Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Т. Караев, Применение теории банаховых алгебр к формуле сложения спектральных кратностей семейств операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 1, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2855>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:46:30

УДК 517.983.23

Применение теории банаховых алгебр к формуле сложения спектральных кратностей семейств операторов

© 2007. М. Т. КАРАЕВ

1. Введение. Обозначим через $\mathcal{B}(X, Y)$ пространство ограниченных линейных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y ; в случае когда $X = Y$, мы будем писать просто $\mathcal{B}(X)$. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, а $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(X)$ — ее представление. Если в алгебре $\mathcal{A}$ есть единица e , мы требуем, чтобы $\pi(e) = I$. Определим для элемента $a \in \mathcal{A}$ оператор $L_a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ условием $L_a(x) = ax$. Отображение $L: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A})$, $L(a) = L_a$, является алгебраическим гомоморфизмом и называется регулярным представлением алгебры $\mathcal{A}$.

Напомним, что множество $M \subset X$ называется циклическим для семейства операторов $\mathcal{T}$ на банаховом пространстве X , если наименьшее $\mathcal{T}$ -инвариантное подпространство пространства X , содержащее M , совпадает с X . Минимальная из мощностей циклических множеств для семейства $\mathcal{T}$ называется его спектральной кратностью и обозначается через $\mu(\mathcal{T})$. Представление π алгебры $\mathcal{A}$ называется циклическим, если существует такой вектор $x \in X$, что множество $\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\}$ плотно в X . Каждый вектор x , удовлетворяющий этому условию, называется циклическим вектором представления π . Спектральная кратность представления определяется естественным образом и обозначается через $\mu(\pi)$ (подробнее об этом см. в [1] и [4]). Очевидно, что $\mu(L) = 1$, если в алгебре $\mathcal{A}$ имеется единица.

Спектральная кратность — важный инвариант операторов, играющий ключевую роль в теории операторов и ее приложениях. Разумеется, понятие циклического множества связано с общей проблемой инвариантных подпространств, поскольку у оператора $A \in \mathcal{B}(X)$ нет нетривиальных инвариантных подпространств тогда и только тогда, когда всякий вектор $x \in X \setminus \{0\}$ является циклическим для A . Циклические векторы используются также в теории приближений полиномами с весом. (Более подробное изложение см., например, в [2]–[6].)

Если даны два представления, $\pi_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(X_1)$ и $\pi_2: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(X_2)$, алгебры $\mathcal{A}$, то их прямая сумма $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(X_1 \oplus X_2)$ определяется равенством $\pi(a) = \pi_1(a) \oplus \pi_2(a)$. Известно, что

$$\max\{\mu(\pi_1), \mu(\pi_2)\} \leq \mu(\pi_1 \oplus \pi_2) \leq \mu(\pi_1) + \mu(\pi_2). \quad (1)$$

Возникает естественный вопрос: когда $\max\{\mu(\pi_1), \mu(\pi_2)\} = \mu(\pi_1 \oplus \pi_2)$? Когда, с другой стороны,

$$\mu(\pi_1 \oplus \pi_2) = \mu(\pi_1) + \mu(\pi_2)? \quad (2)$$

В настоящей статье мы докажем формулу сложения (2) при некоторых дополнительных условиях. Наши рассуждения основываются на известном результате Лина [7] для банаховых алгебр.

2. Основной результат. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная банахова алгебра с единицей e , а $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ — пространство ее максимальных идеалов. В статье [7] Лин рассмотрел задачу дополнения строки $a = (a_1, \dots, a_n)$ из элементов $a_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, до $(n \times n)$ -матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ ($a_{1j} = a_j$, $j = 1, \dots, n$) с

элементами из $\mathcal{A}$, которая обратима в алгебре матриц над $\mathcal{A}$. Если такая матрица существует, то строка $a = (a_1, \dots, a_n)$ называется дополняемой. Очевидное необходимое условие дополняемости строки состоит в существовании таких элементов $b_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, для которых

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = e. \quad (3)$$

Иными словами, множество $\{a_1, \dots, a_n\}$ не содержится ни в каком собственном идеале алгебры $\mathcal{A}$. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию Лина, если из условия (3) следует, что строка $a = (a_1, \dots, a_n)$ дополняема; Лин доказал [7], что это условие выполнено для алгебр $\mathcal{A}$ со стягиваемым пространством максимальных идеалов $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и для некоторых других алгебр.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная банахова алгебра с единицей, удовлетворяющая условию Лина, а L — ее регулярное представление. Тогда $\mu(L \oplus \tau) = 1 + \mu(\tau)$ для любого представления τ алгебры $\mathcal{A}$.

Сначала мы докажем следующую ключевую лемму.

Лемма 2. Пусть $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(X_1)$ и $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(X_2)$ — представления алгебры $\mathcal{A}$ (не обязательно коммутативной), и пусть $\{\xi_1 \oplus \eta_1, \dots, \xi_n \oplus \eta_n\}$ — циклическое множество представления $\pi \oplus \tau$. Если существует сплетающий оператор $W \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$ (т. е. $W\pi(b) = \tau(b)W$ для всех $b \in \mathcal{A}$), для которого $W\xi_1 = \eta_1$, то $\mu(\tau) < n$.

Доказательство. Пусть $\eta \in X_2$ — произвольный вектор. Тогда существуют элементы $b_{j,i} \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, для которых $\lim_j \sum_{i=1}^n (\pi(b_{j,i}) \oplus \tau(b_{j,i}))(\xi_i \oplus \eta_i) = 0 \oplus \eta$ в пространстве $X_1 \oplus X_2$, т. е. $\lim_j (\sum_{i=1}^n \pi(b_{j,i})\xi_i \oplus \sum_{i=1}^n \tau(b_{j,i})\eta_i) = 0 \oplus \eta$. Отсюда следует, что

$$\lim_j \sum_{i=1}^n \pi(b_{j,i})\xi_i = 0 \quad \text{в } X_1, \quad (4)$$

$$\lim_j \sum_{i=1}^n \tau(b_{j,i})\eta_i = \eta \quad \text{в } X_2. \quad (5)$$

Используя свойства оператора W , из равенства (4) получаем, что

$$\lim_j \sum_{i=1}^n W\pi(b_{j,i})\xi_i = \lim_j \sum_{i=1}^n \tau(b_{j,i})W\xi_i = 0$$

в пространстве X_2 . Введем обозначение $\epsilon_j = \tau(b_{j,1})\eta_1 + \sum_{i=2}^n \tau(b_{j,i})W\xi_i$. Очевидно, что $\lim_j \epsilon_j = 0$ в X_2 и $\tau(b_{j,1})\eta_1 = \epsilon_j - \sum_{i=2}^n \tau(b_{j,i})W\xi_i$. Подставляя это выражение в формулу (5), получаем равенство $\lim_j (\epsilon_j + \sum_{i=2}^n \tau(b_{j,i})(\eta_i - W\xi_i)) = \eta$, или $\lim_j \sum_{i=2}^n \tau(b_{j,i})(\eta_i - W\xi_i) = \eta$, откуда заключаем, что множество $\{\eta_2 - W\xi_2, \dots, \eta_n - W\xi_n\}$ является циклическим для представления τ , т. е. $\mu(\tau) < n$, что и требовалось. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Если $\mu(\tau) = \infty$, то благодаря неравенствам (1) утверждение теоремы очевидно, так что мы будем считать в дальнейшем, что $\mu(\tau) = n < \infty$.

Заметим, что любой набор векторов в пространстве представления может быть переведен в другой набор при помощи матрицы с элементами из $\mathcal{A}$. Если эта матрица обратима, то циклическое множество переходит в циклическое. Такие множества мы будем называть эквивалентными.

Для доказательства теоремы теперь заметим, что если $\mu(L \oplus \tau) = \mu(\tau) = n$, а множество $\{a_1 \oplus \eta_1, \dots, a_n \oplus \eta_n\}$ является циклическим для $L \oplus \tau$, то (благодаря условию Лина), подействовав на это множество подходящей обратимой матрицей, мы получим эквивалентное множество, в котором $a_1 = e$. Определим теперь оператор $W: \mathcal{A} \rightarrow X$, положив $Wb = \tau(b)\eta_1$. Легко видеть, что это сдвигающий оператор и что $We = \eta_1$. В самом деле,

$$WL(a)b = WL_ab = Wab = \tau(ab)\eta_1 = \tau(a)\tau(b)\eta_1 = \tau(a)Wb$$

при всех $a, b \in \mathcal{A}$, так что $We = \tau(e)\eta_1 = \eta_1$. Остается сослаться на лемму 2. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекают следующие результаты.

Пример 3. Пусть $W_A(\mathbb{D}^n)$ — винерова алгебра на полидиске $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D}$,

$$W_A(\mathbb{D}^n) = \left\{ f : f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha z^\alpha, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \sum_{|\alpha| \geq 0} |c_\alpha| < +\infty \right\},$$

и пусть $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$, где $T_i f = z_i f$, $f \in W_A(\mathbb{D}^n)$. Тогда $\mu(\mathcal{T} \oplus \mathcal{U}) = \mu(\mathcal{T}) + \mu(\mathcal{U}) = 1 + \mu(\mathcal{U})$ для любого семейства $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ попарно коммутирующих сжимающих операторов U_i на банаховом пространстве X .

Пример 4. Пусть дана алгебра

$$C_A(\mathbb{D}^n) = \left\{ f = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha z^\alpha : f \in \text{Hol}(\mathbb{D}^n) \cap C(\overline{\mathbb{D}^n}) \right\}$$

аналитических функций на полидиске $\mathbb{D}^n$, и пусть $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$, где $T_i f = z_i f$, $f \in C_A(\mathbb{D}^n)$. Тогда $\mu(\mathcal{T} \oplus \mathcal{U}) = \mu(\mathcal{T}) + \mu(\mathcal{U}) = 1 + \mu(\mathcal{U})$ для любого семейства $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ попарно коммутирующих операторов U_i , удовлетворяющих условию

$$\|p(U_1, \dots, U_n)\| \leq c \|p\|_{C_A(\mathbb{D}^n)},$$

где $c > 0$ — некоторая константа, а p — произвольный полином.

Автор благодарен рецензенту за конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972. [2] N. Dunford, L. Schwartz, *Linear operators, Part I: General theory*, Springer-Verlag, New York, 1958. [3] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. [4] Н. К. Никольский, *Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций*, Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, 1974. [5] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980. [6] B. Szökefalvi-Nagy, C. Foias, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland, Amsterdam, 1970. [7] В. Я. Лин, Функц. анализ и его прил., 7:2 (1973), 43–51.