Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Журавлев, Критерий гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с рациональным периодом, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 1, 90–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:49:26

Критерий гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с рациональным периодом*

© 2007. Н. Б. ЖУРАВЛЕВ

1. Рассмотрим осциллирующие периодические решения уравнения

$$x'(t) = f(x(t), x(t-1), \dots, x(t-n)), \quad (1)$$

где $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. В случае рациональных периодов мы получим необходимые и достаточные условия гиперболичности периодического решения $\tilde{x}$ уравнения (1). В случае одного запаздывания ($n = 1$) предлагаемые результаты также являются новыми.

2. Пусть $C = C([-n, 0], \mathbb{R})$ и $C_{\mathbb{C}} = C([-n, 0], \mathbb{C})$ — банаховы пространства непрерывных функций на $[-n, 0]$ с нормой $\|\phi\| = \max_{t \in [-n, 0]} |\phi(t)|$. Под решением уравнения (1) понимается либо вещественнозначная дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая уравнению (1) всюду, либо вещественнозначная непрерывная функция, определенная на некотором неограниченном полуинтервале $[t_0 - n, \infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, которая дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1) для любого $t > t_0$. Если y — отображение интервала $[t - n, t]$ в множество B , то функция $y_t: [-n, 0] \rightarrow B$ определяется формулой $y_t(s) = y(t + s)$. Таким образом, решения $x = y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1) определяют траектории $o(y) = \{y_t : t \in \mathbb{R}\} \subset C$.

Предположим, что существует T -периодическое решение $\tilde{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1). Поведение траекторий $o(y)$ решений уравнения (1), близких к периодической орбите $o(\tilde{x})$, определяется спектром оператора монодромии $\mathcal{M}: C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$, действующего по формуле $\mathcal{M}\phi = v_T^{\phi}$, где $v^{\phi}: [-n, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — решение начальной задачи

$$v'(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) v(t-k) \quad (t > 0), \quad v_0 = \phi \in C_{\mathbb{C}},$$

$$\alpha_k(t) = \frac{\partial}{\partial y_k} f(y_0(t), y_1(t), \dots, y_n(t)) \Big|_{y_i(t) = \tilde{x}(t-i), i=0, \dots, n} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Оператор $\mathcal{M}^j$, где $j \in \mathbb{N}$ и $jT \geq n$, является компактным. Поэтому все точки $\lambda \neq 0$ спектра оператора $\mathcal{M}$ — изолированные собственные значения конечной алгебраической кратности $m(\lambda)$. Эти собственные значения называются мультипликаторами Флоке. Сужение функции $\tilde{x}'$ на отрезок $[-n, 0]$ является собственной функцией оператора монодромии. Ей соответствует мультипликатор Флоке $\lambda = 1$. Изложение общей теории функционально-дифференциальных уравнений, включающей свойства мультипликаторов Флоке, можно найти в [5] и [4].

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00256).

Если мультипликатор Флоке 1 простой ($m(1) = 1$) и на единичной окружности нет других мультипликаторов Флоке, то периодическое решение $\tilde{x}$ называется гиперболическим. В этом случае траектории, близкие к $o(\tilde{x})$ и определенные на неограниченных полуинтервалах, стремятся к $o(\tilde{x})$ при $|t| \rightarrow \infty$, см. [4, гл. XIV].

Исследованию мультипликаторов Флоке и их применению к теории осциллирующих решений функционально-дифференциальных уравнений посвящено много работ (см. библиографию в [1] и [7]). Например, влияние мультипликаторов Флоке на свойства медленно осциллирующих решений изучалось в [2]. Исследование кратности упорядоченной последовательности мультипликаторов Флоке содержится в [6]. Однако конструктивные результаты, позволяющие проверить условия гиперболичности, были получены лишь в очень частных случаях; см., например [3], где рассматриваются решения с периодом $T = 4$. Впервые как необходимые, так и достаточные условия гиперболичности для произвольных рациональных и иррациональных периодов в терминах нулей некоторого характеристического уравнения были получены в [1] и [7] в случае $n = 1$. Развивая методы этих работ, мы получаем необходимые и достаточные условия гиперболичности для произвольного $n \geq 1$ и рационального периода. (Основное отличие от результатов из [1] и [7] мы отметим в замечании 2.)

3. Пусть $T = N/M$, где $N, M \in \mathbb{N}$ — взаимно простые числа. Положим $\tau = 1/M$.

Теорема 1. *Пространство решений уравнения*

$$(\mathcal{M} - \lambda I)^2 \phi = 0 \quad (2)$$

изоморфно пространству решений следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$U'(t) = \sum_{k=0}^n A_k(t) R_k U(t) \quad (t \in (0, \tau)), \quad (3)$$

$$u_{i+1}(0) - u_i(\tau) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2N - 1), \quad u_1(0) - 2\lambda^{-1}u_N(\tau) + \lambda^{-2}u_{2N}(\tau) = 0, \quad (4)$$

где $A_k(t) = \text{diag}(\alpha_k(t + (i - 1)\tau))_{i=1}^{2N} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$, $R_k \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ — матрицы с постоянными коэффициентами,

$$(R_k)_{ij} = \frac{(d_{ki} + 1)\delta_{i-kM+d_{ki}N,j}}{\lambda^{d_{ki}}} - \frac{d_{ki}\delta_{i-kM+(d_{ki}+1)N,j}}{\lambda^{d_{ki}+1}} \quad (i, j = 1, \dots, 2N),$$

$$d_{ki} = \min\{p \in \mathbb{N} : i - kM + pN > 0\}.$$

Отображение, осуществляющее данный изоморфизм, определяется формулой

$$u_i(t) = v^\phi(t + (i - 1)\tau) \quad (t \in [0, \tau], i = 1, \dots, 2N).$$

Замечание 1. Легко видеть, что при $T > n$ в записанных выше формулах d_{ki} принадлежит $\{0, 1\}$ при всех используемых значениях параметров i и k . В этом случае соответствующие формулы обретают более простой вид. При $T = n$ происходят еще более существенные упрощения. Условия гиперболичности, получаемые при отмеченных предположениях, принципиально не отличаются от полученного ниже общего критерия. Если $T = n = 1$, то $\tilde{x} = \text{const}$, см. [7], т. е. $\tilde{x}$ не осциллирует.

4. Решения краевой задачи (3), (4) определяются по формуле

$$U(t) = S_\lambda(t)c \quad (t \in [0, \tau]),$$

где S_λ — такая фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (3), что $S_\lambda(0) = E$, c — решение уравнения $Q(\lambda)c = 0$,

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{\lambda 1}(0) - 2e_{\lambda N}(\tau)/\lambda + e_{\lambda, 2N}(\tau)/\lambda^2 \\ e_{\lambda 2}(0) - e_{\lambda 1}(\tau) \\ \vdots \\ e_{\lambda, 2N}(0) - e_{\lambda, 2N-1}(\tau) \end{pmatrix},$$

$e_{\lambda i}$ обозначает i -ю строку матрицы S_λ . Матричнозначная функция $S_\lambda(t)$ задает изоморфизм между пространством решений задачи (3), (4) и пространством решений уравнения $Q(\lambda)c = 0$. Поэтому размерность ядра $\dim \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^2)$ равна $2N - \text{rank } Q(\lambda)$. Аналогичный подход был использован в работах [1], [7], где уравнение $\mathcal{M} - \lambda I = 0$ сводилось к краевой задаче для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Обозначим через $\hat{Q}$ матрицу, которая использовалась в [1], [7] при решении краевой задачи (аналогичную матрице Q).

Положим $N_Q = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \det Q(\lambda) = 0\}$. Поскольку $m(\lambda) = 1$ тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 1$, имеет место следующий критерий:

Теорема 2. *Периодическое решение $\tilde{x}$ уравнения (1) с рациональным периодом $T \in \mathbb{Q}$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда $\{\lambda \in N_Q : |\lambda| = 1\} = \{1\}$ и $\text{rank } Q(1) = 2N - 1$.*

Замечание 2. В работах [1], [7] алгебраическая кратность мультипликаторов Флоке исследовалась иначе. В результате необходимые условия гиперболичности отличались от достаточных. А именно, при доказательстве необходимости использовалось дополнительное ограничение: специальным образом выделялись элементы матрицы $\tilde{Q}$, присоединенной к матрице $\hat{Q}$, и требовалось, чтобы среди этих элементов при $\lambda = 1$ нашелся хотя бы один ненулевой. (В случае $n > 1$ это ограничение имеет более сложный вид.) В настоящее время нет результатов относительно связи указанного дополнительного ограничения, используемого в [1], [7], с необходимыми условиями гиперболичности.

Автор выражает благодарность за внимание, поддержку и ценные замечания своему научному руководителю проф. А. Л. Скубачевскому.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Х.-О. Вальтер, А. Л. Скубачевский, Труды ММО, **64** (2003), 3–53. [2] S. N. Chow, O. Diekmann, J. Mallet-Paret, Japan J. Appl. Math., **2** (1985), 433–469. [3] S. N. Chow, H.-O. Walther, Trans. Amer. Math. Soc., **307**:1 (1988), 127–142. [4] O. Diekmann, S. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H. O. Walther, *Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995. [5] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993. [6] J. Mallet-Paret, G. Sell, J. Differential Equations, **125**:2 (1996), 385–440. [7] A. L. Skubachevskii, H.-O. Walther, J. Dynam. Differential Equations, **18**:2 (2006), 257–355.