Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 2, 3–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:27:51

УДК 517.956

Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости*

© 2007. М. Ш. БИРМАН, Т. А. СУСЛИНА

*Посвящается светлой памяти великого математика
Марка Григорьевича Крейна*

Введение

0.1. Постановка задачи. В работе изучается задача об усреднении (гомоенизации) стационарной периодической системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$. Эта задача много изучалась традиционными методами теории усреднений (см., например, [2], [9], [1], [8]). Теоретико-операторный подход, предложенный авторами в статьях [3], [4], применялся к системе Максвелла в [4, гл. 7] и в [10], [11]. Начнем с обзора соответствующих результатов.

Ниже через $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^n)$ обозначается L_2 -пространство $\mathbb{C}^n$ -значных функций в $\mathbb{R}^3$, а $H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^n)$, $s > 0$, — соответствующие классы Соболева. При $n = 1$ пишем просто $L_2(\mathbb{R}^3)$, $H^s(\mathbb{R}^3)$. Положим

$$\mathfrak{G} = L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3), \quad J = \{\mathbf{f} \in \mathfrak{G} : \operatorname{div} \mathbf{f} = 0\}.$$

Пусть Γ — решетка периодов в $\mathbb{R}^3$ и Ω — элементарная ячейка решетки Γ . Диэлектрическая проницаемость $\eta(\mathbf{x})$ и магнитная проницаемость $\mu(\mathbf{x})$ суть Γ -периодические матрицы, ограниченные и положительно определенные. Через $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ обозначаются напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{w} = \eta \mathbf{u}$ — индукция электрического поля, $\mathbf{z} = \mu \mathbf{v}$ — индукция магнитного поля. Оператор Максвелла $\mathcal{M}$ мы записываем в терминах индукций, считая векторы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{z}$ соленоидальными. Тогда оператор $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\eta, \mu)$ действует в пространстве $J \oplus J$ и задается формулой

$$\mathcal{M}(\eta, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & i \operatorname{rot} \mu^{-1} \\ -i \operatorname{rot} \eta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на естественной области определения (см. ниже формулу (2.1)). Точка $\lambda = i$ является регулярной точкой для оператора $\mathcal{M}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — параметр. Рассмотрим семейство операторов $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{M}(\eta^\varepsilon, \mu^\varepsilon)$ с быстро осциллирующими при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициентами $\eta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\mu^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mu(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Мы изучаем поведение резольвенты $(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Иначе говоря, речь идет о поведении при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ уравнения

$$(\mathcal{M}_\varepsilon - iI) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{r} \in J, \quad (0.1)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-01076-а, 05-01-02944-ЯФ-а).

а также соответствующих напряженностей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon$. В подробной записи уравнение (0.1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{w}_\varepsilon &= -i\mathbf{q}, \\ \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon + \mathbf{z}_\varepsilon &= i\mathbf{r}, \\ \operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon = 0. \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

«Усредненный» (эффективный) оператор Максвелла $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}(\eta^0, \mu^0)$ определяется коэффициентами η^0 , μ^0 , где η^0 (соответственно μ^0) — эффективная матрица, отвечающая эллиптическому оператору $-\operatorname{div} \eta(\mathbf{x}) \nabla$ (соответственно $-\operatorname{div} \mu(\mathbf{x}) \nabla$). (Определение матрицы η^0 приведено ниже, см. (1.4), (1.5).) «Эллиптическое» правило усреднения коэффициентов для системы Максвелла хорошо известно. Пусть $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{z}_0$ — решение «усредненной» системы

$$(\mathcal{M}^0 - iI) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (0.3)$$

и $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1} \mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0 = (\mu^0)^{-1} \mathbf{z}_0$. Известно (см., например, [2], [9], [1], [8]), что вектор-функции $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *слабо сходятся* в $\mathfrak{G}$ к полям $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{z}_0$ соответственно. Близкие результаты известны и для нестационарной системы Максвелла.

0.2. Применение подхода, предложенного в [3], [4], позволяет взамен слабой сходимости получать *равномерные аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ с точной по порядку оценкой остатка*. До сих пор, однако, удавалось получить такие аппроксимации не для всех полей. Поясним это подробнее.

Полезно представить каждое из полей в виде суммы двух слагаемых: $\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, где векторы $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ являются решением системы (0.2) при $\mathbf{r} = 0$, а векторы $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ — решением системы (0.2) при $\mathbf{q} = 0$. Соответственно в виде сумм представляются и поля $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$. Таким образом, фактически мы интересуемся поведением *восьми полей* при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В гл. 7 работы [4] рассматривался случай $\mu = 1$. (Впрочем, рассуждения из [4, гл. 7] автоматически обобщаются и на случай постоянного μ .) При этом $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon$, и речь идет о шести полях. Для одного из них, а именно для магнитной напряженности $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} = \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, была получена аппроксимация по норме в $\mathfrak{G}$:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C\varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (0.4)$$

Здесь поле $\mathbf{v}_0^{(r)} = \mathbf{z}_0^{(r)}$ является (вместе с $\mathbf{w}_0^{(r)}$) решением усредненной системы (0.3) при $\mathbf{q} = 0$ (и $\mu^0 = 1$).

Метод из [4, гл. 7] состоит в сведении к уравнению второго порядка. Поле $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ (см. систему (0.2) при $\mathbf{q} = 0$, $\mu^\varepsilon = 1$) является решением задачи

$$\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} = i\mathbf{r}, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} = 0. \quad (0.5)$$

Затем система (0.5) *расширяется*, и дело сводится к изучению *эллиптического* оператора второго порядка

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}(\eta^\varepsilon, 1, 1) = \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} - \nabla \operatorname{div},$$

действующего в пространстве $\mathfrak{G}$ (ср. с оператором (1.1) ниже). Этот оператор входит в общий класс ДО (дифференциальных операторов), выделенный и изученный в [3], [4]. К нему применим общий результат из [3], [4] об аппроксимации резольвенты по операторной норме в $\mathfrak{G}$ через резольвенту эффективного оператора $\mathcal{L}^0$:

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (0.6)$$

Здесь $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}(\eta^0, \mathbf{1}, 1)$. (См. ниже теорему 1.1.) В результате применения оценки (0.6) и получается аппроксимация (0.4).

Для оставшихся (пяти) полей в [4, гл. 7] получалась лишь слабая сходимость в $\mathfrak{G}$ к соответствующим «усредненным» полям.

0.3. В работе [10], [11] изучался общий случай переменных периодических коэффициентов $\eta(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$. Были получены равномерные аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ для четырех полей из восьми, а именно для $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}$, $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$, с точной по порядку оценкой погрешности. Помимо основного члена (решения усредненной системы) аппроксимации содержат слагаемые нулевого порядка, быстро осциллирующие при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. формулы (2.45), (2.46), (2.49) ниже). Эти члены можно интерпретировать как *корректоры нулевого порядка*.

Для полей $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ дело сводится к изучению оператора второго порядка

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}(\eta^\varepsilon, \mu^\varepsilon, 1) = (\mu^\varepsilon)^{-1/2} \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2} - (\mu^\varepsilon)^{1/2} \nabla \operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}, \quad (0.7)$$

а для полей $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}$, $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$ — к изучению аналогичного оператора $\mathcal{L}(\mu^\varepsilon, \eta^\varepsilon, 1)$. Оператор (0.7) (при переменном μ) уже не входит в класс ДО, выделенный в [3], [4]. Однако к нему применимы результаты *абстрактной* теоретико-операторной схемы из [4, гл. 1]. На основе этой абстрактной схемы оператор (0.7) был изучен в [11], где для его резольвенты $(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1}$ была получена аппроксимация по операторной норме в $\mathfrak{G}$ с точной по порядку оценкой погрешности. Это позволило получить упомянутые аппроксимации для четырех полей.

0.4. В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда магнитная проницаемость μ — *постоянная положительная матрица*: $\mu = \mu_0 = \operatorname{Const}$. Для этого случая нам сейчас удалось получить равномерные аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ для всех восьми полей (с оценкой погрешности порядка ε). Кроме того, для двух полей $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ и $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ получаются более точные аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ (с оценкой погрешности порядка ε^2) и аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}^1 := H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ с оценкой погрешности порядка ε . В этих аппроксимациях учитывается корректор первого порядка.

Мы опираемся не только на уже упоминавшиеся работы [4] и [10], [11], но и на недавние работы [6], [7], в которых задача об усреднении для класса ДО, выделенного в [3], [4], изучалась с учетом корректора.

Для полей $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ вопрос сводится к изучению оператора $\mathcal{L}(\eta^\varepsilon, \mu_0, 1)$ (ср. (0.7)). Ниже в §1 мы рассматриваем несколько более общий оператор

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}(\eta^\varepsilon, \mu_0, \nu^\varepsilon) = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \nu^\varepsilon \operatorname{div} \mu_0^{1/2}. \quad (0.8)$$

Здесь $\nu(\mathbf{x})$ есть Γ -периодическая ограниченная положительная функция и $\nu^\varepsilon(\mathbf{x}) = \nu(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Оператор (0.8) (при постоянном μ_0) входит в класс ДО, выделенный в [3], [4]. Из общих результатов этих работ получается оценка вида (0.6) для оператора (0.8). Сейчас $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}(\eta^0, \mu_0, \underline{\nu})$, где $\underline{\nu}^{-1} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \nu(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x}$.

Применение этого результата дает аппроксимации для полей $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ через соответствующие «усредненные» поля:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C\varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad \|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C\varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Далее, применяя общие результаты из [6], для резольвенты $(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1}$ получаем аппроксимацию по операторной норме в $\mathfrak{G}$ с оценкой погрешности порядка ε^2 (ср. § 14 из [6], где рассматривался случай $\mu = 1$). В аппроксимации учитывается корректор первого порядка. Соответствующий результат сформулирован ниже в теореме 1.2. На этой основе получаются более точные аппроксимации в $\mathfrak{G}$ для полей $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ (с погрешностью порядка ε^2).

Общие результаты работы [7] в применении к оператору (0.8) позволяют аппроксимировать резольвенту $(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^1$ с оценкой погрешности порядка ε (ср. § 22 из [7], где рассматривался случай $\mu = 1$). При этом учитывается корректор первого порядка. Соответствующий результат приведен ниже в теореме 1.3. Его применение дает аппроксимации для полей $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ по норме в $\mathfrak{G}^1$ с погрешностью порядка ε .

Далее, поля $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$ выражаются через производные от $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$:

$$\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} = \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}, \quad \mathbf{u}_\varepsilon^{(r)} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}.$$

При этом $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$ играет роль так называемого «потока» для поля $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$. На основе результатов из [7] об аппроксимации потоков по норме в $\mathfrak{G}$ удастся получить равномерные аппроксимации в $\mathfrak{G}$ для $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$ и $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$ (с погрешностью порядка ε). Эти аппроксимации (см. ниже (2.26), (2.27)) помимо соответствующих усредненных полей содержат слагаемые, быстро осциллирующие при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эти слагаемые можно интерпретировать как корректоры нулевого порядка.

Что касается полей $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}$ и $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$, то мы используем готовый результат из [10], [11], где для этих полей были получены равномерные аппроксимации в $\mathfrak{G}$ с погрешностью порядка ε . Наконец, результат для полей $\mathbf{v}_\varepsilon^{(q)}$ и $\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ получается на основе теоремы из [7] об аппроксимации «потоков» (см. ниже теорему 1.5), если перейти к сопряженным операторам.

Основные результаты работы приведены в теореме 2.1 (для случая $\mathbf{q} = 0$) и в теореме 2.4 (для случая $\mathbf{r} = 0$). Мы видим, что комбинация результатов работ [4], [10], [11], [6] и [7] позволяет в случае постоянного μ полностью решить задачу об аппроксимации всех физически интересных полей по норме в $\mathfrak{G}$ с погрешностью порядка ε . Суммарный результат (аппроксимации в $\mathfrak{G}$ для четырех исходных полей $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$) приведен в теореме 2.7.

Разумеется, случай, когда коэффициент $\mu(\mathbf{x})$ периодичен, а $\eta = \eta_0 = \operatorname{Const}$, вполне аналогичен рассмотренному. Мы остановились здесь на физически более естественном случае постоянного μ .

0.5. В § 1 приводятся (в удобном для дальнейшего виде) результаты из [4], [6], [7] о «модельном» операторе (0.8) второго порядка. При этом надо иметь в виду, что в указанных работах считалось, что $\mu = 1$. Однако случай $\mu = \mu_0$ рассматривается аналогично, и результаты § 1 формулируются именно для этого случая.

Основные результаты об усреднении для оператора Максвелла собраны в § 2.

0.6. По-видимому, разработанная авторами техника (см. [3]–[7], [10], [11]) открывает путь к получению аппроксимаций *всех* физических полей в общем случае переменных периодических проницаемостей $\eta(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$.

§1. Модельный оператор второго порядка

1.1. Определение оператора. Эффективный оператор. В этом параграфе мы рассматриваем вспомогательный оператор $\mathcal{L}$ второго порядка. Оператор $\mathcal{L}$ действует в пространстве $\mathfrak{G} = L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и (формально) задается выражением

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta, \mu_0, \nu) = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot}(\eta(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \nu(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mu_0^{1/2}. \quad (1.1)$$

Здесь μ_0 — постоянная положительно определенная (3×3) -матрица с вещественными элементами, а (3×3) -матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ с вещественными элементами и вещественная функция $\nu(\mathbf{x})$ периодичны относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, причем

$$\eta(\mathbf{x}) > 0, \quad \eta, \eta^{-1} \in L_\infty, \quad (1.2)$$

$$\nu(\mathbf{x}) > 0, \quad \nu, \nu^{-1} \in L_\infty. \quad (1.3)$$

Точное определение оператора $\mathcal{L}$ дается через замкнутую в $\mathfrak{G}$ квадратичную форму

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\langle \eta(\mathbf{x})^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{u} \rangle + \nu(\mathbf{x}) |\operatorname{div} \mu_0^{1/2} \mathbf{u}|^2) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{G}^1 = H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3).$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$. Для дальнейшего применения к системе Максвелла достаточно было бы считать, что $\nu(\mathbf{x}) = 1$.

Ниже через Ω обозначается ячейка решетки Γ , а через $\tilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюэна двойственной решетки. Далее, $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ — подпространство в классе Соболева $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, состоящее из функций, Γ -периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^3$ принадлежит классу $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $\tilde{H}^1(\Omega)$.

Оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу операторов, выделенному и изученному в работах [3], [4], [6], [7]. Он имеет вид $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, где $g(\mathbf{x})$ — положительная (4×4) -матрица, а $b(\mathbf{D})$ есть (4×3) -матричный однородный дифференциальный оператор первого порядка. А именно,

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} -i \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \\ -i \operatorname{div} \mu_0^{1/2} \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{x})^{-1} & 0 \\ 0 & \nu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с общими правилами из [4] строится эффективный оператор $\mathcal{L}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Эффективная матрица g^0 имеет вид

$$g^0 = \begin{pmatrix} (\eta^0)^{-1} & 0 \\ 0 & \underline{\nu} \end{pmatrix},$$

где η^0 — эффективная матрица для скалярного эллиптического оператора $-\operatorname{div} \eta \nabla = \mathbf{D}^* \eta \mathbf{D}$, а $\underline{\nu}$ определяется формулой

$$(\underline{\nu})^{-1} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \nu(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x}.$$

Соответствующие вычисления при $\mu_0 = 1$ проведены в [4, §7.2].

Напомним, как определяется матрица η^0 . Для каждого вектора $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^3$ рассмотрим (слабое) Γ -периодическое решение $\Phi_{\mathbf{C}} \in \tilde{H}^1(\Omega)$ задачи

$$\operatorname{div} \eta(\mathbf{x})(\nabla \Phi_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}) = 0, \quad \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.4)$$

Тогда постоянная матрица η^0 определяется соотношением

$$\eta^0 \mathbf{C} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x})(\nabla \Phi_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^3. \quad (1.5)$$

Эффективный оператор $\mathcal{L}^0$ действует в $\mathfrak{G}$ по формуле

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}(\eta^0, \mu_0, \underline{\nu}) = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot}(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \underline{\nu} \operatorname{div} \mu_0^{1/2}. \quad (1.6)$$

1.2. Оператор $\mathcal{L}_{\varepsilon}$. Старший член аппроксимации резольвенты $(\mathcal{L}_{\varepsilon} + I)^{-1}$ по операторной (L_2) -норме. Условимся для произвольной Γ -периодической функции $\phi(\mathbf{x})$ использовать обозначение $\phi^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \phi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}_{\varepsilon} = \mathcal{L}(\eta^{\varepsilon}, \mu_0, \nu^{\varepsilon}) = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot}(\eta^{\varepsilon})^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \nu^{\varepsilon} \operatorname{div} \mu_0^{1/2}. \quad (1.7)$$

Коэффициенты оператора (1.7) быстро осциллируют при $\varepsilon \rightarrow 0$. Задача усреднения для этого оператора состоит в аппроксимации резольвенты $(\mathcal{L}_{\varepsilon} + I)^{-1}$ при малом ε . Следующая теорема дает старший член аппроксимации по операторной норме в $\mathfrak{G}$. Этот результат получается применением общей теоремы 4.2.1 из [4] (ср. с теоремой 7.2.1 из [4], где рассмотрен случай $\mu_0 = 1$).

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия (1.2), (1.3). Пусть $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ — оператор (1.7) и $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор (1.6). Тогда справедлива оценка

$$\|(\mathcal{L}_{\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq C_1 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (1.8)$$

Постоянная C_1 зависит лишь от матричных норм $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, от норм коэффициентов $\|\eta\|_{L_{\infty}}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_{\infty}}$, $\|\nu\|_{L_{\infty}}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_{\infty}}$ и от параметров решетки Γ .

Отметим, что оценка (1.8) — точная по порядку, а постоянная C_1 допускает явный контроль.

1.3. Аппроксимация резольвенты $(\mathcal{L}_{\varepsilon} + I)^{-1}$ по операторной (L_2) -норме с учетом корректора. К оператору (1.7) применима общая теорема 8.2 из [6], в которой дается аппроксимация резольвенты по операторной норме в $\mathfrak{G}$ с оценкой погрешности порядка ε^2 . В аппроксимации учитывается корректор. Корректор вычисляется по общим правилам, приведенным в [6], он содержит три члена. При $\mu_0 = 1$ корректор для оператора (1.7) вычислен в [6, §14]; эти вычисления без труда переносятся на случай произвольной постоянной матрицы μ_0 . Введем объекты, необходимые для описания корректора. Пусть $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, — стандартные орты в $\mathbb{C}^3$. Положим $\mathbf{c}_j = (\eta^0)^{-1} \mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$. Пусть $\tilde{\Phi}_j = \tilde{\Phi}_{\mathbf{c}_j}$ — периодическое решение задачи (1.4) при $\mathbf{C} = \mathbf{c}_j$. Далее, пусть $\mathbf{p}_j \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^3)$ есть Γ -периодическое решение задачи

$$\operatorname{rot} \mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{p}_j = \eta(\nabla \tilde{\Phi}_j + \mathbf{c}_j) - \mathbf{e}_j, \quad \operatorname{div} \mathbf{p}_j = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{p}_j d\mathbf{x} = 0. \quad (1.9)$$

Обозначим через $\Psi(\mathbf{x})$ вещественную (3×3) -матрицу со столбцами $\text{rot } \mathbf{p}_1$, $\text{rot } \mathbf{p}_2$, $\text{rot } \mathbf{p}_3$. Положим

$$\alpha_{ljs} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{\Phi}_l(\mathbf{x}) \langle \eta(\mathbf{x}) (\nabla \tilde{\Phi}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j), \mathbf{e}_s \rangle d\mathbf{x}, \quad l, j, s = 1, 2, 3, \quad (1.10)$$

и введем скалярный (самосопряженный) оператор второго порядка

$$\mathcal{E}(\mathbf{D}) = \sum_{s=1}^3 ((\alpha_{12s} - \alpha_{21s}) \partial_3 \partial_s + (\alpha_{31s} - \alpha_{13s}) \partial_2 \partial_s + (\alpha_{23s} - \alpha_{32s}) \partial_1 \partial_s). \quad (1.11)$$

Далее, пусть $\varphi \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\text{div } \mu_0 \nabla \varphi = \underline{\nu}(\nu(\mathbf{x}))^{-1} - 1, \quad \int_{\Omega} \varphi d\mathbf{x} = 0.$$

Положим $\mathbf{b} = \nabla \varphi$.

Корректор $K(\varepsilon)$ имеет вид (ср. с формулой (14.15) из [6])

$$\begin{aligned} K(\varepsilon) = & (\mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \text{rot } \mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2} \mathbf{b}^\varepsilon \text{div } \mu_0^{1/2}) (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \\ & + (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} (\mu_0^{-1/2} \text{rot}(\Psi^\varepsilon)^t \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla(\mathbf{b}^\varepsilon)^t \mu_0^{1/2}) \\ & - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \mu_0^{-1/2} \mathcal{E}(\mathbf{D}) \text{rot } \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь и ниже верхний индекс t означает операцию транспонирования матрицы. Корректор (1.12) не содержит вспомогательного сглаживающего оператора, который необходимо включать в корректор в общем случае. Действительно, у нас размерность $d = 3$, т. е. выполнено условие 6.10(1) из [6] (условие $d \leq 4$), при котором можно избавиться от сглаживателя в корректоре. Отметим, что первые два слагаемых справа в (1.12) взаимно сопряжены, а третье не зависит от ε .

Применяя теорему 8.2 из [6], приходим к следующему результату (ср. с теоремой 14.1 из [6]).

Теорема 1.2. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор (1.7) и $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор (1.6). Пусть оператор $K(\varepsilon)$ определен формулой (1.12). Тогда выполнена оценка

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq C_2 \varepsilon^2, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (1.13)$$

Постоянная C_2 зависит лишь от матричных норм $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, от норм коэффициентов $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

1.4. Аппроксимация резольвенты $(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме из L_2 в H^1 с учетом корректора. К оператору (1.7) применима общая теорема 10.6 из [7], которая дает аппроксимацию резольвенты по операторной норме из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^1 = H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ с оценкой погрешности порядка ε . В аппроксимацию включается корректор $\tilde{K}_1(\varepsilon)$, который отвечает первому слагаемому из (1.12). Сейчас, однако, в корректор необходимо включить сглаживающий оператор Π_ε . (При аппроксимации резольвенты по операторной норме из L_2 в H^1 условия, при которых удастся избавиться от сглаживателя, жестче, чем при аппроксимациях по операторной норме из L_2 в L_2 .) Оператор Π_ε представляет собой ПДО (псевдодифференциальный оператор) в $\mathfrak{G}$ с символом $\chi_{\tilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\tilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ — характеристическая функция множества $\tilde{\Omega}/\varepsilon$. Положим

$$\tilde{K}_1(\varepsilon) = (\mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \text{rot } \mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2} \mathbf{b}^\varepsilon \text{div } \mu_0^{1/2}) (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \Pi_\varepsilon. \quad (1.14)$$

Применяя теорему 10.6 из [7], получаем следующий результат (ср. с теоремой 22.1 из [7], где был рассмотрен случай $\mu_0 = 1$).

Теорема 1.3. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор (1.7) и $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор (1.6). Пусть оператор $\tilde{K}_1(\varepsilon)$ определен в (1.14). Тогда выполнена оценка

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} - \varepsilon \tilde{K}_1(\varepsilon)\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^1} \leq C_3 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (1.15)$$

Постоянная C_3 зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

1.5. Интерполяционные результаты. К оператору (1.7) применима также (интерполяционная) теорема 11.3 из [7], в которой устанавливается аппроксимация резольвенты по операторной норме из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^s = H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ при $0 < s \leq 1$. В этой аппроксимации используется трехчленный корректор $\tilde{K}(\varepsilon)$, который отличается от корректора (1.12) наличием сглаживателя в первых двух членах:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\varepsilon) = & (\mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2} \mathbf{b}^\varepsilon \operatorname{div} \mu_0^{1/2}) (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \Pi_\varepsilon \\ & + (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \Pi_\varepsilon (\mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} (\Psi^\varepsilon)^t \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla (\mathbf{b}^\varepsilon)^t \mu_0^{1/2}) \\ & - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \mu_0^{-1/2} \mathcal{E}(\mathbf{D}) \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Теорема 1.4. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор (1.7) и $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор (1.6). Пусть оператор $\tilde{K}(\varepsilon)$ определен формулой (1.16). Тогда при $0 < s \leq 1$ выполнена оценка

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} - \varepsilon \tilde{K}(\varepsilon)\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^s} \leq \mathcal{C}_s \varepsilon^{2-s}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (1.17)$$

Постоянная $\mathcal{C}_s$ зависит лишь от s , $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

1.6. Аппроксимация потоков в L_2 . Пусть $\mathbf{f}_\varepsilon$ — решение уравнения

$$\mathcal{L}_\varepsilon \mathbf{f}_\varepsilon + \mathbf{f}_\varepsilon = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \in \mathfrak{G}, \quad (1.18)$$

и $\mathbf{f}_0$ — решение усредненного уравнения

$$\mathcal{L}^0 \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_0 = \mathbf{F}. \quad (1.19)$$

Оценка (1.15) означает, что

$$\|\mathbf{f}_\varepsilon - \mathbf{f}_0 - \varepsilon \tilde{K}_1(\varepsilon) \mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}^1} \leq C_3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Отметим, что слабый $(\mathfrak{G}^1)$ -предел функций $\mathbf{f}_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен $\mathbf{f}_0$ (см. замечание 10.7 из [7]).

Роль потока для уравнения (1.18) играет вектор-функция

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{f}_\varepsilon = -i \begin{pmatrix} (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon \\ \nu^\varepsilon \operatorname{div} \mu_0^{1/2} \mathbf{f}_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Через $a(\mathbf{x})$ обозначим (3×3) -матрицу со столбцами $(\nabla \tilde{\Phi}_j + \mathbf{c}_j)$, $j = 1, 2, 3$. Применяя теорему 12.1 из [7] об аппроксимации потоков, получаем следующие

две оценки (ср. с оценками (22.16), (22.17) из [7], где рассмотрен случай $\mu_0 = \mathbf{1}$):

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon - a^\varepsilon \Pi_\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_0\|_{\mathfrak{G}} \leq C_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (1.20)$$

$$\|\nu^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{f}_\varepsilon - \underline{\nu} \Pi_\varepsilon^{(1)} \operatorname{div} \mathbf{f}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leq C_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (1.21)$$

Здесь $\Pi_\varepsilon^{(1)}$ есть ПДО в $L_2(\mathbb{R}^3)$ с символом $\chi_{\tilde{\Omega}/\varepsilon}(\xi)$.

Аналогично тому, как это сделано в п. 22.3 из [7], нетрудно показать, что сглаживатели Π_ε , $\Pi_\varepsilon^{(1)}$ в оценках (1.20), (1.21) можно заменить на I ; такая замена отразится лишь на постоянных в оценках. При этом «устранение» сглаживателя в (1.21) тривиально, а в (1.20) основано на том, что столбцы матрицы $a(\mathbf{x})$ (которые выражаются через градиенты решений $\tilde{\Phi}_j$ задачи вида (1.4)) являются мультипликаторами из H^1 в L_2 . Последнее утверждение было установлено в [11, предложение 8.2].

Отметим, что $a(\mathbf{x}) = (\mathbf{1} + Z(\mathbf{x}))(\eta^0)^{-1}$, где $Z(\mathbf{x})$ — (вещественная) матрица со столбцами $\nabla \Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, и $\Phi_j = \Phi_{\mathbf{e}_j}$ — решение уравнения (1.4) при $\mathbf{C} = \mathbf{e}_j$. В итоге приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.5. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть $\mathbf{f}_\varepsilon$ — решение уравнения (1.18), а $\mathbf{f}_0$ — решение усредненного уравнения (1.19). Пусть $Z(\mathbf{x})$ есть (3×3) -матрица со столбцами $\nabla \Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, где Φ_j является Γ -периодическим решением задачи (1.4) при $\mathbf{C} = \mathbf{e}_j$. Тогда справедливы оценки

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Z^\varepsilon)(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_0\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (1.22)$$

$$\|\nu^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{f}_\varepsilon - \underline{\nu} \operatorname{div} \mathbf{f}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leq C_6 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Постоянные C_5 , C_6 зависят лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

Отметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ вектор-функции $(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к вектору $(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_0$ (см. замечание 12.2 из [7]).

1.7. Особые случаи. Положим

$$\bar{g} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (\underline{g})^{-1} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x}.$$

Для эффективной матрицы g^0 всегда выполнены неравенства $\underline{g} \leq g^0 \leq \bar{g}$. В случае когда $g^0 = \bar{g}$, корректоры (1.12), (1.14), (1.16) обращаются в нуль. Этот случай реализуется, если $\nu = \operatorname{Const}$ и $\eta^0 = \underline{\eta}$, т.е. столбцы матрицы η^{-1} — потенциальные векторы (см. предложение 3.1.7 из [4]). В этом случае применимы теорема 8.3 из [6] и теоремы 10.9 и 11.5 из [7], которые дают следующий результат.

Теорема 1.6. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть, кроме того, $\nu = \operatorname{Const}$ и $\eta^0 = \underline{\eta}$. Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq \tilde{C}_2 \varepsilon^2, \quad (1.23)$$

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^1} \leq \tilde{C}_3 \varepsilon, \quad (1.24)$$

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^s} \leq \tilde{\mathcal{C}}_s \varepsilon^{2-s}, \quad 0 < s \leq 1. \quad (1.25)$$

Постоянные $\tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ зависят от $|\mu_0|, |\mu_0^{-1}|, \|\eta\|_{L_\infty}, \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}, \|\nu\|_{L_\infty}, \|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ , а $\mathcal{C}_s$ зависит от тех же параметров и от s .

Случай $g^0 = \underline{g}$ реализуется при произвольном $\nu(\mathbf{x})$ и при $\eta^0 = \bar{\eta}$ (т. е. если столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})$ соленоидальны; см. предложение 3.1.6 из [4]). В этом случае $Z(\mathbf{x}) = 0$, а потому формула (1.22) упрощается (ср. с теоремой 12.4 из [7]). Сформулируем результат.

Теорема 1.7. Пусть выполнены условия теоремы 1.5. Пусть, кроме того, $\eta^0 = \bar{\eta}$. Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ выполнена оценка

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon - (\bar{\eta})^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_0\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}}. \quad (1.26)$$

1.8. Распадение оператора $\mathcal{L}$. Положим

$$J(\mu_0) = \{\mathbf{f} \in \mathfrak{G} : \operatorname{div} \mu_0^{1/2} \mathbf{f} = 0\}, \quad (1.27)$$

$$G(\mu_0) = \{\mathbf{u} = \mu_0^{1/2} \nabla \phi : \phi \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3), \nabla \phi \in \mathfrak{G}\}.$$

Справедливо ортогональное разложение Вейля

$$\mathfrak{G} = L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3) = J(\mu_0) \oplus G(\mu_0). \quad (1.28)$$

Разложение (1.28) приводит оператор (1.1): $\mathcal{L} = \mathcal{L}_J \oplus \mathcal{L}_G$. Оператор $\mathcal{L}_J$, действующий в подпространстве $J(\mu_0)$, соответствует дифференциальному выражению $\mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} \eta^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}$, а оператор $\mathcal{L}_G$, действующий в $G(\mu_0)$, задается выражением $-\mu_0^{1/2} \nabla \nu \operatorname{div} \mu_0^{1/2}$. Операторы $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}^0$ также приводятся разложением (1.28): $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}_{J,\varepsilon} \oplus \mathcal{L}_{G,\varepsilon}$, $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}_J^0 \oplus \mathcal{L}_G^0$. Для нас (для применений к системе Максвелла) представляют интерес операторы $\mathcal{L}_J$, $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ и $\mathcal{L}_J^0$. Поскольку они не зависят от коэффициента ν , достаточно рассмотреть случай, когда $\nu = 1$.

Пусть $\mathcal{P}(\mu_0)$ — ортопроектор в $\mathfrak{G}$ на $J(\mu_0)$. Тогда (ср. [4, п. 2.4 гл. 7]) оператор $\mathcal{P}(\mu_0)$ (суженный на $\mathfrak{G}^s$) является ортопроектором и в пространстве $\mathfrak{G}^s = H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ на подпространство $J^s(\mu_0) = \mathfrak{G}^s \cap J(\mu_0)$ при всех $s > 0$.

Сужая операторы в (1.8) на подпространство $J(\mu_0)$, получаем неравенство

$$\|(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1}\|_{J(\mu_0) \rightarrow J(\mu_0)} \leq C'_1 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (1.29)$$

Постоянная C'_1 есть C_1 при $\nu = 1$, а потому C'_1 зависит лишь от $|\mu_0|, |\mu_0^{-1}|, \|\eta\|_{L_\infty}, \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

Сужая операторы в (1.13) на $J(\mu_0)$ и домножая их слева на $\mathcal{P}(\mu_0)$, имеем

$$\|(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} - \varepsilon K_J(\varepsilon)\|_{J(\mu_0) \rightarrow J(\mu_0)} \leq C'_2 \varepsilon^2, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (1.30)$$

где C'_2 есть C_2 при $\nu = 1$ и

$$\begin{aligned} K_J(\varepsilon) = & \mathcal{P}(\mu_0) \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \\ & + (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} (\Psi^\varepsilon)^t \mu_0^{-1/2} \\ & - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mu_0^{-1/2} \mathcal{E}(\mathbf{D}) \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Аналогично, сужая операторы в (1.15) на $J(\mu_0)$ и домножая на $\mathcal{P}(\mu_0)$, получаем

$$\|(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} - \varepsilon \tilde{K}_{1,J}(\varepsilon)\|_{J(\mu_0) \rightarrow J^1(\mu_0)} \leq C'_3 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (1.32)$$

где C'_3 есть C_3 при $\nu = 1$ и

$$\tilde{K}_{1,J}(\varepsilon) = \mathcal{P}(\mu_0) \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \Pi_\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1}. \quad (1.33)$$

Наконец, из неравенства (1.17) выводится оценка

$$\|(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} - \varepsilon \tilde{K}_J(\varepsilon)\|_{J(\mu_0) \rightarrow J^s(\mu_0)} \leq \mathcal{C}'_s \varepsilon^{2-s}, \quad (1.34)$$

$$0 < s \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где $\mathcal{C}'_s$ есть $\mathcal{C}_s$ при $\nu = 1$ и

$$\begin{aligned} \tilde{K}_J(\varepsilon) = & \mathcal{P}(\mu_0) \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \Pi_\varepsilon \\ & + (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \Pi_\varepsilon \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} (\Psi^\varepsilon)^t \mu_0^{-1/2} \\ & - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mu_0^{-1/2} \mathcal{E}(\mathbf{D}) \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Мы получили следующий результат.

Теорема 1.8. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть $\mathcal{L}_{J,\varepsilon} = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}$ — часть оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$, действующая в соленоидальном подпространстве (1.27). Пусть $\mathcal{L}_J^0 = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot}(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}$ — часть эффективного оператора $\mathcal{L}^0$, действующая в $J(\mu_0)$. Пусть $\mathcal{P}(\mu_0)$ — ортопроектор в $\mathfrak{G}$ на подпространство $J(\mu_0)$. Пусть корректор $K_J(\varepsilon)$ определен в (1.31), $\tilde{K}_{1,J}(\varepsilon)$ определен в (1.33) и $\tilde{K}_J(\varepsilon)$ определен в (1.35). Тогда выполнены оценки (1.29), (1.30), (1.32) и (1.34). Постоянные C'_1 из (1.29), C'_2 из (1.30) и C'_3 из (1.32) зависят лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ , а постоянная $\mathcal{C}'_s$ из (1.34) зависит от тех же величин, а также от s .

Применим теперь оценку (1.22) при $\mathbf{F} \in J(\mu_0)$. Тогда в силу распадаения операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}^0$

$$\mathbf{f}_\varepsilon = (\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{f}_0 = (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \in J(\mu_0). \quad (1.36)$$

Обозначая через C'_5 постоянную C_5 при $\nu = 1$, приходим к следующему результату.

Предложение 1.9. Пусть выполнены условия теоремы 1.5. Пусть вектор-функции $\mathbf{f}_\varepsilon$ и $\mathbf{f}_0$ определены в (1.36). Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Z^\varepsilon)(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_0\|_{\mathfrak{G}} \leq C'_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}}, \quad (1.37)$$

где C'_5 зависит от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

Выделим особые случаи. Сужая операторы в (1.23), (1.24) и (1.25) на $J(\mu_0)$ и считая, что $\nu = 1$, получаем следующий результат.

Теорема 1.10. Пусть выполнены условия теоремы 1.6. Пусть оператор $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ — часть оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ в подпространстве $J(\mu_0)$ и $\mathcal{L}_J^0$ — часть эффективного оператора $\mathcal{L}^0$ в $J(\mu_0)$. Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1}\|_{J(\mu_0) \rightarrow J(\mu_0)} &\leq \tilde{C}'_2 \varepsilon^2, \\ \|(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1}\|_{J(\mu_0) \rightarrow J^1(\mu_0)} &\leq \tilde{C}'_3 \varepsilon, \\ \|(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1}\|_{J(\mu_0) \rightarrow J^s(\mu_0)} &\leq \tilde{C}'_s \varepsilon^{2-s}, \quad 0 < s \leq 1. \end{aligned}$$

Постоянные $\tilde{C}'_2, \tilde{C}'_3$ зависят лишь от $|\mu_0|, |\mu_0^{-1}|, \|\eta\|_{L_\infty}, \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ , а постоянная $\tilde{C}'_s$ зависит от тех же величин и от s .

Если выполнено условие $\eta^0 = \bar{\eta}$, то из оценки (1.26) при $\mathbf{F} \in J(\mu_0)$ и при $\nu = 1$ получаем следующий результат.

Предложение 1.11. Пусть выполнены условия теоремы 1.7. Пусть вектор-функции $\mathbf{f}_\varepsilon$ и $\mathbf{f}_0$ определены в (1.36). Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon - (\bar{\eta})^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_0\|_{\mathfrak{G}} \leq C'_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{G}},$$

где C'_5 зависит от $|\mu_0|, |\mu_0^{-1}|, \|\eta\|_{L_\infty}, \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

§2. Стационарная система Максвелла

2.1. Постановка задачи. Ниже $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ — напряженности электрического и магнитного полей. Считаем, что магнитная проницаемость μ задается постоянной положительной матрицей μ_0 , а диэлектрическая проницаемость $\eta(\mathbf{x})$ есть Γ -периодическая вещественная матрица-функция, удовлетворяющая условиям (1.2). Векторы электрической и магнитной индукций $\mathbf{w}, \mathbf{z}$ связаны с $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ соотношениями $\mathbf{w} = \eta(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{z} = \mu_0\mathbf{v}$. Напомним обозначения: $\mathfrak{G} = L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, $J = \{\mathbf{f} \in \mathfrak{G} : \operatorname{div} \mathbf{f} = 0\}$. Через $\mathfrak{G}(\eta^{-1}) = L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; \eta^{-1})$ обозначается «весовое» пространство со скалярным произведением $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{\mathfrak{G}(\eta^{-1})} = (\eta^{-1}\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{\mathfrak{G}}$. Аналогично определяется $\mathfrak{G}(\mu_0^{-1})$. Множество J является замкнутым подпространством как в $\mathfrak{G}$, так и в весовых пространствах $\mathfrak{G}(\eta^{-1})$ и $\mathfrak{G}(\mu_0^{-1})$.

Оператор Максвелла $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\eta, \mu_0)$, записанный в терминах индукций, действует в пространстве $J \oplus J$ и задается формулой

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\eta, \mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & i \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \\ -i \operatorname{rot} \eta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на области определения

$$\operatorname{Dom} \mathcal{M}(\eta, \mu_0) = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) : \mathbf{w} \in J, \mathbf{z} \in J, \operatorname{rot} \eta^{-1} \mathbf{w} \in \mathfrak{G}, \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z} \in \mathfrak{G}\}. \quad (2.1)$$

Оператор $\mathcal{M}$ замкнут, но не самосопряжен в $J \oplus J$ (относительно стандартного скалярного произведения в $\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}$). Однако оператор $\mathcal{M}$ самосопряжен в пространстве $J \oplus J$, рассматриваемом как подпространство в $\mathfrak{G}(\eta^{-1}) \oplus \mathfrak{G}(\mu_0^{-1})$.

Определим семейство операторов $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{M}(\eta^\varepsilon, \mu_0)$, $\varepsilon > 0$, действующих в $J \oplus J$. При этом $\operatorname{Dom} \mathcal{M}_\varepsilon$ зависит от ε . Наша цель — изучение поведения резольвенты $(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{M}_\varepsilon - iI) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{r} \in J. \quad (2.2)$$

Соответствующие напряженности заданы соотношениями $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon$. В подробной записи (2.2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} i \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon - i \mathbf{w}_\varepsilon &= \mathbf{q}, \\ -i \operatorname{rot} (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon - i \mathbf{z}_\varepsilon &= \mathbf{r}, \\ \operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Представим решения в виде сумм (ср. [4, гл. 7], [10], [11]): $\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, где векторы $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ являются решением системы (2.3) при $\mathbf{r} = 0$, а векторы $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ — решением системы (2.3) при $\mathbf{q} = 0$. Соответственно в виде сумм представляются и поля $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$.

2.2. Эффективный оператор. Пусть η^0 — эффективная матрица для оператора $-\operatorname{div} \eta \nabla$ (см. (1.5)) и $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}(\eta^0, \mu_0)$ — эффективный оператор Максвелла. Введем в рассмотрение «усредненную» систему Максвелла

$$(\mathcal{M}^0 - iI) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{r} \in J. \quad (2.4)$$

Соответствующие напряженности $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$ связаны с $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{z}_0$ соотношениями

$$\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1} \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1} \mathbf{z}_0. \quad (2.5)$$

Решения системы (2.4) мы также представим в виде суммы двух слагаемых: $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_0^{(q)} + \mathbf{w}_0^{(r)}$, $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0^{(q)} + \mathbf{z}_0^{(r)}$, и аналогичное разложение имеет место для $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$.

Отметим, что симметрии между случаями $\mathbf{q} = 0$ и $\mathbf{r} = 0$ нет.

2.3. Случай $\mathbf{q} = 0$. Аппроксимации полей $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ и $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$. При $\mathbf{q} = 0$ система (2.3) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} &= \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}, \\ \operatorname{rot} (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} &= i \mathbf{r}, \\ \operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Напряженности определяются формулами

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}, \quad \mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} = \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}. \quad (2.7)$$

Из (2.6) следует, что $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ является решением задачи

$$\operatorname{rot} (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} = i \mathbf{r}, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} = 0, \quad \mathbf{r} \in J.$$

Тогда функция $\mathbf{f}_\varepsilon^{(r)} = \mu_0^{-1/2} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ является решением задачи

$$\mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon^{(r)} + \mathbf{f}_\varepsilon^{(r)} = i \mu_0^{-1/2} \mathbf{r}, \quad \operatorname{div} \mu_0^{1/2} \mathbf{f}_\varepsilon^{(r)} = 0, \quad \mu_0^{-1/2} \mathbf{r} \in J(\mu_0). \quad (2.8)$$

Следовательно,

$$\mu_0^{-1/2} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} = (\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} (i \mu_0^{-1/2} \mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Аналогично, для решений усредненной системы (2.4) при $\mathbf{q} = 0$

$$\mu_0^{-1/2} \mathbf{z}_0^{(r)} = (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} (i \mu_0^{-1/2} \mathbf{r}). \quad (2.10)$$

Из (2.9), (2.10) и оценки (1.29) получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ магнитные индукции $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ сходятся к $\mathbf{z}_0^{(r)}$ по норме в $\mathfrak{G}$, причем

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_1'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad C_1'' = C_1' |\mu_0|^{1/2} |\mu_0^{-1}|^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.11)$$

Применяя (1.30), можно получить более точную аппроксимацию для $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ в $\mathfrak{G}$:

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)} - \varepsilon \zeta_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_2'' \varepsilon^2 \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad C_2'' = C_2' |\mu_0|^{1/2} |\mu_0^{-1}|^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.12)$$

$$\zeta_\varepsilon^{(r)} := \mu_0^{1/2} K_J(\varepsilon) (i\mu_0^{-1/2} \mathbf{r}). \quad (2.13)$$

В силу (1.31) поле (2.13) разбивается на три слагаемых: $\zeta_\varepsilon^{(r)} = \rho_\varepsilon^{(r)} + \xi_\varepsilon^{(r)} + \phi_0^{(r)}$, где

$$\rho_\varepsilon^{(r)} = \mu_0^{1/2} \mathcal{P}(\mu_0) \mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon \operatorname{rot} (\mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} (i\mu_0^{-1/2} \mathbf{r})), \quad (2.14)$$

$$\xi_\varepsilon^{(r)} = \mu_0^{1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} ((\Psi^\varepsilon)^t \mu_0^{-1/2} (i\mu_0^{-1/2} \mathbf{r})), \quad (2.15)$$

$$\phi_0^{(r)} = -\mu_0^{1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mu_0^{-1/2} \mathcal{E}(\mathbf{D}) \operatorname{rot} (\mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} (i\mu_0^{-1/2} \mathbf{r})). \quad (2.16)$$

Как отмечено в [11, п. 10.2],

$$\mu_0^{1/2} \mathcal{P}(\mu_0) \mu_0^{-1/2} = \widetilde{\mathcal{P}}(\mu_0), \quad (2.17)$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}(\mu_0)$ — ортопроектор в весовом пространстве $\mathfrak{G}(\mu_0^{-1})$ на подпространство J . Кроме того, из (2.10) и из (2.4) при $\mathbf{q} = 0$ видно, что

$$\operatorname{rot} (\mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} (i\mu_0^{-1/2} \mathbf{r})) = \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_0^{(r)} = \mathbf{w}_0^{(r)}. \quad (2.18)$$

Из (2.14), (2.17), (2.18) следует, что $\rho_\varepsilon^{(r)} = \widetilde{\mathcal{P}}(\mu_0) \Psi^\varepsilon \mathbf{w}_0^{(r)}$.

Отметим, далее, что поле (2.15), очевидно, является решением задачи

$$\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \xi_\varepsilon^{(r)} + \xi_\varepsilon^{(r)} = i \operatorname{rot}(\Psi^\varepsilon)^t \mu_0^{-1} \mathbf{r}, \quad \operatorname{div} \xi_\varepsilon^{(r)} = 0. \quad (2.19)$$

Из (2.16) и (2.18) видно, что поле $\phi_0^{(r)}$ является решением задачи

$$\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \phi_0^{(r)} + \phi_0^{(r)} = -\mathcal{E}(\mathbf{D}) \mathbf{w}_0^{(r)}, \quad \operatorname{div} \phi_0^{(r)} = 0. \quad (2.20)$$

Получим теперь аппроксимацию индукции $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ по $(\mathfrak{G}^1)$ -норме. В силу (1.32)

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)} - \varepsilon \widetilde{\rho}_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^1} \leq C_3'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad C_3'' = C_3' |\mu_0|^{1/2} |\mu_0^{-1}|^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.21)$$

$$\widetilde{\rho}_\varepsilon^{(r)} := \mu_0^{1/2} \widetilde{K}_{1,J}(\varepsilon) (i\mu_0^{-1/2} \mathbf{r}). \quad (2.22)$$

С учетом (1.33), (2.17) и (2.18) имеем $\widetilde{\rho}_\varepsilon^{(r)} = \widetilde{\mathcal{P}}(\mu_0) \Psi^\varepsilon \Pi_\varepsilon \mathbf{w}_0^{(r)}$.

Наконец, оценка (1.34) вместе с (2.9), (2.10) позволяет получить аппроксимацию поля $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ в классе $\mathfrak{G}^s$, $0 < s \leq 1$:

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)} - \varepsilon \widetilde{\zeta}_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^s} \leq \mathcal{C}_s'' \varepsilon^{2-s} \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad \mathcal{C}_s'' = \mathcal{C}_s' |\mu_0|^{1/2} |\mu_0^{-1}|^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.23)$$

где

$$\widetilde{\zeta}_\varepsilon^{(r)} = \mu_0^{1/2} \widetilde{K}_J(\varepsilon) (i\mu_0^{-1/2} \mathbf{r}) = \widetilde{\rho}_\varepsilon^{(r)} + \Pi_\varepsilon \xi_\varepsilon^{(r)} + \phi_0^{(r)}.$$

Мы учли здесь соотношения (1.35), (1.33), (2.22), (2.15), (2.16).

Аппроксимации для магнитной напряженности $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} = \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ прямо вытекают из (2.11), (2.12), (2.21) и (2.23) с учетом соотношения $\mathbf{v}_0^{(r)} = \mu_0^{-1} \mathbf{z}_0^{(r)}$ (соответствующие оценки приведены ниже в (2.28), (2.31), (2.33), (2.35)).

2.4. Случай $\mathbf{q} = 0$. Аппроксимации полей $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$ и $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$. В силу (2.6), (2.7) имеем

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon^{(r)}. \quad (2.24)$$

Отсюда видно, что $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$ играет роль «потока» относительно решения $\mathbf{f}_\varepsilon^{(r)}$ задачи (2.8). В силу предложения 1.9 при $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon^{(r)} - (\mathbf{1} + Z^\varepsilon)(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad C_5'' = C_5' |\mu_0^{-1}|^{1/2},$$

где $\mathbf{f}_0^{(r)} = \mu_0^{-1/2} \mathbf{z}_0^{(r)}$. Поскольку $(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_0^{(r)} = (\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_0^{(r)} = \mathbf{u}_0^{(r)}$, последняя оценка означает, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)} - (\mathbf{1} + Z^\varepsilon) \mathbf{u}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.25)$$

Для электрической индукции $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} = \eta^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$ из (2.25) получаем, что

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} - \tilde{\eta}^\varepsilon \mathbf{u}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \|\eta\|_{L_\infty} \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где $\tilde{\eta}(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})(\mathbf{1} + Z(\mathbf{x}))$ — матрица со столбцами $\eta(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, 2, 3$. Введем матрицу $Y(\mathbf{x}) = \tilde{\eta}(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1}$ с нулевым средним значением. Тогда $\tilde{\eta}^\varepsilon \mathbf{u}_0^{(r)} = (\mathbf{1} + Y^\varepsilon) \mathbf{w}_0^{(r)}$.

2.5. Случай $\mathbf{q} = 0$. Итоговый результат. Из сказанного в разд. 2.3, 2.4 непосредственно вытекает

Теорема 2.1. Пусть $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(r)})$ — решение системы (2.6), и пусть поля $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ определены в (2.7). Пусть $(\mathbf{w}_0^{(r)}, \mathbf{z}_0^{(r)})$ — решение «усредненной» системы (2.4) при $\mathbf{q} = 0$, и пусть $\mathbf{u}_0^{(r)} = (\eta^0)^{-1} \mathbf{w}_0^{(r)}$, $\mathbf{v}_0^{(r)} = \mu_0^{-1} \mathbf{z}_0^{(r)}$. Пусть $Z(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\nabla \Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, где Φ_j есть Γ -периодическое решение задачи (1.4) при $\mathbf{C} = \mathbf{e}_j$. Пусть $\tilde{\eta}(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\eta(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, 2, 3$, и $Y(\mathbf{x}) = \tilde{\eta}(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1}$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1°. Для всех четырех полей $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ справедливы аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ с погрешностью порядка ε :

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)} - (\mathbf{1} + Z^\varepsilon) \mathbf{u}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.26)$$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} - (\mathbf{1} + Y^\varepsilon) \mathbf{w}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \|\eta\|_{L_\infty} \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.27)$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_1'' |\mu_0^{-1}| \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.28)$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_1'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.29)$$

2°. Для магнитной индукции $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ и магнитной напряженности $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ справедливы следующие аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ с погрешностью порядка ε^2 :

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)} - \varepsilon \zeta_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_2'' \varepsilon^2 \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.30)$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)} - \varepsilon \mu_0^{-1} \zeta_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_2'' |\mu_0^{-1}| \varepsilon^2 \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.31)$$

Здесь поправка $\zeta_\varepsilon^{(r)}$ определяется следующим образом. Пусть $\Psi(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\text{rot } \mathbf{p}_j$, $j = 1, 2, 3$, где $\mathbf{p}_j$ есть Γ -периодическое решение задачи (1.9). Пусть $\widetilde{\mathcal{P}}(\mu_0)$ — ортопроектор в весовом пространстве $\mathfrak{G}(\mu_0^{-1})$ на соленоидальное подпространство J . Пусть $\xi_\varepsilon^{(r)}$ — решение задачи (2.19) и $\phi_0^{(r)}$ — решение задачи (2.20), где ДО $\mathcal{E}(\mathbf{D})$ определен в (1.10), (1.11). Тогда $\zeta_\varepsilon^{(r)} = \widetilde{\mathcal{P}}(\mu_0) \Psi^\varepsilon \mathbf{w}_0^{(r)} + \xi_\varepsilon^{(r)} + \phi_0^{(r)}$.

3°. Для полей $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ и $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ справедливы следующие аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}^1$ с погрешностью порядка ε :

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)} - \varepsilon \tilde{\rho}_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^1} \leq C_3'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.32)$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)} - \varepsilon \mu_0^{-1} \tilde{\rho}_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^1} \leq C_3'' |\mu_0^{-1}| \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.33)$$

Здесь $\tilde{\rho}_\varepsilon^{(r)} = \widetilde{\mathcal{P}}(\mu_0) \Psi^\varepsilon \Pi_\varepsilon \mathbf{w}_0^{(r)}$, а Π_ε есть ПДО в $\mathfrak{G}$ с символом $\chi_{\tilde{\Omega}/\varepsilon}$.

4°. Для полей $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ и $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ справедливы следующие аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}^s$ при $0 < s \leq 1$ с погрешностью порядка ε^{2-s} :

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)} - \varepsilon \tilde{\zeta}_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^s} \leq \mathcal{C}_s'' \varepsilon^{2-s} \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.34)$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)} - \varepsilon \mu_0^{-1} \tilde{\zeta}_\varepsilon^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^s} \leq \mathcal{C}_s'' |\mu_0^{-1}| \varepsilon^{2-s} \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.35)$$

Здесь $\tilde{\zeta}_\varepsilon^{(r)} = \tilde{\rho}_\varepsilon^{(r)} + \Pi_\varepsilon \xi_\varepsilon^{(r)} + \phi_0^{(r)}$.

Постоянные в оценках (2.26)–(2.33) зависят лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ , а постоянная $\mathcal{C}_s''$ из (2.34), (2.35) зависит от тех же величин и от s .

Отметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к $\mathbf{u}_0^{(r)}$, а $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к $\mathbf{w}_0^{(r)}$. Это согласуется с оценками (2.26), (2.27): поправочные члены $Z^\varepsilon \mathbf{u}_0^{(r)}$, $Y^\varepsilon \mathbf{w}_0^{(r)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к нулю в силу свойства среднего значения ($Z(\mathbf{x})$ и $Y(\mathbf{x})$ — периодические матрицы-функции с нулевым средним значением).

2.6. Частные случаи при $\mathbf{q} = 0$. Если $\eta^0 = \underline{\eta}$ (т.е. столбцы матрицы η^{-1} потенциальны), то применима теорема 1.10. Вместе с соотношениями (2.9), (2.10) эта теорема дает аппроксимации для полей $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$, причем поправки (корректоры) обращаются в нуль. Кроме того, при $\eta^0 = \underline{\eta}$ выполнено соотношение $\tilde{\eta}(\mathbf{x}) = \eta^0 = \underline{\eta}$ (ср. [6, замечание 3.5]). Поэтому $Y(\mathbf{x}) = 0$, а $\mathbf{1} + Z(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})^{-1} \eta^0$, и аппроксимации (2.27), (2.26) упрощаются. Суммируя сказанное, получаем следующую теорему, в которой мы используем обозначения

$$\tilde{C}_2'' = \tilde{C}_2' |\mu_0|^{1/2} |\mu_0^{-1}|^{1/2}, \quad \tilde{C}_3'' = \tilde{C}_3' |\mu_0|^{1/2} |\mu_0^{-1}|^{1/2}, \quad \tilde{\mathcal{C}}_s'' = \tilde{\mathcal{C}}_s' |\mu_0|^{1/2} |\mu_0^{-1}|^{1/2}.$$

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Пусть, кроме того, выполнено соотношение $\eta^0 = \underline{\eta}$. Тогда для магнитной индукции $\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)}$ и магнитной напряженности $\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)}$ справедливы следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} &\leq \tilde{C}_2'' \varepsilon^2 \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, & 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} &\leq \tilde{C}_2'' |\mu_0^{-1}| \varepsilon^2 \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, & 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^1} &\leq \tilde{C}_3'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, & 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^1} &\leq \tilde{C}_3'' |\mu_0^{-1}| \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, & 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \|\mathbf{z}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{z}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^s} &\leq \tilde{\mathcal{C}}_s'' \varepsilon^{2-s} \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, & 0 < s \leq 1, \ 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \|\mathbf{v}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}^s} &\leq \tilde{\mathcal{C}}_s'' |\mu_0^{-1}| \varepsilon^{2-s} \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, & 0 < s \leq 1, \ 0 < \varepsilon \leq 1. \end{aligned}$$

Для электрических индукции $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$ и напряженности $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{w}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \|\eta\|_{L_\infty} \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.36)$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)} - (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.37)$$

Постоянные $\tilde{C}_2''$, $\tilde{C}_3''$, C_5'' зависят лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ , а $\tilde{\mathcal{C}}_s''$ зависит от тех же величин, а также от s .

Пусть теперь выполнено соотношение $\eta^0 = \bar{\eta}$, т.е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})$ соленоидальны. Тогда применимо предложение 1.11. С учетом (2.24) приходим к следующему результату.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Кроме того, пусть $\eta^0 = \bar{\eta}$. Тогда для электрической напряженности $\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)}$ справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(r)} - \mathbf{u}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

а для электрической индукции $\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)}$ — аппроксимация

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon^{(r)} - \eta^\varepsilon \mathbf{u}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_5'' \|\eta\|_{L_\infty} \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Постоянная C_5'' зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

2.7. Случай $\mathbf{r} = 0$. Аппроксимация электрических полей. При $\mathbf{r} = 0$ система (2.3) для индукций $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$ и $\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} &= -\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}, \\ &-\operatorname{rot}(\mu_0)^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)} = i\mathbf{q}, \\ \operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Напряженности записываются в виде

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}, \quad \mathbf{v}_\varepsilon^{(q)} = \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}. \quad (2.39)$$

В [10], [11] были получены аппроксимации в пространстве $\mathfrak{G}$ для полей $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$ и $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}$ с погрешностью порядка ε . При этом обе проницаемости η , μ считались

Γ -периодическими. Сформулируем соответствующий результат применительно к случаю $\mu = \mu_0 = \text{Const}$. Пусть $(\mathbf{w}_0^{(q)}, \mathbf{z}_0^{(q)})$ — решение усредненной системы (2.4) при $\mathbf{r} = 0$. Положим $\mathbf{u}_0^{(q)} = (\eta^0)^{-1} \mathbf{w}_0^{(q)}$, $\mathbf{v}_0^{(q)} = (\mu_0)^{-1} \mathbf{z}_0^{(q)}$. Пусть $(\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}, \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)})$ — решение «поправочной» системы

$$(\mathcal{M}^0 - iI) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)} \\ \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

где $\mathbf{q}_\varepsilon = \widetilde{\mathcal{P}}(\eta^0)(Z^\varepsilon)^t \mathbf{q}$. Здесь $\widetilde{\mathcal{P}}(\eta^0)$ — ортопроектор в весовом пространстве $\mathfrak{G}((\eta^0)^{-1})$ на подпространство J . Матрица $Z(\mathbf{x})$ — та же, что и выше. Пусть

$$\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)} = (\eta^0)^{-1} \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}, \quad \widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)} = \mu_0^{-1} \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)}. \quad (2.41)$$

Положим

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)} &= (\mathbf{1} + Z^\varepsilon)(\mathbf{u}_0^{(q)} + \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}), \\ \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)} &= \widetilde{\eta}^\varepsilon(\mathbf{u}_0^{(q)} + \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}) = (\mathbf{1} + Y^\varepsilon)(\mathbf{w}_0^{(q)} + \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}). \end{aligned}$$

Из [11, теорема 12.2] прямо вытекают аппроксимации для полей $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}$, $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)} - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_6 \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad \|\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)} - \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_7 \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Постоянные C_6 , C_7 зависят лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

2.8. Случай $\mathbf{r} = 0$. Аппроксимация магнитных полей. Для аппроксимации в $\mathfrak{G}$ полей $\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ и $\mathbf{v}_\varepsilon^{(q)}$ нам приходится использовать специфику случая $\mu = \mu_0$. Из (2.38) видно, что $\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ является решением задачи

$$\text{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \text{rot} \mu_0^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} = -i \text{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{q}, \quad \text{div} \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} = 0.$$

Тогда функция $\mathbf{f}_\varepsilon^{(q)} = \mu_0^{-1/2} \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ является решением задачи

$$\mu_0^{-1/2} \text{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \text{rot} \mu_0^{-1/2} \mathbf{f}_\varepsilon^{(q)} + \mathbf{f}_\varepsilon^{(q)} = -i \mu_0^{-1/2} \text{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{q}, \quad \text{div} \mu_0^{1/2} \mathbf{f}_\varepsilon^{(q)} = 0.$$

Следовательно,

$$\mu_0^{-1/2} \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{f}_\varepsilon^{(q)} = -(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} (i \mu_0^{-1/2} \text{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{q}). \quad (2.42)$$

Воспользуемся оценкой (1.37), которую запишем в операторном виде:

$$\begin{aligned} &\|(\eta^\varepsilon)^{-1} \text{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} \\ &\quad - (\mathbf{1} + Z^\varepsilon)(\eta^0)^{-1} \text{rot} \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1}\|_{J(\mu_0) \rightarrow \mathfrak{G}} \leq C'_5 \varepsilon, \end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon \leq 1$. Переходя к сопряженным операторам, при $0 < \varepsilon \leq 1$ получаем

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{L}_{J,\varepsilon} + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mu_0^{-1/2} \text{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \\ &\quad - (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mu_0^{-1/2} \text{rot}(\eta^0)^{-1} (\mathbf{1} + (Z^\varepsilon)^t)\|_{\mathfrak{G} \rightarrow J(\mu_0)} \leq C'_5 \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.42) следует, что

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} - \widetilde{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C'_5 |\mu_0|^{1/2} \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.43)$$

где

$$\widetilde{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)} = -\mu_0^{1/2} (\mathcal{L}_J^0 + I_{J(\mu_0)})^{-1} \mu_0^{-1/2} \text{rot}(\eta^0)^{-1} (\mathbf{1} + (Z^\varepsilon)^t) i \mathbf{q}.$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{z}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)}$, где $\hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)}$ является решением задачи

$$\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)} + \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)} = -i \operatorname{rot}(\eta^0)^{-1} (Z^\varepsilon)^t \mathbf{q}, \quad \operatorname{div} \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)} = 0. \quad (2.44)$$

Сопоставляя (2.44) и (2.40), убеждаемся, что $\hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)}$ (вместе с $\hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)} = i\mathbf{q}_\varepsilon + \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)}$) есть решение «поправочной» задачи (2.40).

Далее, из (2.39), (2.41) и (2.43) получаем

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(q)} - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C'_5 |\mu_0^{-1}| |\mu_0|^{1/2} \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{v}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)}$.

2.9. Итоговый результат при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ дает следующая

Теорема 2.4. Пусть $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)})$ — решение системы (2.38), и пусть поля $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{v}_\varepsilon^{(q)}$ определены в (2.39). Пусть $(\mathbf{w}_0^{(q)}, \mathbf{z}_0^{(q)})$ — решение «усредненной» системы (2.4) при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, и пусть $\mathbf{u}_0^{(q)} = (\eta^0)^{-1} \mathbf{w}_0^{(q)}, \mathbf{v}_0^{(q)} = \mu_0^{-1} \mathbf{z}_0^{(q)}$. Пусть $(\hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}, \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)})$ — решение «поправочной» системы (2.40), а поля $(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}, \hat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)})$ определены в (2.41). Пусть $Z(\mathbf{x}), Y(\mathbf{x})$ — матрицы-функции, определенные в условиях теоремы 2.1. Тогда для всех четырех полей $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{v}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ справедливы следующие аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ с погрешностью порядка ε :

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)} - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_6 \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.45)$$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)} - \tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_7 \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.46)$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(q)} - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C'_5 |\mu_0^{-1}| |\mu_0|^{1/2} \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.47)$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} - \tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C'_5 |\mu_0|^{1/2} \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.48)$$

где

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)} = (\mathbf{1} + Z^\varepsilon)(\mathbf{u}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}), \quad \tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)} = (\mathbf{1} + Y^\varepsilon)(\mathbf{w}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}), \quad (2.49)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{v}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)}, \quad \tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{z}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)}. \quad (2.50)$$

Постоянные в оценках (2.45)–(2.48) зависят лишь от $|\mu_0|, |\mu_0^{-1}|, \|\eta\|_{L_\infty}, \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

Отметим, что поля $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{v}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к соответствующим усредненным полям. Поправки к усредненным полям, входящие в (2.49), (2.50), слабо сходятся к нулю, и их можно интерпретировать как корректоры нулевого порядка.

2.10. Частные случаи при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Если $\eta^0 = \underline{\eta}$, то $\tilde{\eta}(\mathbf{x}) = \eta^0$ и $Y(\mathbf{x}) = 0, 1 + Z(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})^{-1} \eta^0$. Тогда из (2.45), (2.46), (2.49) вытекает

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия теоремы 2.4, причем $\eta^0 = \underline{\eta}$. Тогда для полей $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}, \mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$ справедливы оценки (2.45), (2.46), причем выражения для $\tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}, \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}$ принимают вид

$$\tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{w}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \eta^0 (\mathbf{u}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}) = (\eta^\varepsilon)^{-1} (\mathbf{w}_0^{(q)} + \hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}).$$

Если $\eta^0 = \bar{\eta}$, то $\Phi_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, 2, 3$, а тогда и $Z(\mathbf{x}) = 0$. В этом случае решение поправочной системы тривиально. Далее, в данном случае $\tilde{\eta}(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})$,

а потому $\mathbf{1} + Y(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1}$. Следовательно (см. (2.49), (2.50)),

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{u}_0^{(q)}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)} = \eta^\varepsilon(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0^{(q)} = \eta^\varepsilon\mathbf{u}_0^{(q)}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{v}_0^{(q)}, \quad \tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)} = \mathbf{z}_0^{(q)}.$$

С учетом сказанного из теоремы 2.4 вытекает

Теорема 2.6. Пусть выполнены условия теоремы 2.4, причем $\eta^0 = \bar{\eta}$. Тогда для полей $\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)}$, $\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(q)}$, $\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)}$ справедливы следующие аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(q)} - \mathbf{u}_0^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_6\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.51)$$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon^{(q)} - \eta^\varepsilon\mathbf{u}_0^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C_7\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.52)$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(q)} - \mathbf{v}_0^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C'_5|\mu_0|^{-1}|\mu_0|^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.53)$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(q)} - \mathbf{z}_0^{(q)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C'_5|\mu_0|^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.54)$$

Постоянные в оценках (2.51)–(2.54) зависят лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

2.11. Сводный результат. Теперь мы объединим результаты для случаев $\mathbf{q} = 0$ и $\mathbf{r} = 0$, несколько огрубив их. Из п. 1° теоремы 2.1 и теоремы 2.4 вытекает

Теорема 2.7. Пусть $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ — решение системы (2.3) и $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$. Пусть $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ — решение «усредненной» системы (2.4) и $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$ определены в (2.5). Пусть $(\hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)}, \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)})$ — решение «поправочной» системы (2.40) и $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)}$, $\hat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)}$ определены в (2.41). Пусть матрицы $Z(\mathbf{x})$, $Y(\mathbf{x})$ — те же, что и в условиях теоремы 2.1. Тогда для всех четырех полей $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ справедливы аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ с погрешностью порядка ε :

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Z^\varepsilon)(\mathbf{u}_0 + \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(q)})\|_{\mathfrak{G}} \leq \varepsilon(C_5''\|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}} + C_6\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.55)$$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Y^\varepsilon)(\mathbf{w}_0 + \hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)})\|_{\mathfrak{G}} \leq \varepsilon(C_5''\|\eta\|_{L_\infty}\|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}} + C_7\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.56)$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - (\mathbf{v}_0 + \hat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(q)})\|_{\mathfrak{G}} \leq \varepsilon|\mu_0|^{-1}(C_1''\|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}} + C'_5|\mu_0|^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - (\mathbf{z}_0 + \hat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(q)})\|_{\mathfrak{G}} \leq \varepsilon(C_1''\|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}} + C'_5|\mu_0|^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Обсудим частные случаи. Справедлива

Теорема 2.8. Пусть выполнены условия теоремы 2.7, причем $\eta^0 = \underline{\eta}$. Тогда оценки (2.55) и (2.56) принимают вид

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - (\eta^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{w}_0 + \hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)})\|_{\mathfrak{G}} \leq \varepsilon(C_5''\|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}} + C_6\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - (\mathbf{w}_0 + \hat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(q)})\|_{\mathfrak{G}} \leq \varepsilon(C_5''\|\eta\|_{L_\infty}\|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}} + C_7\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Объединяя результаты теоремы 2.3 и теоремы 2.6 (см. (2.51), (2.52)), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.9. Пусть выполнены условия теоремы 2.7, причем $\eta^0 = \bar{\eta}$. Тогда

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{G}} \leq \varepsilon(C_5''\|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}} + C_6\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \eta^\varepsilon\mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{G}} \leq \varepsilon(C_5''\|\eta\|_{L_\infty}\|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}} + C_7\|\mathbf{q}\|_{\mathfrak{G}}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [2] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolau, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978.
- [3] M. Sh. Birman, T. A. Suslina, *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, in: Oper. Theory: Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, 71–107.
- [4] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108.
- [5] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:5 (2005), 69–90.
- [6] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104.
- [7] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ, **18**:6 (2006), 1–130.
- [8] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматгиз, М., 1993.
- [9] Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.
- [10] Т. А. Суслина, *Об усреднении периодической системы Максвелла*, Функц. анализ и его прил., **38**:3 (2004), 90–94.
- [11] Т. А. Суслина, *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла*, Алгебра и анализ, **16**:5 (2004), 162–244.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
email: mbirman@list.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
email: suslina@list.ru

Поступило в редакцию
30 ноября 2006 г.