Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ткаченко, Разложения по собственным функциям связанные с одномерными периодическими дифференциальными операторами порядка $2n$, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 1, 66–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:38:35

Разложения по собственным функциям, связанные с одномерными периодическими дифференциальными операторами порядка $2n$

© 2007. В. ТКАЧЕНКО

Светлой памяти Б. Я. Левина посвящая

§1. Формулировка результатов

Хорошо известно (см. [1], а также [2]), что для каждого оператора Хилла

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad q(x) = q(x + \pi), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

с вещественным потенциалом $q(x)$ существует последовательность вещественных чисел

$$\mu_0 = \mu_0^- = \mu_0^+ < \mu_1^- \leq \mu_1^+ < \dots < \mu_k^- \leq \mu_k^+ < \dots,$$

такая, что спектр оператора L в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\sigma(L) = \bigcup_{k=0}^{\infty} [\mu_k^+, \mu_{k+1}^-].$$

В 1950 г. Титчмарш доказал ([1], см. также [2]), что каждая вещественная функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\mu_n^+}^{\mu_{n+1}^-} d\mu p(\mu) \left\{ \phi(\pi, \mu) \theta(x, \mu) g(\mu) - \theta'(\pi, \mu) \phi(x, \mu) h(\mu) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\phi'(\pi, \mu) - \theta(\pi, \mu)) \theta(x, \mu) h(\mu) + \frac{1}{2} (\phi'(\pi, \mu) - \theta(\pi, \mu)) \phi(x, \mu) g(\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\theta(x, \mu)$ и $\phi(x, \mu)$ — решения уравнения $(H - \mu I)y = 0$ с начальными условиями $\theta(0, \mu) = \phi'(0, \mu) = 1$, $\theta'(0, \mu) = \phi(0, \mu) = 0$ и где $p(\mu) = (4 - (\theta(\pi, \mu) + \phi'(\pi, \mu))^2)^{-1/2}$,

$$g(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x, \mu) f(x) dx, \quad h(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, \mu) f(x) dx.$$

Разложение (1.2) явно определяет спектральную матрицу оператора H и, в частности, показывает, что кратность спектра равна 2.

Мы рассматриваем произвольные периодические самосопряженные дифференциальные операторы

$$L = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d^j}{dx^j} p_j(x) \frac{d^j}{dx^j}, \quad p_j(x + \pi) = p_j(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

с вещественнозначными функциями $p_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, такими, что

$$P(L) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\pi |p_j^{(j)}(x)| dx < \infty. \quad (1.4)$$

Подобно спектрам операторов Хилла, спектры таких операторов в комплексном пространстве $L^2(\mathbb{R})$ имеют зонную структуру, но в отличие от случая операторов Хилла кратности спектров внутри одной спектральной зоны могут меняться. Используя общий резольвентный метод, предложенный Кодаирой и Спенсером, Данфорд и Шварц (см. [3, гл. XIII]) доказали формулу для спектральной матрицы оператора (1.3) на интервале постоянной кратности спектра. Позднее Храбустовский [5] использовал резольвентный подход для описания спектральных матриц общих периодических самосопряженных систем дифференциальных уравнений в весовых функциональных пространствах.

Наша цель состоит в получении формулы разложения, подобной формуле (1.2), для оператора (1.3), в выводе из нее явной формулы для спектральной матрицы этого оператора и в доказательстве того, что эта матрица определяет коэффициенты оператора однозначно. Наш подход основан на одном варианте преобразования Фурье, предложенном Гельфандом [4] для изучения периодических дифференциальных операторов.

Для того чтобы сформулировать наш основной результат, обозначим через $\{u_k(x, \mu)\}_{k=1}^{2n}$ фундаментальную систему решений уравнения

$$Ly - \mu y = 0, \quad (1.5)$$

нормированную начальными условиями

$$u_k^{(j)}(0, \mu) = \delta_{k-1,j}, \quad k = 1, \dots, 2n, \quad j = 0, \dots, 2n-1. \quad (1.6)$$

Пусть

$$U(\mu) = (u_k^{(j-1)}(\pi, \mu))_{k,j=1}^{2n} \quad (1.7)$$

— матрица монодромии оператора L . Ее собственные числа ρ являются решениями характеристического уравнения

$$\Delta(\mu, \rho) = 0, \quad (1.8)$$

где $\Delta(\mu, \rho) = \det(U(\mu) - \rho I)$, и называются множителями Флоке оператора L . Если $(v_1, \dots, v_{2n})^\top$ — собственный вектор, соответствующий собственному числу ρ , то все решения уравнения (1.5) определяются однозначно начальными условиями

$$y^{(j)}(0) = v_{j+1}, \quad j = 0, \dots, 2n-1,$$

обладают свойством «квазипериодичности»

$$y(x + k\pi) = \rho^k y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и называются решениями Флоке уравнения (1.5).

Следующее предложение хорошо известно в теории обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами, см. [3].

Теорема 1.1. *Спектр $\sigma(L)$ оператора (1.3) абсолютно непрерывен и совпадает с множеством всех тех чисел μ , для которых существует решение p уравнения (1.8) с $|\rho| = 1$.*

Положим

$$E(x; \mu, \rho) = \begin{vmatrix} u_1(x, \mu) & \dots & u_j(x, \mu) & \dots & u_{2n}(x, \mu) \\ u_1(\pi, \mu) - \rho & \dots & u_j(\pi, \mu) & \dots & u_{2n}(\pi, \mu) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(j-1)}(\pi, \mu) & \dots & u_j^{(j-1)}(\pi, \mu) - \rho & \dots & u_{2n}^{(j-1)}(\pi, \mu) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(2n-2)}(\pi, \mu) & \dots & u_j^{(2n-2)}(\pi, \mu) & \dots & u_{2n}^{(2n-2)}(\pi, \mu) \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

и

$$p(\mu, \rho) = |2\pi E(0; \mu, \rho^{-1}) \Delta'_\rho(\mu, \rho)|^{-1}. \quad (1.10)$$

Ниже мы увидим, что при подходящем выборе t и μ функции $E(x; \mu, e^{it})$ являются решениями Флоке, участвующими в спектральном разложении, порожденном оператором L . Что касается функции (1.10), то она задает нормирующие множители в таких разложениях.

Теорема 1.2. *Если ω_k , $k = 1, \dots, 2n$, — все значения корня $\sqrt[2n]{(-1)^n}$, то для каждого $k = 1, \dots, 2n$ существует решение $\rho_k(\mu)$ уравнения (1.8), непрерывное на вещественной оси и удовлетворяющее асимптотическому соотношению*

$$|\rho_k(\mu)| = e^{\operatorname{Re} \omega_k \lambda \pi} (1 + o(1)), \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (1.11)$$

Более того, решения $\rho_k(\mu)$ попарно различны и аналитичны в точках оси $\mathbb{R}$, за возможным исключением точек дискретного множества, которые группируются в пары, асимптотически приближающиеся к множеству

$$\mathcal{N} = \bigcup_{j=1}^{2n} \mathcal{N}_j, \quad \mathcal{N}_j = \{(-1)^j m^{2n} (\operatorname{Im} \omega_j)^{-2n}\}_{m=1}^{\infty}, \quad (1.12)$$

в которых некоторые из решений совпадают и теряют аналитичность.

Если мы положим

$$\sigma_k(L) = \{\mu \in \mathbb{R} : |\rho_k(\mu)| = 1\}, \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (1.13)$$

то получим

$$\sigma(L) = \bigcup_{k=1}^{2n} \sigma_k(L).$$

Обозначим через $\mathcal{H}_{2n}^2(L)$ гильбертово пространство комплекснозначных векторных функций $\Phi = (\phi_k(\mu))_{k=1}^{2n}$ на наборе множеств $(\sigma_k(L))_{k=1}^{2n}$ со скалярным произведением

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{k=1}^{2n} \int_{\sigma(L)} \chi_k(\mu) p(\mu, \rho_k(\mu)) \phi_k(\mu) \overline{\psi_k(\mu)} d\mu,$$

где $\chi_k(\mu)$ — характеристическая функция множества $\sigma_k(L)$.

В случае простейшего оператора

$$(-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \quad (1.14)$$

мы имеем $\rho_k(\mu) = \exp(\omega_k \mu^{1/2n} \pi)$ и множества $\sigma_k(L)$ сводятся к точке 0 для всех тех k , для которых $\omega_k \neq \pm i$. Таким образом, ситуация, в которой часть интервалов $\sigma_k(L)$ вырождается в точку, не может быть исключена из рассмотрения. В результате некоторые функции $\phi_k(\mu)$ могут оказаться тривиальными для всех $\Phi \in \mathcal{H}_{2n}^2(L)$.

Теорема 1.3. *Равенства*

$$\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f) = \int_{\mathbb{R}} f(y) E(y; \mu, (\rho_k(\mu))^{-1}) dy, \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (1.15)$$

и

$$f(x) = \int_{\sigma(L)} \sum_{k=1}^{2n} \chi_k(\mu) p(\mu, \rho_k(\mu)) \phi_k(\mu) E(x; \mu, \rho_k(\mu)) d\mu \quad (1.16)$$

определяют взаимно однозначное отображение пространства $L^2(\mathbb{R})$ на пространство $\mathcal{H}_{2n}^2(L)$ и обратное к нему отображение, сопрягающие оператор L на первом из этих пространств со скалярным оператором μI на втором.

Интегралы (1.15) и (1.16) сходятся по нормам соответствующих пространств, и для каждой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ выполнено равенство Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\sigma(L)} \sum_{k=1}^{2n} \chi_k(\mu) p(\mu, \rho_k(\mu)) |\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f)|^2 d\mu. \quad (1.17)$$

Легко видеть, что в случае операторов Хилла теорема 1.3 утверждает, что для каждой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ справедливо представление

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma(L)} \frac{|\phi(\pi, \mu)|}{\sqrt{1 - u_+(\mu)^2}} \{Y_+(x, \mu) F_-(\mu; f) + Y_-(x, \mu) F_+(\mu; f)\} d\mu,$$

в котором

$$Y_{\pm}(x, \mu) = \theta(x, \mu) - \frac{u_-(\mu) \pm i\sqrt{1 - u_+(\mu)^2}}{\phi(\pi, \mu)} \phi(x, \mu)$$

— решения Флоке,

$$F_{\pm}(\mu; f) = \int_{\mathbb{R}} f(y) Y_{\pm}(y, \mu) dy \quad \text{и} \quad u_{\pm}(\mu) = \frac{\theta(\pi, \mu) \pm \phi'(\pi, \mu)}{2}.$$

Такой комплексный вариант разложения (1.2) впервые был получен Мейманом, см. [12], а позднее в [13].

§2. Решения $\rho_k(\mu)$ и риманова поверхность $\mathcal{R}(L)$

Мы начнем с доказательства теоремы 1.2. Следуя [6], занумеруем числа $\omega_k = \sqrt[n]{(-1)^n}$ в таком порядке, что

$$1 = \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_2 = \operatorname{Re} \omega_3 > \dots > \operatorname{Re} \omega_{2k} = \operatorname{Re} \omega_{2k+1} > \dots > \omega_{2n} = -1, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{Im} \omega_{2k} \geq 0,$$

если n четно, и

$$\operatorname{Re} \omega_1 = \operatorname{Re} \omega_2 > \cdots > \operatorname{Re} \omega_{2k+1} = \operatorname{Re} \omega_{2k} > \cdots > \operatorname{Re} \omega_{2n-1} = \operatorname{Re} \omega_{2n}, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Im} \omega_{2k} \leq 0,$$

если n нечетно. При такой нумерации в обоих случаях мы имеем $\omega_n = i$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$; случай нечетного n отличается лишь несущественными техническими деталями.

Пусть

$$T(r) = \{\lambda : \lambda = z - e^{-i\pi/4n}, |z| \geq r, -\frac{1}{2n} \leq \arg z \leq 0\}.$$

В соответствии с [6] существует фундаментальная матрица $Y(x, \mu)$ решений уравнения (1.5), представляемая в виде

$$Y(x, \mu) = D(\lambda)\Omega(x, \lambda)E(\lambda x), \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad x \in [0, \pi], \quad \lambda \in T(r), \quad (2.3)$$

с матрицами

$$D(\lambda) = (\lambda^{j-1} \delta_{jk})_{j,k=1}^{2n}, \quad E(x) = (e^{\omega_k x} \delta_{jk})_{j,k=1}^{2n},$$

$$\Omega(x, \lambda) = \Omega + \lambda^{-1} \Omega_1(x, \lambda), \quad \Omega = (\omega_k^{j-1})_{j,k=1}^{2n},$$

где

$$\sup_{x \in [0, \pi], \lambda \in T(r)} \|\Omega_1(x, \lambda)\| < \infty.$$

Поскольку $U(\pi, \mu) = Y(x, \mu)Y(0, \mu)^{-1}$, мы можем представить уравнение (1.8) в форме

$$\det((I + o(1))E(\pi\lambda) - \rho I) = 0. \quad (2.4)$$

Для исследования последнего уравнения введем целые функции

$$f_k(\lambda) = 1 - e^{(\omega_{k+1} - \omega_k)\lambda\pi}, \quad k = 1, \dots, 2n-1,$$

и обозначим через Z_k их нулевые множества. Для каждого $\delta > 0$ обозначим δ -окрестность множества Z_k через $U_k(\delta)$. Если

$$T_k(r, \delta) = \begin{cases} T(r) \setminus U_1(\delta), & k = 1, \\ T(r) \setminus (U_k(\delta) \cup U_{k-1}(\delta)), & 1 < k < 2n-1, \\ T(r) \setminus U_{2n-1}(\delta), & k = 2n, \end{cases}$$

то

$$C^{-1}\delta \leq |f_k(\lambda)| \leq C\delta, \quad \lambda \in \partial U_k(\delta) \cap T_k(r, \delta), \quad (2.5)$$

$$C^{-1}\delta \leq |f_k(\lambda)| \leq C, \quad \lambda \in T_k(r, \delta),$$

с постоянной $C > 1$, не зависящей от δ . В дальнейшем мы фиксируем δ так, чтобы $C\delta < 10^{-1}$.

Прежде всего мы подставляем $\rho = \sigma e^{\omega_1 \lambda \pi}$ в уравнение (2.4), делим получившееся уравнение на $\rho = e^{2n\omega_1 \lambda \pi}$ и получаем эквивалентное уравнение

$$\sigma^{2n-2}(\sigma - 1)(\sigma - 1 - f_2(\lambda)) = Q_1(\sigma, \lambda), \quad (2.6)$$

в котором $Q_1(\sigma, \lambda)$ — полином от переменной σ , коэффициенты которого аналитичны в области $T_1(r, \delta)$ и стремятся к нулю при $|\lambda| \rightarrow +\infty$. Для достаточно малого $\epsilon > 0$ найдется настолько большое число r , что выполняется оценка

$$|Q_1(\sigma, \lambda)\sigma^{-(2n-2)}(\sigma - 1 - f_2(\lambda))^{-1}| \leq \epsilon/2, \quad \lambda \in T_1(r, \delta), \quad |\sigma - 1| \leq \epsilon,$$

и, используя теорему Руше, мы заключаем, что существует единственное решение $\sigma_1(\lambda)$ уравнения (2.6), аналитическое в $T_1(r, \delta)$ и такое, что $|\sigma_1(\lambda) - 1| \leq \epsilon$. Поскольку $(r, \infty) \subset T_1(r, \delta)$, из уравнения (2.6) следует, что

$$\rho_1(\mu) = e^{\omega_1 \lambda \pi} \sigma_1(\lambda), \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad \lambda \in T_1(r, \delta),$$

является решением уравнения (1.8), удовлетворяющим соотношению (1.11) с $k = 1$.

Точно таким же образом подстановка $\rho = \sigma e^{\omega_{2n} \lambda \pi}$ приводит к уравнению

$$(\sigma - 1)(\sigma - 1 - \sigma f_{2n-1}(\lambda)) = Q_{2n}(\sigma, \lambda), \quad \lambda \in T_{2n}(r, \delta), \quad (2.7)$$

с единственным решением $\sigma_{2n}(\lambda)$, аналитическим в $T_{2n}(r, \delta)$ и таким, что

$$\rho_{2n}(\mu) = e^{\omega_{2n} \lambda \pi} \sigma_{2n}(\lambda), \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad \lambda \in T_{2n}(r, \delta),$$

является решением уравнения (2.4), удовлетворяющим соотношению (1.11) с $k = 2n$.

Если теперь $1 < k = 2p < 2n$ и $\rho = \sigma e^{\omega_k \lambda \pi}$, то уравнение (2.4) принимает вид

$$\sigma^{2n-k-1}(\sigma - 1 - \sigma f_{k-1}(\lambda))(\sigma - 1)(\sigma - 1 + f_k(\lambda)) = Q_k(\sigma, \lambda), \quad \lambda \in T_k(r, \delta), \quad (2.8)$$

где $Q_k(\sigma, \lambda)$ — полином от переменной σ с коэффициентами, аналитическими в $T_k(r, \delta)$ и стремящимися к нулю при $|\lambda| \rightarrow +\infty$. Как и ранее, мы видим, что уравнение (2.8) имеет единственное решение $\sigma_k(\lambda)$, аналитическое в $T_k(r, \delta)$ и удовлетворяющее соотношению

$$\lim_{\lambda \in T_k(r, \delta), |\lambda| \rightarrow \infty} \sigma_k(\lambda) = 1, \quad (2.9)$$

но теперь, в отличие от случаев $k = 1$ и $k = 2n$, множество $T_k(r, \delta)$ не содержит части луча $(r, +\infty)$, принадлежащей множеству $U_k(\delta)$.

Для того чтобы определить $\sigma_k(\lambda)$ внутри исключительного множества $U_k(\delta)$, мы для определенности предположим, что $\alpha \in \mathcal{N}_k \cap T(r)$, положим $D_\alpha = \{\lambda : |\lambda - \alpha| \leq \delta\}$ и представим уравнение (2.8) в виде

$$(\sigma - 1)(\sigma - 1 + f_k(\lambda)) = q_k(\sigma, \lambda), \quad \lambda \in D_\alpha, \quad (2.10)$$

где

$$q_k(\sigma, \lambda) = Q_k(\sigma, \lambda) \sigma^{-2n+k+1} (\sigma - 1 - \sigma f_{k-1}(\lambda))^{-1}.$$

В случае необходимости мы увеличим r так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$|q_k(\sigma, \lambda)| \leq 2C\delta^2, \quad |\sigma - 1| \leq C^2, \quad \lambda \in D_\alpha,$$

в котором C — постоянная из (2.5). По теореме Руше для каждого $\lambda \in D_\alpha$ существуют два решения уравнения (2.10), удовлетворяющие условию $|\sigma - 1| \leq 2C\delta$. Если эти решения совпадают в некоторой точке $\lambda \in D_\alpha$, то $f_k^2(\lambda) = 4q_k(\sigma, \lambda)$. Мы снова используем теорему Руше и находим, что существует не более двух таких точек λ . Ввиду аналитичности функции $q_k(\sigma, \lambda)$ в области $\{(\sigma, \lambda) : |\sigma - 1| \leq 2C\delta, \lambda \in D_\alpha\}$ существует двузначное аналитическое решение $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$ уравнения (2.10) в D_α , удовлетворяющее оценке

$$|\tilde{\sigma}_k(\lambda) - 1| \leq 2C\delta, \quad \lambda \in D_\alpha. \quad (2.11)$$

Функция $\sigma_k(\lambda)$, $\lambda \in T_k(r, \delta)$, является однозначным решением уравнения (2.8), которое эквивалентно уравнению (2.10) в D_α , и вследствие соотношения (2.9)

она совпадает с ветвью функции $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$. Другими словами, $\sigma_k(\lambda)$ продолжается внутрь D_α как двузначная аналитическая функция с не более чем двумя точками ветвления.

Далее, при том же четном значении $k = 2p$ мы подставляем $\rho = \sigma e^{\omega_{k+1}\lambda\pi}$ в уравнение (2.4) и получаем уравнение того же типа, что (2.8). Как и ранее, существует его единственное решение $\sigma_{k+1}(\lambda)$, аналитическое в $T_{k+1}(r, \delta)$ и удовлетворяющее условию

$$\lim_{\lambda \in T_{k+1}(r, \delta), |\lambda| \rightarrow \infty} \sigma_{k+1}(\lambda) = 1. \quad (2.12)$$

Подобно функции $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$, его двузначное аналитическое продолжение $\tilde{\sigma}_{k+1}(\lambda)$ внутри исключительных кругов D_α подчиняется условию

$$|\tilde{\sigma}_{k+1}(\lambda) - 1| \leq 2C\delta, \quad \lambda \in D_\alpha. \quad (2.13)$$

Рассмотрим теперь двузначные решения

$$\tilde{\rho}_k(\mu) = \tilde{\sigma}_k(\lambda) e^{\omega_k \lambda \pi}, \quad \tilde{\rho}_{k+1}(\mu) = \tilde{\sigma}_{k+1}(\lambda) e^{\omega_{k+1} \lambda \pi}, \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad \lambda \in D_\alpha,$$

уравнения (1.16). Поскольку коэффициенты уравнения (1.8) вещественны на вещественной оси, функция

$$\rho_k^*(\mu) = \overline{\rho_k(\bar{\mu})}, \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad \lambda \in \partial D_\alpha,$$

также является его решением. Кроме того, $\bar{\omega}_k = \omega_{k+1}$, и мы получаем

$$\rho_k^*(\mu) = \sigma_k^*(\lambda) e^{\omega_{k+1} \lambda \pi} = \rho_{k+1}(\mu), \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad \lambda \in \partial D_\alpha. \quad (2.14)$$

С другой стороны,

$$\rho_k^*(\mu) = \theta_k(\lambda) e^{\omega_k \lambda \pi}, \quad \theta_k(\lambda) = \sigma_k^*(\lambda) e^{(\omega_{k+1} - \omega_k) \lambda \pi}, \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad \lambda \in \partial D_\alpha,$$

и оценка

$$|\theta_k(\lambda) - 1| \leq |\sigma_k(\lambda) f_k(\lambda)| + |\sigma_k(\lambda) - 1| \leq 2C\delta, \quad \lambda \in \partial D_\alpha,$$

показывает, что $\rho_k^*(\mu)$ является однозначным аналитическим решением уравнения (1.8) на множестве ∂D_α . Если $\rho_k(\mu) = \rho_k^*(\mu)$ при $\mu = \lambda^{2n}, \lambda \in \partial D_\alpha$, то $|f_k(\lambda)| = o(1)$, что невозможно для больших λ . Таким образом, для $\mu = \lambda^{2n}, \lambda \in \partial D_\alpha$, функции $\rho_k(\mu)$ и $\rho_k^*(\mu)$ являются различными ветвями двузначной аналитической функции $\tilde{\rho}_k(\mu)$, которая удовлетворяет уравнению (1.8).

Для того чтобы оценить обе эти функции внутри D_α , мы полагаем

$$A_k(\lambda) = \frac{\tilde{\rho}_k(\lambda^{2n}) + \tilde{\rho}_k^*(\lambda^{2n})}{2} e^{-\lambda \pi \operatorname{Re} \omega_k}, \quad \lambda \in D_\alpha,$$

$$B_k(\lambda) = \tilde{\rho}_k(\lambda^{2n}) \tilde{\rho}_k^*(\lambda^{2n}) e^{-2\lambda \pi \operatorname{Re} \omega_k}, \quad \lambda \in D_\alpha.$$

В соответствии с их определением обе эти функции однозначны и аналитичны внутри D_α и, как следует из (2.9), (2.12) и (2.14), удовлетворяют условиям

$$A_k(\lambda) = \cos(\lambda \pi \operatorname{Im} \omega_k) + o(1), \quad B_k(\lambda) = 1 + o(1), \quad \lambda \in \partial D_\alpha.$$

В соответствии с принципом максимума те же представления справедливы в области D_α . Это значит, что $\tilde{\rho}_k(\mu) e^{-\lambda \pi \operatorname{Re} \omega_k}$ и $\tilde{\rho}_{k+1}(\mu) e^{-\lambda \pi \operatorname{Re} \omega_{k+1}}$ являются решениями уравнения $w^2 - 2(\cos(\lambda \pi \operatorname{Im} \omega_k) + o(1))w + 1 + o(1) = 0$, $\lambda \in D_\alpha$, и, следовательно, $\tilde{\rho}_k(\mu) = e^{\omega_k \lambda \pi} (1 + o(1))$, $\tilde{\rho}_{k+1}(\mu) = e^{\omega_{k+1} \lambda \pi} (1 + o(1))$, $\lambda \in D_\alpha$. Для завершения доказательства теоремы 1.2 мы фиксируем точку $\mu = \lambda^{2n}$,

$\lambda \in T_k(r, \delta)$, и решения $\rho_k(\mu) = e^{\omega_k \lambda \pi} \sigma_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, 2n$, уравнения (1.8) и продолжаем их на $\mathbb{R}$ как однозначные непрерывные функции, попарно различные вне дискриминантного множества

$$\mathcal{Z}(L) = \{\mu : \Delta(\mu, \rho) = \Delta'_\rho(\mu, \rho) = 0\}.$$

Последнее является нулевым множеством результата $R[\Delta, \Delta'_\rho]$, см. [7]. Поскольку существуют точки μ , в которых уравнение (1.8) имеет $2n$ различных корней, результат является нетривиальной функцией и множество $\mathcal{Z}(L)$ не имеет конечных предельных точек. Поэтому продолженные решения аналитичны вне $\mathcal{Z}(L)$ и, благодаря предыдущим оценкам функций $\tilde{\rho}_k(\mu)$ и $\tilde{\rho}_k^*(\mu)$, удовлетворяют уравнению (1.11), что и завершает доказательство теоремы 1.2.

Элементы матрицы монодромии являются целыми функциями порядка $n/2$, и уравнение (1.8) определяет $2n$ -листную риманову поверхность

$$\mathcal{R}(L) = \{(\mu, \rho) : \Delta(\mu, \rho) = 0\}$$

с аналитической функцией $\rho(\mu)$ на ней.

Лемма 2.1. *Риманова поверхность $\mathcal{R}(L)$ односвязна.*

Доказательство. Пусть $\{\rho_k(\mu)\}_{k=1}^{2n}$ — система решений уравнения (1.8), полученных при доказательстве теоремы 1.2. Как мы видели, эти решения являются однозначными аналитическими функциями в областях

$$\Pi_k^-(r, \delta) = \{\mu : \mu = \lambda^{2n}, \lambda \in T_k(r, \delta)\} \cap \{\mu : \operatorname{Im} \mu \leq 0\}$$

и удовлетворяют асимптотическим соотношениям

$$\rho_k(\mu) = e^{\omega_k \lambda \pi} (1 + o(1)), \quad \mu = \lambda^{2n}, |\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in T_k(r, \delta).$$

Мы используем их аналитические продолжения для описания поверхности $\mathcal{R}(L)$.

Во-первых, положим

$$\Pi_k^+(r, \delta) = \{\mu : \mu = \bar{z}, z \in \Pi_k^-(r, \delta)\}$$

и заметим, что функции $\rho_k^*(\mu) = \overline{\rho_k(\bar{\mu})}$ являются однозначными аналитическими решениями уравнения (1.8) в области $\Pi_k^+(r, \delta)$.

Далее, пусть

$$c_k^+ = \partial \Pi_k^-(r, \delta) \cap \{\mu \in \mathbb{R} : \mu \geq 0\}, \quad c_k^- = \partial \Pi_k^-(r, \delta) \cap \{\mu \in \mathbb{R} : \mu \leq 0\}.$$

Поскольку число ω_1 вещественно, решения $\rho_1(\mu)$ и $\rho_1^*(\mu)$ имеют одинаковое асимптотическое поведение в c_1^+ и, следовательно, совпадают на этом множестве. По той же причине решения $\rho_{2n}(\mu)$ и $\rho_{2n}^*(\mu)$ совпадают на множестве c_{2n}^+ .

Для $k = 2p$, $p = 1, \dots, n-1$, функция $\rho_k(\mu)$ совпадает с $\rho_{k+1}^*(\mu)$ на множестве $c_k^+ = c_{k+1}^+$ и с $\rho_{k-1}^*(\mu)$ на множестве $c_k^- = c_{k-1}^-$, в то время как $\rho_{k+1}(\mu)$ совпадает с $\rho_k^*(\mu)$ на множестве c_{k+1}^+ и с $\rho_{k+2}^*(\mu)$ на множестве $c_{k+1}^- = c_{k+2}^-$. Если мы склеим части соответствующих множеств, принадлежащие $\Pi_k^-(r, \delta)$ и $\Pi_k^+(r, \delta)$, то получим риманову поверхность $\mathcal{R}(r, \delta)$ с однозначной аналитической функцией $\rho(\mu)$ на ней. Поверхность $\mathcal{R}(r, \delta)$ оказывается одной и той же для всех операторов вида (1.3) и может быть получена из поверхности $\mathcal{R}_0 = \{(\mu, \lambda) : \mu = \lambda^{2n}\}$, соответствующей простейшему оператору (1.14), удалением из нее круга $\{\mu : |\mu| \leq r\}$ и малых окрестностей точек, проектирующихся

на множество Z , определенное в (1.12). Очевидно, что поверхность $\mathcal{R}_0$ односвязна. Поверхность $\mathcal{R}(L)$ получается в результате аналитического продолжения всех функций $\rho_k(\mu)$ внутрь исключительных множеств.

Для доказательства леммы 2.1 предположим, что $(\mu_0, \rho(\mu_0))$ — произвольная неразветвленная точка поверхности $\mathcal{R}(L)$ и $(\nu_0, \rho(\nu_0))$ — точка поверхности $\mathcal{R}(r, \delta)$. Пусть l обозначает простую гладкую кривую в комплексной плоскости, соединяющую μ_0 с ν_0 и не содержащую точек дискриминантного множества $\mathcal{Z}(L)$. По теореме монодромии, см. [8], существует единственное аналитическое продолжение функции $\rho(\mu)$ из окрестности точки μ_0 вдоль l . Регулярный элемент этого продолжения в окрестность точки ν_0 является однозначным аналитическим решением уравнения (1.8), и поскольку система $\{\rho_k(\mu)\}_{k=1}^{2n}$ содержит все решения, локально аналитические в окрестности точки ν_0 , этот элемент совпадает с одной из функций $\rho_k(\mu)$. Это означает, что поднятие кривой l на поверхность $\mathcal{R}(L)$ соединяет точки $(\mu_0, \rho(\mu_0))$ и $(\nu_0, \rho_k(\nu_0))$, что доказывает лемму.

Теперь мы можем дать геометрическое описание поверхности $\mathcal{R}(L)$. С этой целью обозначим через $\mathcal{R}_k$ копию комплексной плоскости, разрезанную вдоль следующих множеств:

- 1) простой гладкой кривой внутри круга $\{\mu : |\mu| \leq r\}$, содержащей точку $\mu = -r$ и все точки дискриминантного множества $\mathcal{Z}(L)$, лежащие внутри круга;
- 2) луча $\{\mu : \mu \leq -r\}$;
- 3) всех вещественных отрезков $[\alpha, \beta]$, где α и β — соседние точки ветвления функции $\rho_k(\mu)$, для которых $\operatorname{Re} \mu \geq r$;
- 4) всех отрезков $[\alpha, \bar{\alpha}]$, где α — точка ветвления либо функции $\rho_{k-1}^*(\mu)$ с $\operatorname{Re} \mu \leq -r$ в случае четного k , либо функции $\rho_{k+1}^*(\mu)$ с $\operatorname{Re} \mu \leq -r$, если k нечетно.

Функция $\rho_k(\mu)$ продолжается из области $\Pi_k^-(r, \delta)$ в $\mathcal{R}_k$ как однозначное аналитическое решение уравнения (1.8), и, склеивая листы $\mathcal{R}_j$, $j = 1, \dots, 2n$, в соответствии с граничными значениями функции $\rho_j(\mu)$, мы получаем поверхность $\mathcal{R}(L)$ с однозначной аналитической функцией $\rho(\mu)$ на ней.

Следствие. Преобразование $J(\mu, \rho(\mu)) = (\mu, (\rho(\mu))^{-1})$ является аналитической инволюцией на $\mathcal{R}(L)$.

В самом деле, если $|\rho_n(\mu)| = 1$ для достаточно большого вещественного значения μ , то $(\rho_n(\mu))^{-1} = \rho_n(\mu) = \rho_{n+1}(\mu)$. Следовательно, $(\rho(\mu))^{-1}$ есть решение уравнения (1.8). Поскольку $\rho(\mu)$ — аналитическая функция на односвязной римановой поверхности $\mathcal{R}(L)$, функция $(\rho(\mu))^{-1}$ продолжается как решение на всю эту поверхность и $(\mu, (\rho(\mu))^{-1})$ — ее точка, что доказывает следствие.

Завершая настоящий параграф, отметим, что характеристический полином оператора L имеет вид

$$\Delta(\mu, \rho) = \rho^{2n} + \sum_{k=1}^{2n-1} A_k(\mu) \rho^k + 1,$$

где $A_k(\mu)$ — целые функции. Из предыдущего следствия вытекает, что $A_k(\mu) = A_{2n-k}(\mu)$ для $k = 1, \dots, 2n-1$. Утверждение такого типа для канонических гамильтоновых систем называют теоремой Ляпунова–Пуанкаре, см. [14], [15].

§3. Зонная структура спектра оператора L

Для описания зонной структуры спектра $\sigma(L)$ введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{E}(L) = \{\mu \in \mathbb{R} : \text{существует } \rho \in \mathbb{C}, |\rho| = 1, \text{ такое, что } \Delta(\mu, \rho) = \Delta'_\rho(\mu, \rho) = 0\}.$$

Если

$$\mathcal{E}_k(L) = \{\mu \in \sigma(L) : \Delta(\mu, \rho_k(\mu)) = \Delta'_\rho(\mu, \rho_k(\mu)) = 0\}, \quad (3.1)$$

то

$$\mathcal{E}(L) = \bigcup_{k=1}^{2n} \mathcal{E}_k(L).$$

Множество $\mathcal{E}(L)$ есть часть дискриминантного множества $\mathcal{Z}(L)$ и, следовательно, является счетным с единственной предельной точкой $+\infty$.

Лемма 3.1. *Если $\rho_k(\mu_0) = e^{it_0}$ для некоторого вещественного $\mu_0 \notin \mathcal{E}_k(L)$, $t_0 \in [0, \pi]$ и некоторого целого k , $1 \leq k \leq 2n$, то существуют максимальный отрезок $S \subset [0, \pi]$, содержащий t_0 , и непрерывная монотонная функция $\mu(t)$ на S , такие, что*

(i) *имеют место соотношения $\Delta(\mu(t), e^{it}) = 0$, $t \in S$, $\mu(t_0) = \mu_0$, $\mu'(t) \neq 0$, $t \in \text{int } S$;*

(ii) *функция $\mu(t)$ отображает S взаимно однозначно на отрезок $\ell \subset \sigma_k(L)$ с концами в множестве $\mathcal{E}_k(L)$.*

Доказательство. Поскольку $\mu_0 \notin \mathcal{E}_k(L)$, поверхность $\mathcal{R}(L)$ не разветвляется в точке $(\mu_0, \rho_k(\mu_0))$ и $\rho_k(\mu)$ является однозначной ветвью функции $\rho(\mu)$, аналитической в малой комплексной окрестности $V_0 = \{\mu : |\mu - \mu_0| < \epsilon\} \subset \mathcal{R}_k$ точки μ_0 . Ее тейлоровское разложение в точке μ_0 имеет вид

$$\rho_k(\mu) = e^{it_0} + c_k(\mu - \mu_0)^p + \sum_{m=p+1}^{\infty} c_{km}(\mu - \mu_0)^m, \quad c_k \neq 0, p \geq 1. \quad (3.2)$$

Если предположить, что здесь $p \geq 2$, то прообраз относительно функции $\rho_k(\mu)$ малой окрестности точки e^{it_0} , лежащей на единичной окружности $U_0 = \{z : |z| = 1\}$, содержит не вещественные точки. По теореме 1.1 такие точки принадлежат спектру $\sigma(L)$, что невозможно, так как L — самосопряженный оператор. Таким образом, $p = 1$ в (3.2), $\rho'_k(\mu_0) = c_k \neq 0$ и функция $\rho_k(\mu)$ отображает V_0 взаимно однозначно на малую комплексную окрестность Θ_0 точки $e^{it_0} \in U_0^1$.

По теореме 1.1 прообраз дуги $\Theta_0 \cap U_0$ состоит из точек, принадлежащих спектру $\sigma(L)$, и, следовательно, совпадает с интервалом $W_0 = V_0 \cap \mathbb{R}$, для которого μ_0 является внутренней точкой. Функция

$$\rho_k^*(\mu) = \overline{\rho_k(\overline{\mu})}, \quad \mu \in V_0, \quad (3.3)$$

является в V_0 однозначной ветвью функции $\rho(\mu)$, отличной от $\rho_k(\mu)$, и если $\rho_k(\mu_0) = \pm 1$, то $\rho_k(\mu_0) = \rho_k^*(\mu_0)$ в противоречие с предположением $\mu_0 \notin \mathcal{E}_k(L)$. Значит, $t_0 \notin \{0, \pi, 2\pi\}$.

Обозначим через ℓ наибольший отрезок внутри множества $\sigma_k(L)$, который содержит μ_0 , но не содержит точек множества $\mathcal{E}_k(L)$ в своей внутренности $\ell^{(o)}$, и пусть μ^- и μ^+ — концы этого отрезка. Функция $\rho_k(\mu)$ отображает $\ell^{(o)}$ в

¹⁾Эти аргументы подобны тем, которые использованы в [3, гл. XIII].

единичную окружность U_0 . Как и ранее, мы используем самосопряженность оператора L и получаем, что $\rho'_k(\mu) \neq 0$, $\mu \in \ell^{(o)}$. Поэтому для каждого $\mu \in \ell^{(o)}$ существует точка $t \in [0, 2\pi)$, такая, что $\rho(\mu) = e^{it}$ и локальное соответствие между t и μ является взаимно однозначным и аналитическим в точках множества $\ell^{(o)}$. Функция $\rho_k^*(\mu)$, определенная формулой (3.3), является однозначным решением уравнения (1.8), аналитическим в некоторой окрестности интервала $\ell^{(o)}$, и, значит, она совпадает с однозначной ветвью $\rho_q(\mu)$ функции $\rho(\mu)$. Так как $\rho_k(\mu) \neq \rho_k^*(\mu)$ в окрестности точки μ_0 , то $q \neq k$.

Пусть теперь точка μ_0 начинает монотонно двигаться вдоль $\mathbb{R}$ в направлении одного из концов отрезка ℓ . Тогда соответствующая точка $t = t(\mu)$ монотонно движется по $\mathbb{R}$ и одновременно точки $\rho_k(\mu)$ и $\rho_q(\mu)$ движутся в противоположных направлениях по единичной окружности навстречу друг другу. В первый раз эти точки могут встретиться, только когда $\rho_k(\mu) = e^{it} = e^{-it} = \rho_q(\mu)$, т. е. когда или $t = 0$, или $t = \pi$. Для значения μ , соответствующего точке встречи, мы имеем $\rho_k(\mu) = \rho_q(\mu) = \pm 1$. Это означает, что $(\mu, \rho_k(\mu)) = (\mu, \rho_q(\mu))$ является точкой ветвления на $\mathcal{R}(L)$. Следовательно, μ принадлежит множеству $\mathcal{E}_k(L)$, и, поскольку $\ell^{(o)}$ является максимальным интервалом, содержащим точку μ_0 , но не содержащим точек множества $\mathcal{E}_k(L)$, мы получаем $\mu^- \in \mathcal{E}_k(L)$ и $\mu^+ \in \mathcal{E}_k(L)$.

То же утверждение справедливо, если точки $\rho_k(\mu) = e^{it}$ и $\rho_q(\mu) = e^{-it}$ вообще не встречаются. В самом деле, в этой ситуации $t \in (0, \pi)$ и ввиду монотонности функции $t(\mu)$ существуют пределы

$$t_{\pm} = \lim_{\mu \rightarrow \mu^{\pm}} t(\mu) \in (0, \pi).$$

Если μ^- и μ^+ не принадлежат множеству $\mathcal{E}_k(L)$, мы заменяем μ_0 и t_0 в предположениях леммы либо на μ^- и t_- , либо на μ^+ и t_+ соответственно и с помощью прежних аргументов устанавливаем, что отрезок ℓ не обладает свойством максимальности. Полученное противоречие доказывает, что концы отрезка ℓ лежат в $\mathcal{E}_k(L)$. Дифференцируя тождество $\rho_k(\mu(t)) = e^{it}$, мы получаем, что $\mu'(t) \neq 0$ для $t \in \text{int } S$, где S — отрезок с концами t_- и t_+ , завершая тем самым доказательство леммы.

Следующее предложение является подробным вариантом теоремы 1.1.

Теорема 3.1. *Для каждого фиксированного значения $k = 1, \dots, 2n$ найдутся система неперекрывающихся отрезков $\ell_j^{(k)} \subset \sigma_k(L)$, $j = 1, \dots, N(k)$, с концами в множестве $\mathcal{E}_k(L)$, система отрезков $S_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, N(k)$, каждый из которых содержится либо в $[0, \pi]$, либо в $[\pi, 2\pi]$, и система непрерывных монотонных функций $\mu_{jk}(t)$, $t \in S_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, N(k)$, такие, что*

(i) *выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_{jk}(t), \rho_k(\mu_{jk}(t))) &= 0, & \rho_k(\mu_{jk}(t)) &= e^{it}, & t &\in S_j^{(k)}, \\ \mu'_{jk}(t) &\neq 0, & t &\in \text{int } S_j^{(k)}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

(ii) *функции $\mu_{jk}(t)$ отображают $S_j^{(k)}$ взаимно однозначно на $\ell_j^{(k)}$;*

(iii) имеет место представление

$$\sigma_k(L) = \bigcup_{j=1}^{N(k)} \ell_j^{(k)};$$

(iv) спектр $\sigma(L)$ оператора (1.3) имеет вид

$$\sigma(L) = \bigcup_{k=1}^{2n} \left(\bigcup_{j=1}^{N(k)} \ell_j^{(k)} \right).$$

Доказательство. Пусть μ_0 — неизолированная точка множества $\sigma_k(L)$. Если $\rho_k(\mu_0) = e^{it_0}$, $t_0 \in [0, \pi]$ и $\mu_0 \notin \mathcal{E}_k(L)$, то по лемме 3.1 существуют отрезки $\ell \subset \sigma_k(L)$ и $S \subset [0, \pi]$ и функция $\mu(t)$ со свойствами, сформулированными в пп. (i) и (ii).

Если $\rho_k(\mu_0) = e^{it_0}$, $t_0 \in [\pi, 2\pi]$ и $\mu_0 \notin \mathcal{E}_k(L)$, то мы применяем лемму 3.1 к функции $\rho_k^*(\mu)$, определенной формулой (3.3), и к числам $\rho_k^*(\mu_0)$ и $t_0^* = 2\pi - t_0 \in [0, \pi]$ вместо $\rho_k(\mu_0)$ и $t_0 \in [0, \pi]$ и в дополнение к отрезку ℓ находим отрезок $S^* \subset [0, \pi]$ и функцию $\mu^*(t)$ со свойствами, описанными в лемме 3.1. Отрезки ℓ и $S = \{t \in [\pi, 2\pi] : t = 2\pi - t^*, t^* \in S^*\}$ и функция $\mu(t) = \mu^*(2\pi - t)$ обладают свойствами, описанными в пп. (i) и (ii).

Если, как и ранее, μ_0 — неизолированная точка множества $\sigma_k(L)$, но $\mu_0 \in \mathcal{E}_k(L)$, то мы зафиксируем интервал $V_0 = \{\mu \in \mathbb{R} : |\mu - \mu_0| < \epsilon\}$, не содержащий точек множества $\mathcal{E}_k(L)$, отличных от μ_0 . Мы выбираем произвольную точку $\nu \in V_0 \cap \sigma_k(L)$, $\nu \neq \mu_0$, и, снова используя лемму 3.1, найдем отрезок ℓ , содержащий ν , отрезок S и функцию $\mu(t)$ со свойствами (i) и (ii). Концы отрезка ℓ должны быть расположены в множестве $\mathcal{E}_k(L)$, и, следовательно, μ_0 — один из этих концов.

Осталось рассмотреть случай, когда μ_0 — изолированная точка из $\sigma_k(L)$. Если такая точка не принадлежит множеству $\mathcal{E}_k(L)$, то $\rho_k(\mu)$ — однозначная аналитическая функция в комплексной окрестности точки μ_0 . Как мы видели при доказательстве леммы 3.1, она отображает взаимно однозначно малый интервал $\{\mu \in \mathbb{R} : |\mu - \mu_0| < \epsilon\}$ на малую дугу единичной окружности U_0 с центром в точке $\rho_k(\mu_0)$, и μ_0 не может быть неизолированной точкой в $\sigma_k(L)$. Таким образом, $\mu_0 \in \mathcal{E}_k(L)$, и если $\rho_k(\mu_0) = e^{it_0}$, то условия (i) и (ii) выполняются с $\ell = \{\mu_0\}$, $S = \{t_0\}$ и $\mu(t) \equiv \mu_0$, и это завершает доказательство теоремы 3.1.

Предыдущий анализ показывает, что множество $\sigma_k(L)$ образовано системой отрезков с концами в множестве $\mathcal{E}_k(L)$. Мы обозначаем эти отрезки через $\ell_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, N(k)$, в соответствии с порядком их концов на вещественной оси, а через $S_j^{(k)}$ и $\mu_{jk}(t)$ обозначаем соответствующие отрезки в $[0, 2\pi]$ и функции на них.

Замечание 3.2. Каждая точка множества $\mathcal{E}(L)$ принадлежит спектру $\sigma(L)$ и не является в нем изолированной. Следовательно, такая точка принадлежит некоторому нетривиальному отрезку $\ell_j^{(k)}$ и по теореме 3.1 должна быть его концом.

§4. Операторы L_t

Для каждого $t \in [0, 2\pi]$ обозначим через L_t самосопряженный оператор в пространстве $L^2([0, \pi])$, порожденный выражением (1.3) и граничными условиями

$$y^{(j)}(\pi) = e^{it} y^{(j)}(0), \quad 0 \leq j \leq 2n-1, \quad (4.1)$$

Спектр $\sigma(L_t)$ оператора L_t в пространстве $L^2([0, \pi])$ совпадает с множеством всех тех μ , которые удовлетворяют уравнению (1.8) при $\rho = e^{it}$, и теорема 1.1 утверждает, что

$$\sigma(L) = \bigcup_{t \in [0, 2\pi]} \sigma(L_t).$$

В этом параграфе мы показываем, что спектр $\sigma(L_t)$ прост для всех $t \in [0, 2\pi]$ кроме, быть может, конечного числа точек, и описываем собственные функции для неисклчительных значений t .

Лемма 4.1. Если $\Delta(\mu_0, e^{it}) = 0$ и $E(x; \mu, \rho)$ определены равенством (1.9), то

$$\|E(\cdot; \mu_0, e^{it})\|_{L^2([0, \pi])}^2 = (-1)^{n+1} e^{-it} \Delta'_\mu(\mu_0, e^{it}) E(0; \mu_0, e^{-it}). \quad (4.2)$$

Доказательство. Для каждого $\mu \in \mathbb{C}$ определение (1.9) функции $E(x; \mu, \rho)$ влечет за собой

$$\begin{aligned} E^{(j)}(\pi; \mu, e^{it}) - e^{it} E^{(j)}(0; \mu, e^{it}) &= 0, \quad j = 0, \dots, 2n-2, \\ E^{(2n-1)}(\pi; \mu, e^{it}) - e^{it} E^{(2n-1)}(0; \mu, e^{it}) &= -\Delta(\mu, e^{it}). \end{aligned}$$

Используя формулу Лагранжа, мы приходим к соотношению

$$(\mu - \mu_0)(E(\cdot; \mu, e^{it}), E(\cdot; \mu_0, e^{it})) = (-1)^{n+1} e^{-it} \Delta(\mu, e^{it}) E(0; \mu_0, e^{-it}),$$

и равенство (4.2) из него получается при $\mu \rightarrow \mu_0$.

Лемма 4.2. Множество

$$\mathcal{T}(L) = \{t \in [0, 2\pi] : \Delta'_\rho(\mu_0, e^{it}) E(0; \mu_0, e^{-it}) = 0 \text{ для некоторого } \mu_0 \in \sigma(L_t)\}$$

конечно и содержит точки $0, \pi, 2\pi$.

Доказательство. Очевидно, что множество $\mathcal{T}$ является объединением (возможно, пересекающихся) множеств

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(L) &= \{t \in [0, 2\pi] : \text{существует } \mu_0 \in \sigma(L_t), \text{ такое, что } \Delta'_\rho(\mu_0, e^{-it}) = 0\}, \\ \mathcal{T}_2(L) &= \{t \in [0, 2\pi] : \text{существует } \mu_0 \in \sigma(L_t), \text{ такое, что } E(0; \mu_0, e^{it}) = 0\}. \end{aligned}$$

Если $\mu_0 \in \sigma(L_{t_0})$, то существуют отрезки $\ell_j^{(k)}$ и $S_j^{(k)}$ и функции $\mu_{jk}(t)$, $t \in S_j^{(k)}$, со свойствами, описанными в теореме 3.1, и такие, что $\mu_0 \in \sigma_k(L)$, $\rho_k(\mu_0) = e^{it_0}$, $t_0 \in S_j^{(k)}$. Если $\mu_0 \in \mathcal{T}_1(L)$, то $\mu_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{L})$ и, следовательно, μ_0 является концом отрезка $\ell_j^{(k)}$, а t_0 — концом отрезка $S_j^{(k)}$. Покажем, что множество всех тех t , которые являются концами отрезков

$$S_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, N(k), \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (4.3)$$

конечно.

Для каждого $R > 0$ количество отрезков $\ell_j^{(k)}$, частично или полностью размещающихся в круге $\{\mu : |\mu| \leq R\}$, конечно, и конечным является также количество отрезков $S_j^{(k)}$ с соответствующими индексами k и j .

Из асимптотического представления (1.11) следует, что существует только два значения k , для которых $N(k) = \infty$, и они равны n и $n+1$. Мы выбираем R настолько большим, чтобы концы $\alpha_j^{(n)}$ и $\beta_j^{(n)}$ отрезков $\ell_j^{(n)}$, лежащих в области $\{\mu : |\mu| \geq R\}$, оказались близкими к множеству $\{m^{2n}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Кроме того, мы можем предположить, что точки ветвления $(\mu, \rho_n(\mu))$ поверхности $\mathcal{R}(L)$ с $|\mu| \geq R$ близки к точкам $(\alpha_j^{(n)}, \rho_n(\alpha_j^{(n)}))$ и $(\beta_j^{(n)}, \rho_n(\beta_j^{(n)}))$.

Пусть $\ell_j^{(n)}$ и $\ell_{j+1}^{(n)}$ — два смежных отрезка из множества $\sigma_n(L) \cap \{\mu : \mu \geq R\}$. Если $\gamma_j = (j + 1/2)^{2n}$, то из соотношения (1.11) следует, что одно из чисел $\rho_n(\gamma_{j+1})$ и $\rho_n(\gamma_j)$ содержится в полуплоскости $\{\mu : \operatorname{Im} \mu > 0\}$, а другое — в полуплоскости $\{\mu : \operatorname{Im} \mu < 0\}$. По лемме 3.1 один из отрезков $S_j^{(n)}$ и $S_{j+1}^{(n)}$ принадлежит отрезку $[0, \pi]$, а другой — отрезку $[\pi, 2\pi]$.

Пусть лакуна $[\beta_j^{(n)}, \alpha_{j+1}^{(n)}]$ вырождается в точку. Если μ приближается к этой точке, то из непрерывности функции $\rho_n(\mu)$ следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow \beta_j^{(n)} - 0} \rho_n(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \alpha_{j+1}^{(n)} + 0} \rho_n(\mu).$$

Оба числа здесь имеют вид e^{it} , одно с $t \in [0, \pi]$, а другое с $t \in [\pi, 2\pi]$, и мы заключаем, что или $t = 0$, или $t = \pi$, или $t = 2\pi$.

Если точки $\beta_j^{(n)}$ и $\alpha_{j+1}^{(n)}$ различны, то они разделены невырожденной спектральной лакуной, которая не содержит точек множества $\sigma_n(L)$. В этом случае поверхность $\mathcal{R}(L)$ разветвлена в обеих точках $(\alpha_{j+1}^{(n)}, \rho_n(\alpha_{j+1}^{(n)}))$ и $(\beta_j^{(n)}, \rho_n(\beta_j^{(n)}))$: в противном случае $\rho_n(\mu)$ — однозначная аналитическая функция в малой окрестности каждой из этих точек, имеет место представление (3.2) при $p = 1$, $\mu_0 = \alpha_{j+1}^{(n)}$ и $\mu_0 = \beta_j^{(n)}$, а следовательно, лакуна $(\beta_j^{(n)}, \alpha_{j+1}^{(n)})$ содержит точки из $\sigma_n(L)$, что приводит к противоречию. В соответствии с выбором числа R существуют только две ветви функции $\rho(\mu)$ в малых окрестностях точек $(\alpha_{j+1}^{(n)}, \rho_n(\alpha_{j+1}^{(n)}))$ и $(\beta_j^{(n)}, \rho_n(\beta_j^{(n)}))$, и это $\rho_n(\mu)$ и $\rho_n^*(\mu) = \rho_{n+1}(\mu)$. Поскольку

$$\lim_{\mu \rightarrow \beta_j^{(n)} - 0} \rho_n(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \beta_j^{(n)} - 0} \rho_n^*(\mu), \quad \lim_{\mu \rightarrow \alpha_{j+1}^{(n)} + 0} \rho_n(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \alpha_{j+1}^{(n)} + 0} \rho_n^*(\mu),$$

$\operatorname{Im} \rho_n(\mu) \operatorname{Im} \rho_n^*(\mu) \leq 0$ и все четыре числа здесь имеют вид e^{it} , они равны -1 или 1 и мы снова получаем $t = 0 \pmod{\pi}$. Таким образом, множество $\mathcal{T}_1(L)$ конечно.

Покажем теперь, что функция $E(0; \mu, \rho(\mu))$ не равна нулю тождественно на поверхности $\mathcal{R}(L)$. Заметим сначала, что эта функция совпадает с одним из $(2n)^2$ миноров матрицы $U(\mu) - \rho(\mu)I$ и, следовательно, является элементом матрицы

$$- \lim_{z \rightarrow \rho(\mu)} \Delta(\mu, z)(U(\mu) - zI)^{-1}. \quad (4.4)$$

Если $\rho(\mu)$ — простой корень уравнения (1.8), то предыдущее выражение равно

$$\Delta'_\rho(\mu, \rho(\mu)) \operatorname{res}\{(U(\mu) - zI)^{-1}; z = \rho(\mu)\}. \quad (4.5)$$

Пусть число $\delta > 0$ фиксировано, и пусть

$$S_n(r, \delta) = \{\mu : \mu = \lambda^{2n}, \lambda \in T_n(r, \delta)\} \cap \{\mu : \operatorname{Im} \mu \geq -1\},$$

где $T_n(r, \delta)$ определено, как в §2. Тогда выполнены соотношения (2.9) и оценки

$$|e^{\pi i \lambda} - e^{\pi \omega_k \lambda}| \geq d, \quad \omega_k \neq i, \lambda \in T_n(r, \delta),$$

с постоянной $d > 0$, которая не зависит от λ . Таким образом, для каждого $\lambda \in T_n(r, \delta)$ и каждого z , удовлетворяющего условию $|z - e^{\pi i \lambda}| = d/4$, мы имеем

$$|z - e^{\pi \omega_k \lambda}| \geq |e^{\pi i \lambda} - e^{\pi \omega_k \lambda}| - |z - e^{\pi i \lambda}| \geq 3d/4, \quad \omega_k \neq i.$$

Следовательно,

$$\|(E(\pi \lambda) - zI)^{-1}\| \leq C, \quad \lambda \in T_n(r, \delta), |z - e^{\pi i \lambda}| = d/4,$$

с постоянной C , не зависящей ни от μ , ни от z .

Для вычисления вычета в выражении (4.5) мы снова используем соотношение (2.9). При тех же ограничениях на μ и z , что и в последнем соотношении, мы имеем

$$(U(\mu) - zI)^{-1} = D(\lambda)(\Omega + o(1))(E(\pi \lambda) - z(I + o(1))(\Omega^{-1} + o(1))(D(\lambda))^{-1},$$

где $\mu = \lambda^{2n}$, $\lambda \in T_n(r, \delta)$ и

$$\|(E(\pi \lambda) - z(I + o(1)))^{-1}\| = \|(E(\pi \lambda) - zI)^{-1}(I + o(1))\| \leq C.$$

Если число r достаточно велико, мы получаем оценки

$$|\rho_n(\mu) - e^{\pi i \lambda}| \leq d/4, \quad |\rho_{n+1}(\mu) - e^{-\pi i \lambda}| \leq d/4, \quad \mu = \lambda^{2n}, \lambda \in T_n(r, \delta).$$

Поэтому для тех же значений μ выполняются неравенства

$$|\rho_k(\mu) - e^{\pi i \lambda}| \geq \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\pi \operatorname{Re}(\omega_k \lambda)} - |e^{\pi i \lambda}| \geq d, & 1 \leq k \leq n-1, \\ |e^{\pi i \lambda}| - \frac{1}{2}e^{\pi \operatorname{Re}(\omega_k \lambda)} \geq d/2, & n+2 \leq k \leq 2n, \\ d - |\rho_{n+1}(\mu) - e^{-\pi i \lambda}| \geq 3d/4, & k = n+1, \end{cases}$$

так что собственное число $\rho_n(\mu)$ находится внутри окружности $C(\mu, d) = \{z \in \mathbb{C} : |z - e^{\pi i \lambda}| = d/4, \mu = \lambda^{2n}\}$, а все другие собственные числа $\rho_k(\mu)$ лежат снаружи от нее. Далее,

$$\begin{aligned} & (E(\pi \lambda) - z(I + o(1)))^{-1} \\ &= (E(\pi \lambda) - zI)^{-1} + (E(\pi \lambda) - z(I + o(1)))^{-1}o(1)(E(\pi \lambda) - zI)^{-1} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \operatorname{res}\{(U(\mu) - zI)^{-1}; z = \rho_n(\mu)\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\mu, d)} dz (U(\mu) - zI)^{-1} = D(\lambda)(\Omega P \Omega^{-1} + o(1))(D(\lambda))^{-1} \end{aligned}$$

где $P = \|\delta_{pn} \delta_{jn}\|_{j,p=1}^{2n}$. Значит,

$$E(0; \mu, \rho_n(\mu)) = \mu^{(2n-1)/(2n)} \Delta'_\rho(\mu, \rho_n(\mu))(C + o(1)), \quad \mu = \lambda^{2n}, \lambda \in T_n(r, \delta), \quad (4.6)$$

с некоторой константой $C \neq 0$, и мы заключаем, что $E(0; \mu, \rho(\mu))$ — нетривиальная аналитическая функция на поверхности $\mathcal{R}(L)$. В силу леммы 2.1 нули этой функции могут накапливаться только на бесконечности и для каждого $r > 0$ существует лишь конечное число решений уравнения $E(0; \mu, \rho(\mu)) = 0$ с $|\mu| \leq r$.

Поскольку функция $\rho(\mu)$ имеет не более чем $2n$ значений, для каждого такого решения μ найдется не более $2n$ значений $t \in (0, 2\pi)$, для которых $\rho(\mu) = e^{it}$.

Из равенства (4.6) следует, что функция $E(0; \mu, \rho_n(\mu))$ может обратиться в нуль при достаточно больших значениях $\operatorname{Re} \mu$ только внутри исключительных множеств $D_k = \{\mu = \lambda^{2n} : |\lambda - k| \leq \delta, k \in \mathbb{N}\}$. Если $E(0; \mu, \rho_n(\mu)) = 0$ при $\mu \in D_k \cap \sigma_n(L)$, то одновременно и $E(0; \mu, \rho_{n+1}(\mu)) = 0$. В случае $\rho_n(\mu) = e^{it} \neq \pm 1$ мы имеем $\rho_n(\mu) \neq \rho_{n+1}(\mu)$ и оба числа $\Delta'_\rho(\mu, \rho_n(\mu))$ и $\Delta'_\rho(\mu, \rho_{n+1}(\mu))$ не равны нулю. Поэтому мы можем продифференцировать равенство (3.4) в точке μ . Получившееся равенство

$$\Delta'_\mu(\mu, e^{it})\mu'_{jk}(t) + ie^{it}\Delta'_\rho(\mu, e^{it}) = 0 \quad (4.7)$$

показывает, что $\Delta'_\mu(\mu, \rho_n(\mu))$ и $\Delta'_\mu(\mu, \rho_{n+1}(\mu))$ также отличны от нуля. В соответствии с равенством (4.2) число μ является нулем кратности, не меньшей 2, для каждой из функций $E(0; \mu, \rho_n(\mu))$ и $E(0; \mu, \rho_{n+1}(\mu))$. В результате μ оказывается нулем кратности не менее 4 для функции $E(0; \mu, \rho_n(\mu))E(0; \mu, \rho_{n+1}(\mu))$, которая однозначна и аналитична внутри D_k . С другой стороны, мы видели при доказательстве теоремы 1.2, что для $\mu \in D_k$ и ρ , достаточно близких к ± 1 , имеет место представление $\Delta(\mu, \rho) = (\rho^2 - 2(\cos(\lambda\rho) + o(1))\rho + 1 + o(1))\phi(\mu, \rho)$, в котором $\phi(\mu, \rho)$ — полином от ρ , коэффициенты которого, равно как и выражения $o(1)$, являются однозначными аналитическими функциями переменной $\mu \in D_k$, причем $\phi(\mu, \rho) \neq 0$. Следовательно, $\omega(\mu) \equiv \Delta'_\rho(\mu, \rho_n(\mu))\Delta'_\rho(\mu, \rho_{n+1}(\mu)) = (-4(\sin \pi\lambda)^2 + o(1))\psi(\mu)$ является однозначной нетривиальной аналитической функцией от $\mu \in D_k$. Мы заключаем, что $\omega(\mu)$ имеет только два нуля в D_k , в то время как теорема Руше утверждает, что в соответствии с соотношением (4.6) существует по меньшей мере 4 таких нуля. Таким образом, равенство $E(0; \mu, \rho_n(\mu)) = 0$ возможно лишь при $\rho_n(\mu) = e^{it} = \pm 1$, что доказывает конечность множества $\mathcal{T}_2(L)$.

Теорема 4.1. *Если $t \in [0, 2\pi] \setminus \mathcal{T}(L)$, то спектр $\sigma(L_t)$ оператора L_t прост и каждая функция $f \in L^2([0, \pi])$ представима сходящимся в $L^2([0, \pi])$ ортогональным рядом*

$$f(x) = \sum_{\Delta(\mu, e^{it})=0} w(\mu, e^{it})E(x; \mu, e^{it}) \int_0^\pi dy E(y; \mu, e^{-it})f(y)$$

с весовой функцией

$$w(\mu, \rho) = |\Delta'_\mu(\mu, \rho)E(0; \mu, \rho^{-1})|^{-1}. \quad (4.8)$$

Доказательство. Для каждого $\mu \in \sigma(L_t)$ существует такое число k , $1 \leq k \leq 2n$, что μ является точкой множества $\sigma_k(L)$, определенного равенством (1.13). На основании теоремы 3.1 мы можем найти отрезок $\ell_j^{(k)}$, содержащий μ , отрезок $S_j^{(k)} \subset [0, 2\pi]$, содержащий t и такой, что $\rho_k(\mu) = e^{it}$, и функцию $\mu_{jk}(s)$, которая удовлетворяет равенству (3.4). Если $t \notin \mathcal{T}(L)$, то μ не принадлежит множеству $\mathcal{E}_k(L)$, определенному формулой (3.1). Таким образом, μ лежит внутри отрезка $\ell_j^{(k)}$, t лежит внутри $S_j^{(k)}$ и равенство (4.7) показывает, что $\Delta'_\mu(\mu, e^{it}) \neq 0$. Значит, μ — простое собственное число оператора L_t , см. [6]. Для $t \notin \mathcal{T}(L)$ мы имеем $E(0; \mu, e^{it}) \neq 0$, и из уравнения (4.2) следует,

что $E(x; \mu, e^{it})$ — собственная функция, соответствующая μ . Теорема 4.1 выражает хорошо известное свойство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

§5. Спектральные разложения, порожденные оператором L

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.3. Наше доказательство основано на варианте преобразования Фурье, предложенном Гельфандом [4] для исследования дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами.

Для каждой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ мы полагаем, следуя [4],

$$F(x, t) = (\mathcal{G}f)(x, t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-irt} f(x + \pi r), \quad t \in [0, 2\pi],$$

и получаем функцию $F(x, t) \in L^2(Q)$, где $Q = \{(x, t) : x \in [0, \pi], t \in [0, 2\pi]\}$. Обратное преобразование задается формулой

$$f(x + \pi r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{irt} F(x, t) dt, \quad r \in \mathbb{Z}, x \in [0, \pi].$$

Поскольку

$$\|F\|_{L^2(Q)}^2 = \frac{1}{2\pi} \iint_Q |F(x, t)|^2 dx dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

преобразование Гельфанда $\mathcal{G}$ определяет изоморфное линейное отображение пространства $L^2(\mathbb{R})$ на $L^2(Q)$.

Для каждого $t \in [0, 2\pi]$ и $k = 1, \dots, 2n$ мы обозначаем через $J_k(t)$ множество всех целых чисел $j \in \mathbb{N}$, таких, что $\ell_j^{(k)} \cap \sigma(L_t) \neq \emptyset$.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M = 2\pi$ — это все точки исключительного множества $\mathcal{T}(L)$, определенного в лемме 4.2, и пусть $t \in (t_m, t_{m+1})$, где m — целое число, $0 \leq m \leq M-1$. Тогда каждому $j \in J_k(t)$ соответствует спектральная зона $\ell_j^{(k)}$, отрезок $S_j^{(k)} \subset [0, 2\pi]$ и функция $\mu_{jk}(t)$, $t \in S_j^{(k)}$, со свойствами, описанными в теореме 4.1. Концы m_{jk} и M_{jk} отрезков $S_j^{(k)}$ принадлежат множеству $\mathcal{T}(L)$, и

$$S_j^{(k)} = \bigcup_{p=m_{jk}}^{M_{jk}-1} [t_p, t_{p+1}].$$

Конечно, $m_{jk} \leq m \leq M_{jk}$ и при s , меняющемся от t_m до t_{m+1} , точка $\mu_{jk}(s)$ пробегает отрезок

$$\ell_{jm}^{(k)} = \{\mu : \mu = \mu_{jk}(s), s \in [t_m, t_{m+1}]\} \subset \ell_j^{(k)},$$

концы которого удовлетворяют условию $\mu_{jk}(t_m) < \mu_{jk}(t_{m+1})$, если $\mu'_{jk}(t) > 0$ при $t \in S_j^{(k)}$, или условию $\mu_{jk}(t_m) > \mu_{jk}(t_{m+1})$, если $\mu'_{jk}(t) < 0$ при $t \in S_j^{(k)}$. В любом случае множество $J_k(t)$ не меняется при изменении t внутри интервала (t_m, t_{m+1}) и

$$\ell_j^{(k)} = \bigcup_{p=m_{jk}}^{M_{jk}-1} \ell_{jm}^{(k)}. \quad (5.1)$$

Для произвольной функции $F \in L^2([0, \pi])$ положим

$$\phi(\mu, \rho; F) = \int_0^\pi F(y) E(y; \mu, \rho^{-1}) dy.$$

Если здесь

$$\mu = \mu_{jk}(t), \quad \rho = \rho_k(\mu_{jk}(t)) = e^{it}, \quad t \in (t_m, t_{m+1}), \quad F = \mathcal{G}f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

то

$$e^{itr} E(y; \mu_{jk}(t), e^{it}) = E(y + \pi r; \mu_{jk}(t), e^{it})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \phi(\mu_{jk}(t), e^{it}; F(\cdot, t)) &= \int_0^\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-irt} f(y + \pi r) E(y; \mu_{jk}(t), e^{-it}) dy \\ &= \int_0^\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(y + \pi r) E(y + \pi r; \mu_{jk}(t), e^{-it}) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) E(y; \mu_{jk}(t), e^{-it}) dy \\ &= \Phi(\mu_{jk}(t), \rho_k(\mu_{jk}(t)); f), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f)$ определено равенством (1.15).

Для доказательства теоремы 1.3 предположим, что f — произвольная функция из пространства $L^2(\mathbb{R})$ с преобразованием Гельфанда $F = \mathcal{G}f$. По теореме Фубини функция $F(\cdot, t)$ принадлежит пространству $L^2([0, \pi])$ для почти всех $t \in [0, 2\pi]$. Для каждого такого $t \notin \mathcal{T}(L)$ теорема 4.1 позволяет представить ее сходящимся по норме пространства $L^2([0, \pi])$ ортогональным рядом

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j \in J_k(t)} \Psi(\mu_{jk}(t), \rho_k(\mu_{jk}(t)); F(\cdot, t)) E(x; \mu_{jk}(t), \rho_k(\mu_{jk}(t))), \quad (5.3)$$

в котором $\Psi(\mu, \rho; f) = w(\mu, \rho) \Phi(\mu, \rho; f)$ и $w(\mu, \rho)$ определена формулой (4.8).

Для доказательства сходимости ряда (5.3) в пространстве $L^2(Q)$ введем частичные суммы

$$F_q(x, t) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j \in J_k(t), 1 \leq j \leq q} \Psi(\mu_{jk}(t), \rho_k(\mu_{jk}(t)); F(\cdot, t)) E(x; \mu_{jk}(t), \rho_k(\mu_{jk}(t)))$$

и положим $\Theta(\mu, \rho; f) = w(\mu, \rho) |\phi(\mu, \rho; f)|^2$. Ввиду ортогональности мы получаем

$$\|F_q(\cdot, t)\|_{L^2([0, \pi])}^2 = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j \in J_k(t), 1 \leq j \leq q} \Theta(\mu_{jk}(t), \rho_k(\mu_{jk}(t)); F(\cdot, t)).$$

Поскольку множество $J_k(t)$ не зависит от t внутри интервала (t_m, t_{m+1}) , мы можем проинтегрировать последнюю сумму почленно внутри каждого такого

интервала. После подстановки $\mu = \mu_{jk}(t)$ в j -е проинтегрированное слагаемое мы, принимая во внимание равенство (5.1), получаем

$$\begin{aligned} \|F_q\|_{L^2(Q)}^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|F_q(\cdot, t)\|_{L^2([0, \pi])}^2 dt \\ &= \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{1 \leq j \leq q} \int_{\ell_{jm}^{(k)}} p(\mu, \rho_k(\mu)) |\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f)|^2 d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{1 \leq j \leq q} \int_{\ell_j^{(k)}} p(\mu, \rho_k(\mu)) |\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f)|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Бесселя к ряду (5.3), получаем $\|F_q\|_{L^2(Q)}^2 \leq \|F\|_{L^2(Q)}^2 = \|f\|_{\mathbb{R}}^2$ и

$$\sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{N(k)} \int_{\ell_j^{(k)}} p(\mu, \rho_k(\mu)) |\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f)|^2 d\mu < \infty.$$

Поскольку

$$\|F_{q'} - F_{q''}\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{q' < j \leq q''} \int_{\ell_j^{(k)}} p(\mu, \rho_k(\mu)) |\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f)|^2 d\mu, \quad (5.4)$$

ряд (5.3) сходится к $F(x, t)$ по $L^2(Q)$ -норме, и мы можем почленно применить к нему обратное преобразование Гельфанда. Получившееся тождество

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{N(k)} \int_{\ell_j^{(k)}} p(\mu, \rho_k(\mu)) \Phi(\mu, \rho_k(\mu); f) E(x; \mu, \rho_k(\mu)) d\mu$$

совпадает с (1.16) при $\phi_k(\mu) = \Phi(\mu, \rho_k(\mu); f)$.

Пусть теперь $\Phi = \{\phi_k(\mu)\}_{k=1}^{2n} \in \mathcal{H}_{2n}^2(L)$. Тогда для $k = 1, \dots, 2n$ последовательности

$$\phi_k(\mu) = \{\phi_{jk}(\mu), \mu \in \ell_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots\}$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{N(k)} \int_{\ell_j^{(k)}} p(\mu, \rho_k(\mu)) |\phi_{jk}(\mu)|^2 d\mu < \infty. \quad (5.5)$$

Для $t \in (t_m, t_{m+1})$, $m = 0, \dots, M-1$, положим

$$F_q(x, t) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j \in J_k(t), 1 \leq j \leq q} w(\mu_{jk}(t), e^{it}) \phi_{jk}(\mu_{jk}(t)) E(x; \mu_{jk}(t), e^{it})$$

и получим

$$\|F_{q'}(\cdot, t) - F_{q''}(\cdot, t)\|_{L^2([0, \pi])}^2 = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j \in J_k(t), q' < j \leq q''} w(\mu_{jk}(t), e^{it}) |\phi_{jk}(\mu_{jk}(t))|^2.$$

Подобно уравнению (5.4), мы имеем

$$\|F_{q'} - F_{q''}\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{q' < j \leq q''} \int_{\ell_j^{(k)}} p(\mu, \rho_k(\mu)) |\phi_{jk}(\mu)|^2 d\mu.$$

Теперь из условия (5.5) вытекает, что $\{F_q\}_{q=1}^\infty$ является последовательностью Коши в пространстве $\mathcal{H}_{2n}^2(L)$ и, следовательно, существует функция

$$F(x, t) = \lim_{q \rightarrow \infty} F_q(x, t) \in L^2(Q).$$

Ее обратное преобразование Гельфанда $f = \mathcal{G}^{-1} F$ имеет вид

$$\begin{aligned} f(x + \pi r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{irt} F(x, t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{irt} \lim_{q \rightarrow \infty} F_q(x, t) dt \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{m=1}^{M-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \sum_{j \in J_k(t), 1 \leq j \leq q} p(\mu_{jk}(t), e^{it}) \phi_{jk}(\mu_{jk}(t)) E(x + \pi r; \mu_{jk}(t), e^{it}) dt \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{N(k)} \int_{\ell_j^{(k)}} p(\mu, \rho_k(\mu)) \phi_{jk}(\mu) E(x + \pi r; \mu, \rho_k(\mu)) d\mu. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого элемента $\Phi \in \mathcal{H}_{2n}^2(L)$ найдется такая функция $f \in L^2(\mathbb{R})$, что справедливо представление (1.16). Для завершения доказательства теоремы 1.3 мы покажем, что в этом представлении

$$\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f) = \phi_k(\mu), \quad \mu \in \sigma_k(L), \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Достаточно доказать предыдущее соотношение для ступенчатой функции

$$\Phi_\sigma = \{\phi_k(\mu)\}_{k=1}^{2n}, \quad \phi_k(\mu) = \begin{cases} 1, & k = k', \mu \in \sigma \subset \ell_{j'}^{(k')}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где σ — произвольный отрезок, лежащий внутри произвольной спектральной зоны $\ell_{j'}^{(k')}$ и такой, что соответствующий отрезок $S_{j'}^{(k')}$ не содержит точек исключительного множества $\mathcal{T}(L)$, так что функция $w(\mu_{j'k'}(t), e^{it})$ непрерывна на нем.

Сначала заметим, что функция $f_\sigma \in L^2(\mathbb{R})$, определенная посредством формулы (1.16) с $\Phi = \Phi_\sigma$, имеет вид

$$\begin{aligned} f_\sigma(x) &= \int_\sigma p(\mu, \rho_{k'}(\mu)) E(x; \mu, \rho_{k'}(\mu)) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_{j'}^{(k')}} w(\mu_{j'k'}(t), e^{it}) E(x; \mu_{j'k'}(t), e^{it}) dt, \end{aligned}$$

где $S_{j'}^{(k')} \subset S_{j'}^{(k')}$ — прообраз множества $\sigma \subset \ell_{j'}^{(k')}$ по отношению к функции $\mu_{j'k'}(t)$.

Далее, для каждого целого k , $1 \leq k \leq 2n$, и вещественного числа $\mu \in \sigma_k(L) \setminus \mathcal{E}_k(L)$ существует единственное целое число j , $1 \leq j < N(k)$, и вещественное

число $\tau \in \text{int } S_j^{(k)}$, такие, что $\mu = \mu_{jk}(\tau)$. Следовательно, согласно (1.15),

$$\begin{aligned}\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f_\sigma) &= \int_{\mathbb{R}} E(y; \mu, \overline{\rho_k(\mu)}) f_\sigma(y) dy \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=-N}^N \int_0^\pi E(y + \pi r; \mu, \overline{\rho_k(\mu)}) f_\sigma(y + \pi r) dy \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{S_{j'}^{(k')}} \delta_N(t - \tau) w(\mu_{j'k'}(t), e^{it}) dt \int_0^\pi E(y; \mu_{jk}(\tau), e^{-i\tau}) E(y; \mu_{j'k'}(t), e^{it}) dy,\end{aligned}$$

где

$$\delta_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-N}^N e^{irt}$$

— ядро Дирихле. Если μ не является концом отрезка $\ell_{j'}^{(k')}$, то

$$\begin{aligned}\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f_\sigma) \\ = \chi_\sigma(\mu_{jk}(\tau)) w(\mu_{j'k'}(\tau), e^{i\tau}) \int_0^\pi E(y; \mu_{jk}(\tau), e^{-i\tau}) E(y; \mu_{j'k'}(\tau), e^{i\tau}) dy,\end{aligned}$$

где $\chi_\sigma(\lambda)$ — характеристическая функция множества σ .

Если $k \neq k'$ и $\mu_{jk}(\tau) = \mu_{j'k'}(\tau) = \mu$, то $\rho_k(\mu) = \rho_{k'}(\mu)$ в противоречие с ограничением $\mu \notin \mathcal{E}_k(L)$, наложенным на μ . Это значит, что $\mu_{j'k'}(\tau) \neq \mu_{jk}(\tau)$ для каждого $k \neq k'$ и собственные функции $E(y; \mu_{jk}(\tau), e^{i\tau})$ и $E(y; \mu_{j'k'}(\tau), e^{i\tau})$ ортогональны при всех натуральных j и j' . Следовательно,

$$\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f_\sigma) = 0, \quad k \neq k', \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Для $k = k'$ мы пользуемся тем, что собственные функции $E(y; \mu_{jk}(\tau), e^{i\tau})$ и $E(y; \mu_{j'k}(\tau), e^{i\tau})$ ортогональны при $j \neq j'$, и формулой (4.2) и получаем равенство $\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f_\sigma) = \delta_{kk'} \delta_{jj'} \chi_\sigma(\mu)$, $\mu \in \ell_j^{(k')}$. Таким образом, $\{\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f_\sigma)\}_{k=1}^{2n} = \Phi_\sigma$, что завершает доказательство теоремы 1.3.

§6. Спектральная матрица и теорема единственности

Пусть $\mathcal{M}(\mu)$ — неотрицательная эрмитова матричнозначная функция размера $2n \times 2n$, определенная на спектре $\sigma(L)$. Обозначим через $L_{2n}^2(\mathcal{M})$ пространство комплексных $2n$ -вектор-функций $F = (F_q(\mu))_1^{2n}$ со скалярным произведением

$$(F, G) = \int_{\sigma(L)} (\mathcal{M}(\mu) F(\mu), G(\mu)) d\mu.$$

В соответствии с общим определением (см. [6]) $\mathcal{M}(\mu)$ называется спектральной матрицей оператора L , если соотношения

$$F_q(\mu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) u_q(\mu, x) dx, \quad q = 1, \dots, 2n, \quad (6.1)$$

и

$$f(x) = \int_{\sigma(L)} (\mathcal{M}(\mu) F(\mu), Y(x, \mu)) d\mu \quad (6.2)$$

с

$$Y(x, \mu) = \text{col}\{u_1(x, \mu), \dots, u_{2n}(x, \mu)\}$$

определяют взаимно однозначное соответствие между пространствами $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2_{2n}(\mathcal{M})$, сопрягающее операторы L и μI , причем интегралы в (6.1) и (6.2) сходятся по нормам соответствующих пространств. В результате выполняется равенство Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\sigma(L)} (\mathcal{M}(\mu)F(\mu), F(\mu)) d\mu. \quad (6.3)$$

Теорема 6.1. *Спектральная матрица $\mathcal{M}(\mu)$ оператора L имеет вид*

$$\mathcal{M}(\mu) = \sum_{k=1}^{2n} \chi_k(\mu) \mathcal{M}(\mu, \rho_k(\mu)), \quad (6.4)$$

где

$$\mathcal{M}(\mu, \rho) = p(\mu, \rho)(v_q(\mu, \rho)v_{q'}(\mu, \rho^{-1}))_{q, q'=1}^{2n}, \quad (6.5)$$

функция $p(\mu, \rho)$ определена равенством (1.10) и числа $v_q(\mu, \rho)$, $q = 1, \dots, 2n$, однозначно определяются разложением

$$E(x; \mu, \rho) = \sum_{q=1}^{2n} v_q(\mu, \rho) u_q(x, \mu).$$

Если два оператора вида (1.3) имеют

- (i) один и тот же характеристический полином $\Delta(\mu, \rho)$ и, следовательно, одну и ту же риманову поверхность $\mathcal{R}(L)$ и одну и ту же систему функций $\{\rho_k(\mu)\}_{k=1}^{2n}$, описанную в теореме 1.2,
- (ii) одну и ту же матрицу $\mathcal{M}(\mu, \rho)$ вида (6.5) и, следовательно, одну и ту же спектральную матрицу $\mathcal{M}(\mu)$, заданную уравнением (6.4),

то соответствующие коэффициенты этих операторов совпадают.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из пространства $L^2(\mathbb{R})$, и пусть функции $F_q(\mu)$ определены посредством формулы (6.1). Тогда, согласно (1.15), мы имеем

$$\Phi(\mu, \rho_k(\mu); f) = \sum_{q=1}^{2n} v_q(\mu, (\rho_k(\mu))^{-1}) F_q(\mu),$$

и теорема 1.3 утверждает, что для функций из пространства $L^2(\mathbb{R})$ имеют место представление (6.2) и равенство (6.3).

С другой стороны, пусть $F = \{F_q(\mu)\}_{q=1}^{2n}$ — произвольный элемент пространства $L^2_{2n}(\mathcal{M})$. Тогда

$$\int_{\sigma(L)} (\mathcal{M}(\mu)F(\mu), F(\mu)) d\mu < \infty,$$

и если

$$\phi_k(\mu) = \sum_{q=1}^{2n} v_q(\mu, (\rho_k(\mu))^{-1}) F_q(\mu),$$

то вектор $\Phi = \{\phi_k(\mu)\}_{k=1}^{2n}$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_{2n}^2(L)$. Мы снова применяем теорему 1.3 и получаем, что функция $f(x)$, определенная равенством (1.16), принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R})$, а само представление (1.16) совпадает с (6.2). Как мы только что видели, функция $f(x)$ представима и равенством (6.2) с

$$\tilde{F}_q(\mu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) u_q(\mu, x) dx, \quad q = 1, \dots, 2n.$$

Из равенства Парсеваля (6.3) следует, что $F = \tilde{F}$ и, значит, преобразование (6.1) отображает пространство $L^2(\mathbb{R})$ на $L_{2n}^2(\mathcal{M})$, так что $\mathcal{M}(\mu)$ — спектральная матрица оператора L .

Для доказательства второй части теоремы 6.1 мы предположим, что характеристический полином $\Delta(\mu, \rho)$ и спектральная матрица $\mathcal{M}(\mu)$ известны. Легко видеть, что если $\Delta(\mu, \rho) = 0$, $p(\mu, \rho) \neq \infty$ и если для фиксированного индекса q' вектор

$$V(\mu, \rho) = p(\mu, \rho) v_{q'}(\mu, \rho^{-1}) \{v_q(\mu, \rho)\}_{q=1}^{2n}$$

ненулевой, то он является собственным вектором матрицы монодромии $U(\mu)$, соответствующим собственному числу ρ . Теперь мы замечаем, что вектор-функция $V(\mu, \rho(\mu))$ является q' -й строкой матрицы $\mathcal{M}(\mu, \rho(\mu))$ и, следовательно, также известна.

Поскольку $v_1(\mu, \rho) = E(0; \mu, \rho)$, мы видим, что $V(\mu, \rho(\mu))$ — нетривиальная мероморфная вектор-функция на поверхности $\mathcal{R}(L)$, и, следовательно, ее нули и полюсы проектируются на дискретное множество $\mathcal{Z}_V(L)$ комплексной плоскости с единственной предельной точкой на бесконечности.

Предположим теперь, что $(\mu, \rho(\mu)) \in \mathcal{R}(L)$ — такая точка, что $\mu \notin \mathcal{Z}(L) \cup \mathcal{Z}_V(L)$, где $\mathcal{Z}(L)$ — дискриминантное множество для $\Delta(\mu, \rho)$. Тогда

- собственные числа $\rho_1(\mu), \dots, \rho_{2n}(\mu)$ матрицы монодромии $U(\mu)$ попарно различны;
- векторы $V(\mu, \rho_1(\mu)), \dots, V(\mu, \rho_{2n}(\mu))$ корректно определены, не обращаются в нуль и, следовательно, образуют линейно независимую систему в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$;
- $2n \times 2n$ -матрица $C(\mu, \rho(\mu))$, столбцы которой состоят из векторов этой системы, не вырождается;
- выполнено равенство

$$U(\mu) = C(\mu, \rho(\mu)) \operatorname{diag}\{\rho_1(\mu), \dots, \rho_{2n}(\mu)\} C(\mu, \rho(\mu))^{-1}, \quad \mu \notin \mathcal{Z}(L) \cup \mathcal{Z}_V(L).$$

Множители последнего произведения неоднозначны и не всюду аналитичны в $\mathbb{C}$: вращение точки μ вокруг проекции точки ветвления приводит к перестановке столбцов матрицы $C(\mu, \rho(\mu))^{-1}$, и каждая точка множества $\mathcal{Z}_V(L)$ может оказаться ее полюсом. Тем не менее все произведение однозначно в $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{Z}(L) \cup \mathcal{Z}_V(L))$ и совпадает с матричной функцией $U(\mu)$ вне дискретного множества сингулярных точек. Значит, эти точки — устранимые особенности произведения, а это означает, что знание спектральной матрицы $\mathcal{M}(\mu)$ позволяет полностью восстановить матрицу монодромии. По теореме единственности Лейбензона [9] последняя однозначно определяет все коэффициенты оператора (1.3), и теорема 6.1 доказана.

Из теоремы 6.1 следует, что спектральная матрица $\mathcal{M}(\mu)$ определяет коэффициенты оператора (1.3) однозначно. Для операторов Хилла (1.1) на всей

вещественной оси это утверждение хорошо известно и является вариантом теоремы Марченко [16] для произвольных операторов Штурма–Лиувилля на полуоси, которая перенесена Рофе-Бекетовым [17] на такие же операторы на всей оси.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction problems with periodic potentials*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **203** (1950), 501–514.
- [2] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions associated with Second-Order Differential Equations*, Part II, Oxford University Press, Oxford, 1958.
- [3] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, т. 2: *Спектральная теория*, Мир, М., 1966.
- [4] И. М. Гельфанд, *Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами*, Докл. АН СССР, **73**:6 (1950), 1117–1120.
- [5] В. И. Храбустовский, *Разложение по собственным функциям периодических систем с весом*, Докл. АН УССР, сер. А, 1984, № 5, 26–29.
- [6] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [7] Ван дер Варден, *Алгебра*, Наука, М., 1979.
- [8] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, т. 1, 2, Наука, М., 1967.
- [9] З. Л. Лейбензон, *Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных уравнений*, Труды ММО, **15** (1966), 70–144.
- [10] V. Tkachenko, *Spectrum of 1d selfadjoint periodic differential operator of order 4*, Contemp. Math., **327** (2003), 331–340.
- [11] Р. Курант, А. Гурвиц, *Теория функций*, Наука, М., 1968.
- [12] N. N. Meiman, *The theory of one-dimensional Schrödinger operators with a periodic potential*, J. Math. Phys., **18**:4 (1977), 834–848.
- [13] Л. А. Пастур, В. А. Ткаченко, *Спектральная теория одномерных операторов Шрёдингера с предельно-периодическим потенциалом*, Докл. АН СССР, **279**:5 (1984), 1050–1053.
- [14] М. Г. Крейн, *Основные положения теории λ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*, в кн.: Памяти А. А. Андропова, М., 1955, 413–498.
- [15] В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами*, Наука, М., 1972.
- [16] В. А. Марченко, *Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I*, Труды ММО, **1** (1952), 327–420.
- [17] Ф. С. Рофе-Бекетов, *Спектральная матрица и обратная задача Штурма–Лиувилля на оси $(-\infty, +\infty)$* , Теория функций, функц. анализ и приложен., **4** (1967), 189–197.

Department of Mathematics
Ben-Gurion University of the Negev, Israel
email: tkachenk@math.bgu.ac.il

Поступило в редакцию
15 мая 2006 г.