Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гнездилов, Бифуркации критических то-
ров для функционалов с 3-круговой симметрией,
Функц. анализ и его прил., 2000, том 34, вы-
пуск 1, 83–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa286>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 09:32:36

ЛИТЕРАТУРА

1. Жислин Г. М. Труды ММО, **9**, 81–120 (1960). 2. Avron J. E., Herbst J. W., Simon B. Ann. Phys., **114**, 431 (1978). 3. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. ТМФ, **113**, No. 3, 413–431 (1997). 4. Zhislin G. The spectrum of the relative motion of many-particle systems in magnetic fields: what do we know about it? In: A tribute to Michail S. Birman, Amer. Math. Soc., 1998, pp. 275–285. 5. Жислин Г. М. Спектральные свойства гамильтонианов с магнитным полем при фиксации псевдомомента. II. ТМФ, **118**, № 1, 15–39 (1999). 6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов. Мир, М., 1982.

Нижегородский научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступило в редакцию
17 апреля 1998 г.

УДК 517.9

Бифуркации критических торов для функционалов с 3-круговой симметрией

© 2000. А. В. Гнездилов

В изучении фазовых переходов в сегнетоэлектриках (см. [1, 2]) важную роль играют бифуркации множеств критических точек гладкого функционала, заданного на банаховом многообразии M и инвариантного относительно гладкого действия m -мерного тора. Функционалу, допускающему конечномерную эквивариантную редукцию на некоторой области из M , сопоставляется гладкая функция на конечномерном пространстве (называемом пространством ключевых переменных), инвариантная относительно некоторого действия тора на этом пространстве (см. [3]).

Рассмотрим стандартное действие m -мерного тора на $\mathbb{C}^m$ покоординатным умножением на комплексные числа, равные по модулю единице. Функция W на $\mathbb{R}^{2m} \approx \mathbb{C}^m$, инвариантная относительно этого действия, называется функцией с m -круговой симметрией. Такой функции отвечает гладкая функция $\tilde{W}$ на факторпространстве, изоморфном положительному координатному углу в $\mathbb{R}^m$.

Угловые особенности функций изучались Д. Сирсмой [4] как обобщения краевых особенностей В. И. Арнольда [5]. Простейшая невырожденная морсовская особая точка в нуле функции на $\mathbb{R}^m$, рассматриваемая как угловая особенность, называется *полурегулярной*.

Бифуркационные диаграммы Σ полурегулярных угловых особенностей изучались в [6]. Однако нужный для приложений вопрос о перечислении компонент дополнения к такой бифуркационной диаграмме, т.е. вопрос о перечислении всех возможных наборов (называемых ниже bif-раскладами) критических точек сужений функции $\tilde{W}$ на грани угла, или, другими словами, наборов невырожденных критических орбит разных размерностей функции W с поликруговой симметрией, возникающих при возмущениях общего положения полурегулярной особенности, при $m \geq 3$ оставался открытым до сих пор. Настоящая заметка решает этот вопрос при $m = 3$ и, в частности, дает полное описание бифуркации морсовских критических орбит из точки минимума с особенностью типа 3-круговой сборки.

Удобно изображать bif-расклад критических торов матрицей $\mathbf{M} = (l_i^j)$, $i, j = 0, 1, \dots, m-1$, в которой l_i^j — количество критических $(j+1)$ -мерных торов индекса (Морса) i .

Если функция $W: \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ гладко зависит от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^q$ и обладает 3-круговой симметрией, то она в соответствующих ключевых координатах ξ_j имеет следующий вид: $W = \bar{W} \cdot \rho$, где

$$\bar{W}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \lambda) = \text{const} + \sum_{j=1}^3 \alpha_j(\delta) \rho_j + \sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \rho_j \rho_k + o(\|\rho\|^2) + O(\delta)O(\|\rho\|^2), \quad (1)$$

$$\rho_j = r_j^2 = \xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2, \quad \rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3), \quad \delta = \lambda - \lambda_0, \quad \alpha_j(0) = 0.$$

bif-расклады зависят от индекса Морса ν в нуле формы $\sum_{j=1}^3 \alpha_j(\delta) r_j^2$ и от индекса Морса τ в (единственной) критической точке ограничения

$$\sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \rho_j \rho_k \Big|_{\sum_{j=1}^3 \alpha_j(\delta) \rho_j + 1 = 0}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть для ключевой функции (1) выполняются следующие три условия:

- (a) $\text{rk}(\partial \alpha_j / \partial \lambda_i) = 3$;
- (b) $\det(a_{jk}) \neq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, $a_{11} \neq 0$;
- (c) $\sum_{j,k=1}^3 a_{jk} \rho_j \rho_k > 0$ при $\rho_j \geq 0$ для любого j и $\|\rho\| > 0$.

Тогда при $\delta \notin \Sigma$ возможны те и только те bif-расклады критических торов для W , которым соответствуют матрицы $\mathbf{M}$ из следующих списков:

1) в случае $\nu = 1$, $\tau = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2) в случае $\nu = 1$, $\tau = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

3) в случае $\nu = 2$, $\tau = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

4) в случае $\nu = 2$, $\tau = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

5) в случае $\nu = 3$, $\tau = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

6) в случае $\nu = 3, \tau = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

7) в случае $\nu = 3, \tau = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widehat{W}$ — полином, полученный из W теилоровским разложением по ξ до четвертого порядка. Из асимптотических формул для ветвей бифурцирующих экстремалей [3] следует, что локальная геометрия кустыки (вблизи нуля) и структура bif-раскладов не изменяются при переходе от W к $\widehat{W}$. Замена $r_j = \sqrt{\xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими орбитами полинома $\widehat{W}$ и критическими точками функции $\widehat{W}: \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ (на координатном угле $\mathbb{R}_+^3$). Замена $|\alpha(\delta)|r_j^2 = \eta_j$ ($\eta_j \geq 0$ для любого j) сводит изучение рассматриваемых bif-раскладов к описанию допустимых раскладов критических точек функции $U(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_{jk} \eta_j \eta_k$ на следующих плоских областях в $\mathbb{R}^3: \{\eta: \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1, \eta_j \geq 0 \text{ для любого } j\}, \{\eta: \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 1, \eta_j \geq 0 \text{ для любого } j\}, \{\eta: \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = -1, \eta_j \geq 0 \text{ для любого } j\}$.

Выразив η_3 через η_1 и η_2 (в силу уравнений плоскостей, несущих симплексы) и подставив эти выражения в U , получим задачу описания bif-раскладов полиномов второй степени на стандартных двумерных симплексах в $\mathbb{R}^2$. После приведения с помощью аффинного преобразования координат полинома второй степени к канонической форме $\widehat{U}(\zeta_1, \zeta_2) = \text{const} \pm \zeta_1^2 \pm \zeta_2^2$ получим двойственную задачу описания bif-раскладов критических точек функции $\widehat{U}$ на подвижных симплексах. Вследствие изначальной положительной определенности кватричной части функции W на $\mathbb{R}^6$ функция $\widehat{U}$ также является положительно определенной (после всех замен) на рассматриваемых подвижных симплексах. Описание ее bif-раскладов на допустимых подвижных симплексах производится через описание bif-раскладов на соответствующих симплексах для квадратичных форм $U_0(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$, $U_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1^2 - \zeta_2^2$, $U_2(\zeta_1, \zeta_2) = -\zeta_1^2 - \zeta_2^2$ (нижний индекс j у U_j совпадает со значением τ). Допускаются лишь те симплексы, на которых область отрицательной определенности формы U_j ограничена. Количество критических торов размерности $j + 1$ равно количеству критических точек, лежащих на грани размерности j соответствующего симплекса.

На симплексах удобно использовать следующие правила: если линия уровня функции U_j касается ребра снаружи и ее градиент направлен внутрь, то в точке касания расположена точка минимума, если градиент направлен наружу — точка максимума, если линия уровня функции U_j касается ребра изнутри симплекса, то место касания — седловая точка, если линия уровня проходит через вершину симплекса, не рассекая угол, и градиент направлен внутрь, то в этой

вершине находится точка минимума, если наружу — точка максимума, и если линия уровня проходит через вершину симплекса, рассекая угол, то в данной вершине расположена седловая точка. Случай прохождения линии уровня через вершину и одновременной перпендикулярности градиента одной из сторон симплекса является вырожденным (параметр принадлежит каустике).

Исходя из указанных правил, а также геометрических свойств касания прямой с окружностями и гиперболами (линиями уровня функций U_0 , U_2 и U_1 соответственно) строятся характерные сечения каустики [7, 8]. В случае каждого сечения $\mathbb{R}^2$ будет разбиваться на области, каждой из которых соответствует свой *bif*-расклад. Перебирая связные компоненты дополнений к этим сечениям и пользуясь описанными выше правилами, легко перечислить все возможные *bif*-расклады функций U_0 , U_1 , U_2 на всех допустимых симплексах, что дает в итоге полное описание возможных *bif*-раскладов для W в виде указанных в теореме списков матриц.

ЗАМЕЧАНИЕ. Назовем $l = \langle M\vec{\alpha}, \vec{\pi} \rangle + (-1)^\nu$, где $\vec{\alpha} = (1, -1, 1)$, $\vec{\pi} = (2, 4, 8)$, а M — матрица *bif*-расклада, обобщенным эйлеровым числом. Тогда для всех рассматриваемых случаев $l = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Струков Б. А., Леванюк А. П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. Наука, М., 1995.
2. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Изв. ВУЗ, Матем., **41**, № 2, 35–46 (1997).
3. Сапронов Ю. И. УМН, **51**, вып. 1, 101–132 (1996).
4. Siersma D. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **32**, No. 125, 119–127 (1981).
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. Наука, М., 1982.
6. Сапронов Ю. И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций. Матем. сб., **180**, № 10, 1299–1310 (1989).
7. Гнездилов А. В. Понtryгинские чтения-VIII, Тез. докл. Воронеж, ВГУ, 1997, с. 36.
8. Гнездилов А. В. Труды математического факультета ВГУ (новая серия), **2** (18), 19–26 (1997).

Воронежский государственный университет

Поступило в редакцию

30 марта 1998 г.

В переработанном виде

26 марта 1999 г.

УДК 519.46

Гауссовские меры на группе верхнетреугольных матриц бесконечного порядка, квазиинвариантные относительно обратного преобразования

© 2000. А. В. Косяк

Для локально компактных групп G известна [1] теорема о коммутанте:

Коммутант правого регулярного представления ρ локально компактной группы G порожден операторами левого регулярного представления λ , причем существует сплетающий оператор J , $(Jf)(x) = (dh(x^{-1})/dh(x))^{1/2} f(x^{-1})$, такой, что $J\rho_t J = \lambda_t$, $t \in G$, где dh — левая мера Хаара.