательно, при соответствующем выборе числа $N(\varepsilon)$ оно будет выполняться для всех отрезков длины b . Лемма доказана.

Лемма 2. Форма (By, y) подчинена форме $(L^0 y, y)$.

Это следует из леммы 1 и формулы локализации.

Завершим доказательство теоремы 2. Из леммы 2 и предложения 3 следует, что $N(L, \lambda) \simeq N(L_0, \lambda)$, $\lambda \rightarrow +\infty$. С другой стороны, оператор L_0 унитарно эквивалентен прямой сумме операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами $q(x)a_k$, $k = 1, \dots, n$. Этим доказана теорема 2.

§ 4. Доказательство предложения 1

Достаточно рассмотреть случай $a = 0$. Положим $b = \int_0^T |f(x)| dx$. Надлежит доказать, что

$$\|f\|_* \leq \frac{8b}{w'(c_1)}. \quad (25)$$

Возьмем функцию $t \mapsto x = w_1(t)$, обратную к функции w . Ясно, что $w_1 \uparrow +\infty$, $w'_1(t) = (w'(x))^{-1} \downarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Взяв числа $h_1 < h_2$ из отрезка $[c_1, c_2]$, преобразуем интеграл

$$I = \int_{h_1}^{h_2} f(w(x)) dx$$

заменой $w(x) = t$. Полагая $w(h_k) = s_k$, $k = 1, 2$, получим $I = \int_{s_1}^{s_2} f(t)w'_1(t) dt$. Чтобы оценить I , обозначим через L_k , $k = 1, 2$, наименьшее из целых чисел r со свойством $s_k \leq rT$ и рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_{L_1 T}^{(L_2+1)T} f(t)w'_1(t) dt.$$

Имеем неравенство

$$|I - I_1| \leq 3w'_1(s_1)b \quad (26)$$

(используется монотонное убывание функции w'_1). Используя T -периодичность функции f , мы можем привести интеграл I_1 к виду $\int_0^T f(u)A(u) du$, где $A(u) = \sum_{k=L_1}^{L_2} w'_1(kT + u)$. Так как функция w'_1 монотонна, то стандартный способ оценки суммы при помощи интеграла приводит к формуле

$$A(u) = \int_{L_1}^{L_2} w'_1(vT + u) dv + r_1 = T^{-1}(w_1(L_2 T + u) - w_1(L_1 T + u)) + r_1,$$

где $|r_1| \leq |w'_1(s_1)|$. В последнем выражении заменим $L_k T + u$, $k = 1, 2$, на s_k , $k = 1, 2$, соответственно; оценим вызванное этой заменой изменение величины $A(u)$. Для этого заметим, что $|L_k T + u - s_k| \leq 2T$, $k = 1, 2$. Отсюда, снова используя монотонное убывание функции w'_1 , получаем, что $A(u) = T^{-1}(w_1(s_2) - w_1(s_1)) + r_2 = T^{-1}(h_2 - h_1) + r_2$, где $|r_2| \leq 5|w'_1(s_1)|$. Итак, $I_1 = \int_0^T f(u)(T^{-1}(h_2 - h_1) + r_2) du = \int_0^T f(u)r_2(u) du$ (здесь использовано равенство $a = 0$). Следовательно, $|I_1| \leq 5bw'_1(s_1)$. Отсюда и из неравенства (26) вытекает, что $|I| \leq 8bw'_1(s_1)$. Но так как $w'_1(s_1) = (w'(h_1))^{-1} \leq (w'(c_1))^{-1}$, то $|I| \leq 8b(w'(c_1))^{-1}$.

Теперь неравенство (25) следует из определения нормы $\|\cdot\|_*$. Предложение 1 доказано.

§ 5. Доказательство теоремы 3 и следствия 1

Для доказательства первого утверждения теоремы 3 применим теорему 1. Предварительно перейдем от потенциала $x \mapsto Q(x)$ к $x \mapsto Q_1(x) = Q(x) + (\cdot, e_2(x))$. Тогда собственными значениями матрицы $Q_1(x)$ будут $q(x)$ и 1 (с теми же собственными векторами $e_1(x)$ и $e_2(x)$). Ясно, что этот переход не влияет на асимптотику спектра оператора Штурма–Лиувилля. Легко видеть, что ограничения, указанные в первой части теоремы 3 (и переписанные для Q_1), — это

в точности условия (4), указанные после теоремы 1. Таким образом, теорема 1 приводит к соотношению

$$N(L, \lambda) \simeq N^{q+(\phi')^2}(\lambda) + N^{(\phi')^2}(\lambda).$$

Но $q + (\phi')^2 \simeq q$, $x \rightarrow \infty$ (в силу условия $(\phi')^2 = o(q)$), откуда следует, что $N^{q+(\phi')^2}(\lambda) \simeq N^q(\lambda)$. Это приводит к формуле (11).

Далее, из условий, перечисленных во второй части теоремы 3, вытекают условия, описанные после предложения 1. Таким образом, теорема 3 доказана.

Для доказательства следствия 1 понадобится небольшое приготовление.

Рассмотрим операторы Штурма–Лиувилля L_k , $k = 1, 2$, с потенциалами $q_k(x)$, $x \geq 0$. Предположим, что эти функции гладкие и строго возрастающие к $+\infty$ и что обратные к ним функции $p_k(y)$ удовлетворяют условию

$$p_2(y) = o(p_1(y)), \quad y \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

Пусть для считающих функций этих операторов выполнено соотношение (2).

Лемма 3. При указанных условиях справедливо соотношение

$$N^{q_2}(\lambda) = o(N^{q_1}(\lambda)), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (28)$$

Доказательство. Запишем соотношение (2) для операторов L_k и преобразуем интеграл заменой $q_k(x) = y$. Можно считать, что $p_k(0) = 0$. Интегрирование по частям приводит к соотношению

$$N^{q_k}(\lambda) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda p_k(y)(\lambda - y)^{-1/2} dy, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Теперь из соотношения (27) очевидным образом вытекает (28).

Вернемся к доказанной формуле (11). Применяя лемму 3 к потенциалам q и $(\phi')^2$, получаем, что $N^q(\lambda) = o(N^{(\phi')^2}(\lambda))$.

Это приводит к следствию 1.

§6. Доказательство теоремы 4 и следствий 2 и 3

Наши рассуждения близки к тем, которые были использованы в доказательстве упомянутой теоремы А. М. Молчанова (они воспроизведены, например, в [8]). Допустим, что для некоторой функции $q(x)$, $x \geq 0$, стремящейся к $+\infty$ при $x \rightarrow \infty$, спектр оператора L не дискретен. Тогда для любого $h > 0$ существуют такие отрезки Δ_k , $|\Delta_k| = h$, и такие функции $y_k \in C^2(\Delta_k)$, что

$$\int_{\Delta_k} |y_k(x)|^2 dx = 1, \quad \int_{\Delta_k} (|y'_k(x)|^2 + q(x)|y_k(x), e_k(x)|^2) dx \leq A,$$

где число A не зависит от h и k .

Так как $q(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, то $\int_{\Delta_k} |(y_k(x), e(x))|^2 dx = \varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Существуют такие точки $x_k \in \Delta_k$, что $|y_k(x_k)| = h^{-1/2}$. Отсюда следует, что $y_k(x_k) = h^{-1/2}v_k$, $|v_k| = 1$. Оценивая величину $|y_k(x) - y_k(x_k)| = |\int_{x_0}^x y'_k(t) dt|$ при помощи неравенства Коши–Буняковского, получаем равенство $y_k(x) = h^{-1/2}v_k + r(x)$, где $|r(x)| \leq (Ah)^{1/2}$. Поэтому $h^{-1} \int_{\Delta_k} |(v_k, e(x))|^2 dx \leq 2\varepsilon_k + 2Ah^2$ и, следовательно, $h^{-1} \int_{\Delta_k} |(v_k, e(x))|^2 dx \leq 4Ah^2$ для достаточно больших k . Но тогда $\varkappa(\Delta_k) \leq 4Ah^2$, что противоречит условиям теоремы 4.

Докажем следствие 2. Положим $M = \sup\{|e''(x)|, x \geq 0\}$. Оценим величину $\varkappa(\Delta)$ для отрезка $\Delta = (x_0 - r, x_0 + r)$. Имеем равенство $e(x) = e_0 + (x - x_0)e_1 + s(x)$, где $e_0 = e(x_0)$, $e_1 = e'(x_0)$, $|s(x)| \leq \frac{1}{2}Mr^2$. Будем считать число r достаточно малым, а x_0 достаточно большим; пусть, в частности, $2|e_1|^{-1} \leq r \leq M^{-1/2}$. Тогда, взяв вектор $v \in \mathbb{C}^n$, $|v| = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |(v, e(x))|^2 dx &\geq \frac{1}{2} \int_{-r}^r |(v, e_0) + t(v, e_1)|^2 - \int_{\Delta} |s(x)|^2 dx \\ &\geq |(v, e_0)|^2 r + 3^{-1} |(v, e_1)|^2 r^3 - 2^{-1} M^2 r^5. \end{aligned}$$

Рассмотрим правую часть этого соотношения. Заметим, что $(e_0, e_1) = 0$ и $r \leq 3^{-1}|e_1|^2 r^3$ (в силу указанных выше ограничений на r и e_1). Поэтому сумма первых двух слагаемых ограничена снизу величиной r . Далее, в силу упомянутых ограничений последнее слагаемое не превосходит $r/2$. В итоге, $\int_{\Delta} |(v, e(x))|^2 dx \geq r/2$, откуда следует, что $\varkappa(\Delta) \geq 1/4$. Таким образом, выполнены условия теоремы 4, и следствие доказано.

Докажем следствие 3. Рассмотрим операторы S_{Δ} , введенные перед формулировкой теоремы 4. Напомним, что $\varkappa(\Delta) = \lambda_1(S_{\Delta})$. Из предложения 1 вытекает, что $S_{\Delta} \rightarrow G$, если интервал Δ уходит в $+\infty$, сохраняя длину. Так как матрица G невырождена, то $\lambda_1(S_{\Delta}) \geq d$ с некоторой постоянной $d > 0$ для достаточно далеко расположенных интервалов. Отсюда следует, что выполнены условия теоремы 4. Этим доказано следствие 3.

§7. Доказательство теоремы 5

Предварительно приведем «формулу локализации» для оператора Шрёдингера $Ly = -\Delta y + Qy$. Возьмем функции $\psi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, такие, что ψ_k сосредоточена в области G_k с компактным замыканием, каждая точка из $\mathbb{R}^m$ принадлежит лишь конечному числу этих областей и выполняется равенство $\sum_k \psi_k^2(x) = 1$. Введем функцию $\omega = \sum_k |\nabla \psi_k|^2$. Для любой функции $y \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ положим $y_k = y\psi_k^2$, $y_{k,j} = y\psi_k\psi_j$. Тогда

$$(Ly, y) = \sum_k ((L - \omega)y_k, y_k) + \sum_{k,j} ((L - \omega)y_{k,j}, y_{k,j})$$

(Вторая сумма относится к парам областей G_k, G_j с непустым пересечением; заметим, что в книге [9, гл. 3] формула локализации приведена с грубой ошибкой: отсутствует упомянутая вторая сумма.)

Обратимся к теореме 5. Она доказывается по аналогии с теоремой 2 с использованием указанной «формулы локализации». Напомним, что при доказательстве теоремы 2 использовалось неравенство (6). В многомерном случае аналог этого неравенства вытекает из определения нормы $\|\cdot\|_*$.

§8. Доказательство предложения 2

Докажем неравенство (16). Для этого нам понадобятся первообразные $F_1(x) = \int_{c_1}^x f(t)t^{m-1} dt$ и $F_2(x) = \int_{c_1}^x f(t) dt$. Возьмем функцию $u \in C_0^\infty(D)$ и преобразуем интеграл

$$J = \int_D \check{f}(x)u(x) dx.$$

Для этого перейдем к сферическим координатам $x = r\omega$, где $r \in \Delta$, $\omega \in S^{m-1}$ (здесь S^{m-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$), и проинтегрируем по частям по r . Получим

$$|J| \leq \int_{\Delta \times S^{m-1}} |F_1(r)| |\nabla u(r\omega)| dr d\omega \leq \max\{|F_1(r)r^{-m+1}|, r \in [c_1, c_2]\} \int_D |\nabla u| dx.$$

Оценим первый сомножитель в правой части полученного неравенства. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} |F_1(r)r^{-m+1}| &= \left| r^{-m+1} \int_{c_1}^r f(t)t^{m-1} dt \right| \\ &= r^{-m+1} \left| F_2(r)r^{m-1} - F_2(c_1)c_1^{m-1} - (m-1) \int_{c_1}^r F_2(t)t^{m-2} dt \right| \\ &\leq 2 \max\{|F_2(t)|, t \in [c_1, c_2]\} \leq 2\|f\|_{*,\Delta}. \end{aligned}$$

Итак, $|J| \leq 2\|f\|_{*,\Delta} \int_D |\nabla u| dx$. Отсюда следует неравенство (16).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Б. Лидский, *О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений*, Докл. АН СССР, **95**:1 (1954), 217–220.
- [2] А. М. Молчанов, *Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка*, Труды ММО, **2** (1953), 169–200.
- [3] Е. С. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, т. 1, Мир, М., 1960.
- [4] Б. М. Левитан, Г. А. Суворченкова, *Достаточные условия дискретности спектра уравнения Штурма–Лиувилля с операторным коэффициентом*, Функц. анализ и его прил., **2**:2 (1968), 56–62.
- [5] А. Г. Костюченко, Б. М. Левитан, *Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма–Лиувилля*, Функц. анализ и его прил., **1**:1 (1967), 86–96.
- [6] А. Г. Костюченко, *Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов*, Докл. АН СССР, **168**:1 (1966), 21–24.
- [7] А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян, *Распределение собственных значений*, Наука, М., 1979.
- [8] И. М. Глазман, *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Физматгиз, М., 1963.
- [9] Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кириш, Б. Саймон, *Операторы Шрёдингера*, Мир, М., 1990.
- [10] Р. С. Исмагилов, *Об условиях полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов*, Докл. АН СССР, **140** (1961), 33–36.
- [11] Р. С. Исмагилов, *Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций*, Матем. заметки, **9**:6 (1971), 667–676.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
email: ismagil@serv.bmstu.ru

Поступило в редакцию
19 апреля 2006 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет