Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ц. Гохберг, М. А. Каасхук, Л. Е. Лерер, Обратная задача для ортогональных матричных функций Крейна, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 2, 44–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2860>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:36:19

УДК 917.9

Обратная задача для ортогональных матричных функций Крейна

© 2007. И. ГОХБЕРГ, М. А. КААСХУК, Л. ЛЕРЕР

*Памяти М. Г. Крейна — великого математика
и превосходного учителя*

§1. Введение и основные теоремы

В цикле работ, начатом в середине пятидесятых годов, М. Г. Крейн ввел и исследовал класс (скалярных) целых функций вида

$$G_\omega(\lambda) = e^{-i\omega\lambda} \left(1 + \int_0^\omega e^{i\lambda s} g(s) ds \right). \quad (1.1)$$

Здесь ω — положительное число, а g — решение уравнения

$$g(t) - \int_0^\omega k(t-s)g(s) ds = k(t), \quad 0 \leq t \leq \omega, \quad (1.2)$$

в пространстве $L_1[0, \omega]$, где предполагается, что функция k интегрируема в смысле Лебега на отрезке $[-\omega, \omega]$, а $k(-t) = \overline{k(t)}$. Крейн рассматривал функции G_ω ($\omega > 0$) в качестве континуальных аналогов классических ортогональных многочленов Сегё.

Чтобы увидеть связь с ортогональными многочленами, предположим, что h — положительная функция на единичной окружности $\mathbb{T}$, имеющая абсолютно сходящийся ряд Фурье $\sum_{j=-\infty}^\infty h_j z^j$. При $n = 0, 1, 2, \dots$ n -й классический многочлен Сегё p_n , определенный функцией h , может быть записан в виде

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^n z^{n-\nu} b_\nu,$$

где коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_n$ определяются из уравнения

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_{-1} & \cdots & h_{-n} \\ h_1 & h_0 & \cdots & h_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n-1} & \cdots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Многочлены p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) ортогональны относительно скалярного произведения в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, определяемого с помощью положительной функции h по формуле

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})} h(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Поскольку предполагается, что функция h положительна на окружности $\mathbb{T}$, то тёплицава матрица H в левой части уравнения (1.3) положительно определена. В непрерывном случае роль матрицы H играет оператор $I - K$, где K — компактный интегральный оператор в $L_1[0, \omega]$, входящий в формулу (1.2). Иными словами, формальным аналогом уравнения (1.3) является уравнение

$$f(t) - \int_0^\omega k(t-s)f(s)ds = \delta(t), \quad 0 \leq t \leq \omega. \quad (1.4)$$

Чтобы избежать использования δ -функции, сделаем подстановку $g(t) = f(t) - \delta(t)$, после чего уравнение (1.4) переписывается в виде (1.2).

Чтобы получить аналог классических многочленов Сегё p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) в непрерывном случае, заменим целое число n положительным вещественным числом ω , а многочлен p_n — функцией G_ω . Далее, положим $z = e^{-i\lambda}$, заменим $z^{(n-\nu)}$ ($0 \leq \nu \leq n$) на $e^{-i\lambda(\omega-t)}$ ($0 \leq t \leq \omega$) и проинтегрируем от 0 до ω вместо того, чтобы суммировать от 0 до n . Таким образом, аналог многочленов p_n в непрерывном случае задается формулой

$$G_\omega(\lambda) = \int_0^\omega e^{-i\lambda(\omega-t)} f(t) dt = e^{-i\lambda\omega} \int_0^\omega e^{i\lambda t} f(t) dt.$$

Как и ранее, делая замену $g(t) = f(t) - \delta(t)$, убеждаемся, что функция $G_\omega(\lambda)$ задается формулой (1.1).

В предположении, что оператор $I - K$ положительно определен (что в дискретном случае отвечает положительности функции h), Крейн [18] показал, что функция G_ω не имеет нулей в замкнутой верхней полуплоскости. Если предположить лишь, что оператор $I - K$ обратим, то у G_ω не будет нулей на вещественной оси и пар сопряженных нулей (см. работы Крейна и Лангера [21], [22]). В этих работах решена также соответствующая обратная задача. А именно, в них показано, что если функция (1.1) не имеет нулей на вещественной оси и пар сопряженных нулей, то существует функция $k \in L_1[-\omega, \omega]$, удовлетворяющая условию $k(-t) = \overline{k(t)}$ и такая, что входящая в формулу (1.1) функция g является решением интегрального уравнения (1.2). Дискретный вариант этих результатов, т. е. случай, когда многочлены $p_n(z)$ находятся из уравнения (1.3) с вещественной (не обязательно положительной) функцией $h(z)$, был исследован Крейном в работе [20] (см. также [7]).

Заметим, что множитель $e^{-i\omega\lambda}$ в правой части формулы (1.1) не играет роли в упомянутых в предыдущем абзаце результатах. Конкретное значение параметра ω также несущественно. Поэтому мы опустим множитель $e^{-i\omega\lambda}$ и индекс ω у $G_\omega(\lambda)$ и вместо G_ω будем писать просто Φ .

Новые результаты. Цель данной работы состоит в том, чтобы получить матричные аналоги упомянутых выше результатов Крейна и Лангера. В случае матричных функций наряду с нулями следует учитывать жордановы цепочки и корневые функции. Прежде всего кратко напомним эти понятия.

Пусть $H(\lambda)$ есть $n \times n$ -матричная функция, аналитическая в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Функция φ со значениями в $\mathbb{C}^n$ называется *корневой функцией порядка не ниже k* для $H(\lambda)$ в точке λ_0 , где k — натуральное число, если (см. [13, разд. А.1]) она аналитична в точке λ_0 , вектор $\varphi(\lambda_0)$ отличен от нуля, а функция $H(\lambda)\varphi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже k (т. е. первые k коэффициентов разложения Тейлора функции $H(\lambda)\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 нулевые). Отметим, что для

существования такой корневой функции необходимо и достаточно, чтобы определитель $\det H(\lambda)$ обращался в нуль в точке λ_0 . Используя разложения Тейлора

$$H(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{\nu} H_{\nu}, \quad \varphi(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{\nu} \varphi_{\nu}$$

функций $H(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 , видим, что φ является корневой функцией порядка не ниже k для $H(\lambda)$ в точке λ_0 тогда и только тогда, когда

$$\varphi_0 \neq 0, \quad \sum_{j=0}^r H_j \varphi_{r-j} = 0, \quad r = 0, \dots, k-1.$$

В этом случае будем также говорить, что векторы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ образуют *жорданову цепочку длины k* для $H(\lambda)$ в точке λ_0 . За дальнейшими подробностями мы отсылаем читателя к [9, разд. 2.1] и [13, разд. А.1].

Зафиксируем теперь обозначения и терминологию. Всюду далее считается, что $\varphi \in L_1^{n \times n}[0, \omega]$, и через Φ обозначается матричная целая функция, задаваемая формулой

$$\Phi(\lambda) = I + \int_0^{\omega} e^{i\lambda t} \varphi(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

Будем называть ее *ортогональной матричной (целой) функцией Крейна* (на отрезке $[0, \omega]$), если в $L_1^{n \times n}[-\omega, \omega]$ существует такая эрмитова $n \times n$ -матричная функция k , что

$$\varphi(t) - \int_0^{\omega} k(t-s) \varphi(s) ds = k(t), \quad 0 \leq t \leq \omega. \quad (1.6)$$

При этом будем также говорить, что функция Φ *порождается* функцией k . Напомним, что $n \times n$ -матричная функция k на отрезке $[-\omega, \omega]$ называется *эрмитовой*, если $k(t) = k(-t)^*$ для всех $t \in [-\omega, \omega]$. Заметим, что в силу результатов из [10] (которые можно также найти в [6, гл. 7] или [14]) из разрешимости уравнения (1.6) вытекает, что оператор $I - K$, определяемый левой частью этого уравнения, обратим в $L_1^n[0, \omega]$. Таким образом, определение ортогональной функции Крейна неявно содержит требование обратимости оператора $I - K$.

Наш первый основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1.1. Пусть $\varphi \in L_1^{n \times n}[0, \omega]$. Определенная формулой (1.5) функция Φ есть ортогональная матричная функция Крейна, порожденная некоторой эрмитовой матричной функцией k из пространства $L_1^{n \times n}[-\omega, \omega]$, тогда и только тогда, когда определитель $\det \Phi(\lambda)$ не имеет вещественных нулей, а для любой симметричной пары $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ нулей этого определителя выполнены соотношения

$$\sum_{j=0}^k \langle \varphi_{k-j}, \psi_j \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \min\{p, q\} - 1, \quad (1.7)$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}$ и $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{q-1}$ — произвольные жордановы цепочки для Φ в точках λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ соответственно.

В скалярном случае (при $n = 1$) из условия (1.7) при $k = 0$ вытекает, что либо $\varphi_0 = 0$, либо $\psi_0 = 0$, либо оба вектора нулевые. Но в жордановой цепочке первый элемент отличен от нуля по определению. Таким образом, в скалярном

случае соотношения (1.7) эквивалентны условию, что функция Φ не имеет симметричных пар нулей $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$. Поэтому теорема 1.1 содержит соответствующий результат Крейна и Лангера для скалярных функций.

Необходимое и достаточное условие из теоремы 1.1 может быть сформулировано также в терминах корневых функций следующим образом:

функция $\det \Phi(\lambda)$ не имеет вещественных нулей, а для любой симметричной пары $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ ее нулей выполнено следующее условие: если φ — корневая функция порядка не ниже p для $\Phi(\lambda)$ в точке λ_0 , а ψ — корневая функция порядка не ниже q для $\Phi(\lambda)$ в точке $\bar{\lambda}_0$, то функция $\psi(\bar{\lambda})^* \varphi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже $\min\{p, q\}$.

Эта альтернативная формулировка будет использована в §3.

Для доказательства теоремы 1.1 свяжем с Φ матричное функциональное уравнение

$$U(\lambda)\Phi(\lambda) + \Phi(\bar{\lambda})^*V(\lambda) = I_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

Здесь требуется, чтобы неизвестные U и V были $n \times n$ -матричными целыми функциями специального вида, а именно,

$$U(\lambda) = I_n + \int_0^\omega e^{i\lambda t} u(t) dt, \quad V(\lambda) = \int_\omega^{2\omega} e^{i\lambda t} v(t) dt, \quad (1.9)$$

где $u \in L_1^{n \times n}[0, \omega]$ и $v \in L_1^{n \times n}[\omega, 2\omega]$. Будем говорить, что функции U и V образуют *регулярную пару решений* уравнения (1.8), если они имеют вид (1.9) и удовлетворяют этому уравнению. В следующей теореме сформулирован наш второй основной результат.

Теорема 1.2. Пусть $\varphi \in L_1^{n \times n}[0, \omega]$. Функция Φ вида (1.5) является ортогональной матричной функцией Крейна, порожденной некоторой эрмитовой матричной функцией k из $L_1^{n \times n}[-\omega, \omega]$, тогда и только тогда, когда у уравнения (1.8) есть регулярная пара решений U, V . При этом для любой регулярной пары решений U, V уравнения (1.8) такую эрмитову матричную функцию $k \in L_1^{n \times n}[-\omega, \omega]$ можно получить, сужая на отрезок $[-\omega, \omega]$ обратное преобразование Фурье матричной функции

$$(U(\bar{\lambda})^* - V(\lambda))\Phi(\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Иными словами, $k = \ell|_{[-\omega, \omega]}$, где

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} \ell(s) ds = (U(\bar{\lambda})^* - V(\lambda))\Phi(\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

В дискретном случае как теорема 1.1, так и теорема 1.2 известны. Дискретный вариант теоремы 1.1 принадлежит Гохбергу и Лереру [15], а теоремы 1.2 — Ацмону [1]. В работе [15] теорема 1.2 фигурирует в несколько иной форме, использующей для матричных многочленов уравнения другого типа, чем уравнение (1.8).

Теорема 1.2 будет доказана в следующем параграфе, а теорема 1.1 — в последнем параграфе с использованием теоремы 1.2 и основного результата работы [12].

Дополнительные ссылки и дальнейшие комментарии. Ортогональные функции Крейна участвуют и в другой замечательной теореме, которая

связывает число нулей ортогональной функции с числом отрицательных собственных значений интегрального оператора, заданного левой частью уравнения (1.2). Точнее, для матричных функций справедливо следующее утверждение. Если функция Φ , заданная формулой (1.5), есть ортогональная матричная функция Крейна, порожденная некоторой эрмитовой матричной функцией k из $L_1^{n \times n}[-\omega, \omega]$, то соответствующий интегральный оператор T в пространстве $L_1^n[0, \omega]$, заданный формулой

$$(Tf)(t) = f(t) - \int_0^\omega k(t-s)f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \omega,$$

обратим, и число нулей определителя $\det \Phi(\lambda)$ в верхней полуплоскости равно числу отрицательных собственных значений этого оператора. В скалярном случае этот результат восходит к работе Крейна и Лангера [22], а в матричном случае он содержится в [7] (см. также [6, гл. 8]) и, с другим доказательством, в [5].

Указанные выше результаты имеют и дискретные аналоги. Для скалярного случая они содержатся в [20], а для матричного — в [2] и [15].

Отметим также, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы Φ была ортогональной матричной функцией Крейна, можно сформулировать в терминах симметрических разложений функции $\Phi(\lambda)\Phi(\bar{\lambda})^*$ на взаимно простые множители. В этом случае производящую функцию можно получить, используя операторный аналог результатной матрицы; см. по этому поводу теорему 5.8 из [11] (и теорему 5.1 из [15] для дискретного случая).

В заключение скажем несколько слов о приложениях. Ортогональные функции Крейна, как скалярные, так и матричные, играют важную роль в различных разделах анализа и математической теории систем и в разнообразных инженерных задачах. Начиная с последних, отметим, что в работах [16] и [17] (см. также [24]) дана любопытная интерпретация ортогональных функций Крейна как преобразований Фурье процесса обновления для стационарного процесса с ковариацией $\delta(t-s) + k(t-s)$. В статье Крейна и Лангера [22], опубликованной в 1985 г., ортогональные функции играют ключевую роль в решении различных задач расширения и продолжения; см. по этому поводу также статью [23], где фигурируют матричные функции. У решений этих задач продолжения имеются важные приложения в теории оценивания и предсказания для случайных процессов (см., например, [4] и имеющиеся там ссылки). Кроме того, как показано в [22, разд. 12], функции Крейна играют существенную роль в решении обратной спектральной задачи для уравнений Штурма–Лиувилля. Говоря более общо, ортогональные матричные функции Крейна используются при изучении канонических дифференциальных уравнений, в том числе так называемых дифференциальных систем Крейна (см., например, [19], [3], [25] и библиографию в последней из этих работ). Связь с каноническими системами возникает, если длину ω отрезка в формуле (1.1) рассматривать как вторую независимую переменную. Ортогональные матричные функции Крейна существенным образом возникают и при анализе современных задач о пополнении (см. [5]).

Некоторые обозначения и терминология. Пусть X — матрица размера $k \times \ell$. Тогда через $X^\top$ обозначается транспонированная матрица, через X^* — эрмитово-сопряженная матрица, а через $\bar{X}$ — матрица размера $k \times \ell$, которая получается, если каждый элемент матрицы X заменить его комплексно-сопряженным. Таким образом, $\bar{X} = (X^\top)^* = (X^*)^\top$. Мы отождествляем вектор

$x \in \mathbb{C}^n$ с матрицей размера $n \times 1$, j -й элемент которой равен j -й координате вектора x в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^n$.

Преобразование Фурье матричной функции h из пространства $L_1^{n \times n}(\mathbb{R})$ будет обозначаться через $\hat{h}$, т. е.

$$\hat{h}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} h(s) ds, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Всюду в работе используется соглашение, в соответствии с которым функция на конечном отрезке рассматривается как функция на всей прямой, доопределенная вне этого отрезка нулем.

§2. Доказательство теоремы 1.2

В этом параграфе мы докажем теорему 1.2. Разобьем доказательство на две части.

Часть 1. Пусть Φ — ортогональная функция Крейна вида (1.5), порожденная эрмитовой функцией $k \in L_1^{n \times n}[-\omega, \omega]$. Мы должны показать, что у уравнения (1.8) есть регулярная пара решений U, V , т. е. пара решений вида (1.9).

Пусть r есть $n \times n$ -матричная функция, задаваемая формулой

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s) ds = r(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Здесь мы воспользовались упомянутым выше соглашением, в соответствии с которым функция на конечном отрезке рассматривается как функция на всей прямой, доопределенная вне этого отрезка нулем. Поскольку Φ — ортогональная функция Крейна, порожденная функцией k , то функция φ удовлетворяет уравнению (1.6) и потому $r(t) = k(t)$ при $0 \leq t \leq \omega$. Так как функция φ сосредоточена на отрезке $[0, \omega]$, а k — на отрезке $[-\omega, \omega]$, то из формулы (2.1) следует, что функция r сосредоточена на отрезке $[-\omega, 2\omega]$. Зададим функции $u \in L_1^{n \times n}[0, \omega]$ и $v \in L_1^{n \times n}[\omega, 2\omega]$ формулами

$$u(t) = r(-t)^* - k(-t)^* \quad (0 \leq t \leq \omega), \quad v(t) = -r(t) \quad (\omega \leq t \leq 2\omega).$$

Тогда (опять рассматривая функцию на конечном отрезке как функцию на всей прямой, доопределенную вне этого отрезка нулем) мы имеем

$$r(t) = u(-t)^* + k(t) - v(t), \quad \infty < t < \infty. \quad (2.2)$$

Используя формулу (2.1) и переходя к преобразованиям Фурье в (2.2), мы получаем, что

$$\hat{\varphi}(\lambda) - \hat{k}(\lambda)\hat{\varphi}(\lambda) = \hat{k}(\lambda) + \hat{u}(\bar{\lambda})^* - \hat{v}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Определим теперь функцию F формулой

$$F(\lambda) = I_n - \int_{-\infty}^{\omega} e^{i\lambda t} k(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Поскольку функция k сосредоточена на отрезке $[-\omega, \omega]$, то $F(\lambda) = I_n - \hat{k}(\lambda)$, и мы видим, что соотношение (2.3) можно переписать в виде

$$F(\lambda)\Phi(\lambda) = U(\bar{\lambda})^* - V(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.5)$$

где

$$U(\lambda) = I_n + \int_0^\omega e^{i\lambda t} u(t) dt, \quad V(\lambda) = \int_\omega^{2\omega} e^{i\lambda t} v(t) dt.$$

Нужно показать, что эти U и V удовлетворяют уравнению (1.8).

Нам будет удобно воспользоваться алгеброй Винера $\mathscr{W}$ $n \times n$ -матричных функций на вещественной прямой. Напомним, что

$$\mathscr{W} = \left\{ H \mid H(\lambda) = M + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} h(t) dt, M \in \mathbb{C}^{n \times n}, h \in L_1^{n \times n}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Для любого элемента $H \in \mathscr{W}$ определим функцию H^* формулой $H^*(\lambda) = H(\lambda)^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $H^* \in \mathscr{W}$, причем отображение $*$ — инволюция в алгебре $\mathscr{W}$. Элемент $H \in \mathscr{W}$ называется *самосопряженным*, если $H^* = H$. Если $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$ — произвольное подмножество, то через $\mathscr{V}^*$ обозначим множество всех элементов H^* , где $H \in \mathscr{V}$. Нам потребуются также следующие подпространства в $\mathscr{W}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_1 &= \left\{ H \mid H(\lambda) = \int_\omega^\infty e^{i\lambda t} h(t) dt, h \in L_1^{n \times n}[\omega, \infty) \right\}, \\ \mathscr{W}_2 &= \left\{ H \mid H(\lambda) = M + \int_0^\omega e^{i\lambda t} h(t) dt, M \in \mathbb{C}^{n \times n}, h \in L_1^{n \times n}[0, \omega] \right\}, \\ \mathscr{W}_3^0 &= \left\{ H \mid H(\lambda) = \int_{-\omega}^0 e^{i\lambda t} h(t) dt, h \in L_1^{n \times n}[-\omega, 0] \right\}, \\ \mathscr{W}_4 &= \left\{ H \mid H(\lambda) = \int_{-\infty}^{-\omega} e^{i\lambda t} h(t) dt, h \in L_1^{n \times n}(-\infty, -\omega] \right\}. \end{aligned}$$

Они задают разложение

$$\mathscr{W} = \mathscr{W}_1 \oplus \mathscr{W}_2 \oplus \mathscr{W}_3^0 \oplus \mathscr{W}_4 \quad (2.6)$$

пространства $\mathscr{W}$. Заметим, что $\mathscr{W}_1^* = \mathscr{W}_4$ и $\mathscr{W}_2^* = \mathscr{W}_3$, где

$$\mathscr{W}_3 = \left\{ H \mid H(\lambda) = M + \int_{-\omega}^0 e^{i\lambda t} h(t) dt, M \in \mathbb{C}^{n \times n}, h \in L_1^{n \times n}[-\omega, 0] \right\}.$$

Для этих подпространств выполнен ряд правил умножения. Например,

$$\mathscr{W}_2 \mathscr{W}_1 \subset \mathscr{W}_1, \quad \mathscr{W}_2 \mathscr{W}_2 \subset \mathscr{W}_1 \oplus \mathscr{W}_2, \quad \mathscr{W}_3 \mathscr{W}_1 \subset \mathscr{W}_1 \oplus \mathscr{W}_2.$$

Напомним, что функция k эрмитова. Поэтому из определения (2.4) вытекает, что $F(\bar{\lambda})^* = F(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. В частности, $F(\lambda)^* = F(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно, $F^* = F$, т. е. F — самосопряженный элемент алгебры $\mathscr{W}$. Опуская переменную λ , можно переписать соотношение (2.5) в виде $F\Phi = U^* - V$, где все функции рассматриваются только на $\mathbb{R}$. Используя тот факт, что $F^* = F$, получаем $\Phi^* F = U - V^*$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} U\Phi + \Phi^* V &= U\Phi + \Phi^* V + V^* \Phi - V^* \Phi \\ &= \Phi^* V + V^* \Phi + (U - V^*) \Phi = \Phi^* V + V^* \Phi + \Phi^* F \Phi. \end{aligned}$$

Функции Φ , U и V лежат в алгебре $\mathscr{W}$. Точнее, $\Phi, U \in \mathscr{W}_2$ и $V \in \mathscr{W}_1$. Поскольку элементы $\Phi^*V + V^*\Phi$ и $\Phi^*F\Phi$ являются самосопряженными в $\mathscr{W}$, то самосопряжен и элемент $U\Phi + \Phi^*V$. Но

$$U\Phi + \Phi^*V \in \mathscr{W}_2\mathscr{W}_2 + \mathscr{W}_3\mathscr{W}_1 \subset \mathscr{W}_+ + \mathscr{W}_+ \subset \mathscr{W}_+,$$

где $\mathscr{W}_+ = \mathscr{W}_1 \oplus \mathscr{W}_2$, т. е.

$$\mathscr{W}_+ = \left\{ H \mid H(\lambda) = M + \int_0^\infty e^{i\lambda t} h(t) dt, M \in \mathbb{C}^{n \times n}, h \in L_1^{n \times n}[0, \infty) \right\}.$$

Таким образом, из самосопряженности элемента $U\Phi + \Phi^*V$ вытекает, что $U\Phi + \Phi^*V \in \mathscr{W}_+ \cap (\mathscr{W}_+)^*$. Мы заключаем, что $U\Phi + \Phi^*V$ — постоянная функция, так что

$$U(\lambda)\Phi(\lambda) + \Phi(\bar{\lambda})^*V(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (U(\lambda)\Phi(\lambda) + \Phi(\bar{\lambda})V(\lambda)) = I_n.$$

Поэтому U , V — регулярная пара решений уравнения (1.8).

Часть 2. В этой части предполагается, что U , V — регулярная пара решений уравнения (1.8), т. е. U и V удовлетворяют этому уравнению и имеют вид (1.9). Нужно доказать, что Φ — ортогональная функция Крейна. Заметим, что U и V принадлежат алгебре Винера $\mathscr{W}$.

Прежде всего покажем, что $\det \Phi(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Зафиксируем число $\lambda \in \mathbb{R}$ и предположим, что $\det \Phi(\lambda) = 0$. Тогда существует такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^n$, что $\Phi(\lambda)x = 0$. Так как λ вещественно ($\lambda = \bar{\lambda}$), то $x^*\Phi(\bar{\lambda})^* = 0$. Таким образом, из уравнения (1.8) вытекает, что $x^*x = 0$, чего не может быть, поскольку $x \neq 0$. Итак, $\det \Phi(\lambda) \neq 0$, что и требовалось.

Поскольку Φ принадлежит алгебре Винера, то из результата, сформулированного в предыдущем абзаце, вытекает (в силу теоремы Винера), что элемент Φ обратим в $\mathscr{W}$. Определим функцию F формулой

$$F(\lambda) = (U(\bar{\lambda})^* - V(\lambda))\Phi(\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда она лежит в алгебре Винера. Докажем, что элемент F самосопряжен в $\mathscr{W}$, т. е. $F = F^*$.

Для этого прежде всего заметим, что уравнение (1.8) можно переписать в виде $U\Phi + \Phi^*V = E$, где элемент $E \in \mathscr{W}$ — функция, тождественно равная I_n . Переходя к сопряженным элементам, получаем $\Phi^*U^* + V^*\Phi = E$, поскольку $E^* = E$. Так как правая часть обоих тождеств равна E , то $U\Phi + \Phi^*V = \Phi^*U^* + V^*\Phi$, так что

$$(U - V^*)\Phi = \Phi^*(U^* - V).$$

Умножив это тождество справа на Φ^{-1} и слева на $(\Phi^*)^{-1}$, мы получим $(U^* - V)\Phi^{-1} = (\Phi^*)^{-1}(U - V^*)$. Но $(\Phi^*)^{-1} = (\Phi^{-1})^*$, так что

$$F = (U^* - V)\Phi^{-1} = (\Phi^{-1})^*(U - V^*) = F^*.$$

Таким образом, F — самосопряженный элемент алгебры $\mathscr{W}$.

Из определения элемента F видно, что

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \rightarrow \infty} (U(\bar{\lambda})^* - V(\lambda))\Phi(\lambda)^{-1} = I_n.$$

Отсюда следует, что

$$F(\lambda) = I_n - \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda t} \ell(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \text{ для некоторого } \ell \in L_1^{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Так как F самосопряжен в $\mathscr{W}$, то ℓ эрмитов, т. е. удовлетворяет соотношению $\ell(t)^* = \ell(-t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть k — сужение функции ℓ на отрезок $[-\omega, \omega]$. Тогда $k \in L_1^{n \times n}[-\omega, \omega]$ и элемент k эрмитов. Мы покажем, что Φ — ортогональная функция Крейна, порожденная функцией k .

Заметим, что

$$F(\lambda) = -L_1(\lambda) + F_0(\lambda) - L_4(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где

$$F_0(\lambda) = I - \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda t} k(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$L_1(\lambda) = \int_{\omega}^{\infty} e^{i\lambda t} \ell(t) dt, \quad L_4(\lambda) = \int_{-\infty}^{-\omega} e^{i\lambda t} \ell(t) dt \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} F_0(\lambda)\Phi(\lambda) &= (F(\lambda) + L_1(\lambda) + L_4(\lambda))\Phi(\lambda) \\ &= U(\lambda)^* - V(\lambda) + L_1(\lambda)\Phi(\lambda) + L_4(\lambda)\Phi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Заметим, что $L_1 \in \mathscr{W}_1$. Поэтому $L_1\Phi \in \mathscr{W}_1\mathscr{W}_2 \subset \mathscr{W}_1$, т. е. для некоторой функции $h_1 \in L_1^{n \times n}[\omega, \infty)$ выполнено соотношение

$$L_1(\lambda)\Phi(\lambda) = \int_{\omega}^{\infty} e^{i\lambda t} h_1(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Так как $L_4 \in \mathscr{W}_4$, то $L_4\Phi \in \mathscr{W}_4\mathscr{W}_2 \subset \mathscr{W}_-^0$, где $\mathscr{W}_-^0 = \mathscr{W}_3^0 \oplus \mathscr{W}_4$. Таким образом,

$$L_4(\lambda)\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} h_-(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

для некоторого $h_- \in L_1^{n \times n}(-\infty, 0]$. Теперь положим

$$r_-(t) = u(-t)^* + h_-(t) \quad (t \leq 0), \quad r_1 = -v(t) + h_1(t) \quad (t \geq \omega).$$

Используя предыдущие формулы, видим, что

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\lambda) - \hat{k}(\lambda)\hat{\varphi}(\lambda) &= -F_0(\lambda) + F_0(\lambda)\Phi(\lambda) \\ &= -F_0(\lambda) + U(\lambda)^* - V(\lambda) + L_1(\lambda)\Phi(\lambda) + L_4(\lambda)\Phi(\lambda) \\ &= \hat{k}(\lambda) + r_-(\lambda) + r_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Переходя к обратному преобразованию Фурье, получаем

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s) ds = k(t) + r_-(t) + r_1(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Напомним, что носители функций φ , r_- и r_1 содержатся в интервалах $[0, \omega)$, $(-\infty, 0]$ и $[\omega, \infty)$ соответственно. Поэтому сужение на интервал $0 \leq t \leq \omega$ дает

$$\varphi(t) - \int_0^{\omega} k(t-s)\varphi(s) ds = k(t), \quad 0 \leq t \leq \omega.$$

Итак, Φ — ортогональная функция Крейна, порожденная функцией k .

Как мы показали выше, функция k есть сужение функции ℓ на отрезок $[-\omega, \omega]$. Другими словами, k — сужение на отрезок $[-\omega, \omega]$ обратного преобразования Фурье матричной функции (1.10). Итак, мы одновременно доказали последнее утверждение теоремы 1.2. $\square$

Замечание. Судя по приведенному выше доказательству, можно ожидать, что теорема 1.2 имеет абстрактный вариант, использующий лишь структуру, возникающую из ленточного метода (ср. [8, гл. XXXIV]) для соответствующей алгебры функций. Мы вернемся к этой теме в одной из будущих публикаций.

§3. Доказательство теоремы 1.1

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1. С учетом теоремы 1.2 достаточно показать, что следующие два утверждения эквивалентны:

- (a) у уравнения (1.8) есть регулярная пара решений U, V ;
- (b) у определителя $\det \Phi(\lambda)$ нет вещественных нулей, а для любой симметричной пары $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ его нулей выполнено соотношение

$$\sum_{j=0}^k \langle \varphi_{k-j}, \psi_j \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \min\{p, q\} - 1,$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}$ и $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{q-1}$ — произвольные жордановы цепочки для Φ в точках λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ соответственно.

Доказательство этой эквивалентности разобьем на две части. Во второй части мы воспользуемся теоремой 1.1 из [12]. В этой теореме рассматривается матричное функциональное уравнение вида

$$X(\lambda)\mathcal{B}(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)Y(\lambda) = G(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

где коэффициенты $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ суть $n \times n$ -матричные целые функции, задаваемые формулами

$$\mathcal{B}(\lambda) = I_n + \int_{-\omega}^0 e^{i\lambda t} b(t) dt, \quad \mathcal{D}(\lambda) = I_n + \int_0^{\omega} e^{i\lambda t} d(t) dt. \quad (3.2)$$

Здесь $b \in L_1^{n \times n}[-\omega, 0]$ и $d \in L_1^{n \times n}[0, \omega]$. Предполагается, что правая часть известна и имеет вид

$$G(\lambda) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda t} g(t) dt, \quad \text{где } g \in L_1^{n \times n}[-\omega, \omega]. \quad (3.3)$$

Задача состоит в том, чтобы найти $n \times n$ -матричные целые функции X и Y вида

$$X(\lambda) = \int_0^{\omega} e^{i\lambda t} x(t) dt, \quad Y(\lambda) = \int_{-\omega}^0 e^{i\lambda t} y(t) dt, \quad (3.4)$$

где $x \in L_1^{n \times n}[0, \omega]$ и $y \in L_1^{n \times n}[-\omega, 0]$, удовлетворяющие уравнению (3.1). Теорема 1.1 из [12] гласит:

Теорема 3.1. Для существования функций X, Y вида (3.4), удовлетворяющих уравнению (3.1), необходимо и достаточно, чтобы для каждого общего нуля λ_0 определителей $\det \mathcal{B}(\lambda)$ и $\det \mathcal{D}(\lambda)$ было выполнено следующее условие:

если φ — корневая функция порядка p для $\mathcal{B}(\lambda)$ в точке λ_0 , а ψ — корневая функция порядка q для $\mathcal{D}(\lambda)^\top$ в точке λ_0 , то функция

$$\psi(\lambda)^\top G(\lambda) \varphi(\lambda) \quad (3.5)$$

имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже $\min\{q, p\}$.

Мы вернемся к этой теореме во второй части доказательства.

Часть 1. Пусть выполнено условие (а). Итак, существуют функции U и V вида (1.9), удовлетворяющие уравнению (1.8). Как мы видели во втором абзаце части 2 доказательства, приведенного в предыдущем параграфе, отсюда следует, что определитель $\det \Phi(\lambda)$ не имеет нулей на вещественной оси.

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}$ — жорданова цепочка для Φ в точке λ_0 , а $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{q-1}$ — жорданова цепочка для Φ в точке $\bar{\lambda}_0$. Рассмотрим $\mathbb{C}^n$ -значные функции

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^{p-1} (\lambda - \lambda_0)^i \varphi_i, \quad \psi(\lambda) = \sum_{j=0}^{q-1} (\lambda - \bar{\lambda}_0)^j \psi_j.$$

Так как $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}$ — жорданова цепочка для Φ в точке λ_0 , то $\Phi(\lambda)\varphi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже p . Аналогично, $\Phi(\lambda)\psi(\lambda)$ имеет в точке $\bar{\lambda}_0$ нуль порядка не ниже q . Из последнего утверждения следует, что $\psi(\bar{\lambda})^* \Phi(\bar{\lambda})^*$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже q . Воспользуемся теперь тем, что U и V удовлетворяют уравнению (1.8). Умножая его слева на $\psi(\bar{\lambda})^*$ и справа на $\varphi(\lambda)$, преобразуем правую часть к виду $\psi(\bar{\lambda})^* \varphi(\lambda)$. Но после этих умножений левая часть имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже $\min\{q, p\}$. Поэтому в точке λ_0 функция $\psi(\bar{\lambda})^* \varphi(\lambda)$ обязана иметь нуль порядка не ниже $\min\{q, p\}$. Последнее утверждение эквивалентно соотношениям (1.7). Таким образом, условие (b) выполнено.

Часть 2. Здесь мы докажем обратную импликацию. Итак, предположим, что выполнено условие (b).

Необходимо доказать существование функций U и V вида (1.9), удовлетворяющих уравнению (1.8). Для этого воспользуемся теоремой 3.1. В качестве первого шага перепишем уравнение (1.8) в таком виде, чтобы эту теорему можно было применить. Положим

$$x(t) = u(\omega - t), \quad y(t) = v(\omega - t), \quad \beta(t) = \varphi(-t), \quad \delta(t) = \varphi(t)^*.$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$ и, как и в предыдущем параграфе, мы используем соглашение, в соответствии с которым функция на конечном отрезке рассматривается как функция на всей прямой, доопределенная вне этого отрезка нулем. Заметим, что носители функций x и δ содержатся в отрезке $[0, \omega]$, а носители функций y и β — в отрезке $[-\omega, 0]$. Теперь определим функции

$$X(\lambda) = \int_0^\omega e^{i\lambda t} x(t) dt, \quad Y(\lambda) = \int_{-\omega}^0 e^{i\lambda t} y(t) dt, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{D}(\lambda) = I_n + \int_0^\omega e^{i\lambda t} \delta(t) dt, \quad \mathcal{B}(\lambda) = I_n + \int_{-\omega}^0 e^{i\lambda t} \beta(t) dt. \quad (3.7)$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= I_n + e^{i\lambda\omega} X(-\lambda), & V(\lambda) &= e^{i\lambda\omega} Y(-\lambda), \\ \Phi(\lambda) &= \mathcal{B}(-\lambda), & \Phi(\bar{\lambda})^* &= \mathcal{D}(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Используя эти тождества и заменяя λ на $-\lambda$, можно переписать уравнение (1.8) в следующем эквивалентном виде:

$$X(\lambda)\mathcal{B}(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)Y(\lambda) = e^{i\lambda\omega} I_n - e^{i\lambda\omega} \mathcal{B}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.8)$$

Таким образом, достаточно показать, что у уравнения (3.8) есть пара решений X , Y вида (3.6). Для этого воспользуемся теоремой 3.1. Нам нужно лишь показать, что для этого уравнения выполнено достаточное условие теоремы 3.1.

Итак, пусть λ_0 — общий нуль определителей $\det \mathcal{B}(\lambda)$ и $\det \mathcal{D}(\lambda)$, φ — корневая функция порядка p для $\mathcal{B}(\lambda)$ в точке λ_0 , а ψ — корневая функция порядка q для $\mathcal{D}(\lambda)^\top$ в той же точке. Положим

$$G(\lambda) = e^{i\lambda\omega} I_n - e^{i\lambda\omega} \mathcal{B}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Для завершения доказательства остается показать, что если выполнено условие (b), то функция $\psi(\lambda)^\top G(\lambda)\varphi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже $\min\{q, p\}$. Поскольку у $\mathcal{B}(\lambda)\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 имеется нуль порядка p , то же самое верно и для $\psi(\lambda)^\top e^{i\lambda\omega} \mathcal{B}(\lambda)\varphi(\lambda)$. Итак, нужно проверить, что $\psi(\lambda)^\top e^{i\lambda\omega} \varphi(\lambda)$ имеет нуль порядка не ниже $\min\{q, p\}$ в точке λ_0 . Множитель $e^{i\lambda\omega}$ не играет роли, так что мы должны показать, что

$$\psi(\lambda)^\top \varphi(\lambda) \text{ имеет нуль порядка не ниже } \min\{q, p\} \text{ в точке } \lambda_0. \quad (3.9)$$

Условие (3.9) можно переписать в терминах тейлоровских разложений

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\lambda - \lambda_0)^j, \quad \psi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\lambda - \lambda_0)^j$$

функций φ и ψ в окрестности точки λ_0 в виде

$$\sum_{j=0}^k \psi_j^\top \varphi_{k-j} = 0, \quad k = 0, \dots, \min\{q, p\} - 1. \quad (3.10)$$

Теперь напомним, что $\mathcal{B}(\lambda) = \Phi(-\lambda)$ и $\mathcal{D}(\lambda) = \Phi(-\bar{\lambda})^*$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку φ — корневая функция порядка p для $\mathcal{B}(\lambda)$ в точке λ_0 , то векторы $\varphi_0, (-1)\varphi_1, \dots, (-1)^{p-1}\varphi_{p-1}$ образуют жорданову цепочку для Φ в точке $-\lambda_0$. Аналогично, поскольку ψ — корневая функция порядка q для $\mathcal{D}(\lambda)^\top$ в точке λ_0 , мы делаем вывод, что векторы $\bar{\psi}_0, (-1)\bar{\psi}_1, \dots, (-1)^{q-1}\bar{\psi}_{q-1}$ образуют жорданову цепочку для Φ в точке $-\bar{\lambda}_0$. В соответствии с условием (b) отсюда следует, что

$$\sum_{j=0}^k \langle (-1)^{k-j} \varphi_{k-j}, (-1)^j \bar{\psi}_j \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, \min\{q, p\} - 1.$$

Теперь заметим, что

$$\psi_j^\top \varphi_{k-j} = (-1)^k (-1)^j (\bar{\psi}_j)^* (-1)^{k-j} \varphi_{k-j} = (-1)^k \langle (-1)^{k-j} \varphi_{k-j}, (-1)^j \bar{\psi}_j \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

при $j = 0, \dots, k \leq \min\{q, p\} - 1$. Значит, при $k = 0, \dots, \min\{q, p\} - 1$ мы получаем

$$\sum_{j=0}^k \psi_j^\top \varphi_{k-j} = (-1)^k \sum_{j=0}^k \langle (-1)^{k-j} \varphi_{k-j}, (-1)^j \bar{\psi}_j \rangle = 0.$$

Итак, условие (3.10) установлено, и для завершения доказательства условия (а) остается применить теорему 3.1. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Atzmon, *n-orthogonal operator polynomials*, in: Orthogonal Matrix-Valued Polynomials and Applications (Tel Aviv, 1987–88), vol. 34 (ed. I. Gohberg), Birkhäuser, Basel, 1988, 47–63.
- [2] D. Alpay, I. Gohberg, *On orthogonal matrix polynomials*, in: Orthogonal Matrix-Valued Polynomials and Applications (Tel Aviv, 1987–88), vol. 34 (ed. I. Gohberg), Birkhäuser, Basel, 1988, 25–46.
- [3] S. A. Denisov, *To the spectral theory of Krein systems*, Integral Equations Operator Theory, **42**:2 (2002), 166–173.
- [4] H. Dym, *On reproducing kernels and the continuous covariance extension problem*, in: Analysis and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 122 (ed. C. Sadosky), Marcel Dekker, New York, 1990, 427–482.
- [5] H. Dym, *On the zeros of some continuous analogues of matrix polynomials and a related extension problem with negative squares*, Comm. Pure Appl. Math., **47**:2 (1994), 207–256.
- [6] R. L. Ellis, I. Gohberg, *Orthogonal Systems and Convolution Operators*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 140, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [7] R. L. Ellis, I. Gohberg, D. C. Lay, *Distribution of zeros of matrix-valued continuous analogues of orthogonal polynomials*, in: Continuous and Discrete Fourier Transforms, Extension Problems and Wiener–Hopf Equations, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 58 (ed. I. Gohberg), Birkhäuser, Basel, 1992, 26–70.
- [8] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. II*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 63, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [9] I. Gohberg, I. Haimovici, M. A. Kaashoek, L. Lerer, *The Bezout integral operator: main property and underlying abstract scheme*, in: The State Space Method. Generalizations and Applications, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 161, Birkhäuser, Basel, 2005, 225–270.
- [10] И. Ц. Гохберг, Г. Хайниг, *О матричных интегральных операторах на конечном интервале с ядрами, зависящими от разности аргументов*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **20**:1 (1975), 55–73.
- [11] I. Gohberg, M. A. Kaashoek, L. Lerer, *The continuous analogue of the resultant and related convolution operators*, in: The Extended Field of Operator Theory, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 171 (ed. M. A. Dritschel), Birkhäuser, Basel, 2006, 107–127.
- [12] I. Gohberg, M. A. Kaashoek, L. Lerer, *On a class of entire matrix function equations*, volume dedicated to P. Fuhrmann, Linear Algebra Appl., 2007 (to appear).
- [13] I. Gohberg, M. A. Kaashoek, F. van Schagen, *Partially Specified Matrices and operators: Classification, Completion, Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 79, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [14] I. Gohberg, M. A. Kaashoek, F. van Schagen, *On inversion of convolution integral operators on a finite interval*, in: Operator Theoretical Methods and Applications to Mathematical Physics. The Erhard Meister Memorial Volume, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 147, Birkhäuser, Basel, 2004, 277–285.

- [15] I. Gohberg, L. Lerer, *Matrix generalizations of M. G. Krein theorems on matrix polynomials*, in: Orthogonal Matrix-Valued Polynomials and Applications, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 34 (ed. I. Gohberg), Birkhäuser, Basel, 1988, 137–202.
- [16] by T. Kailath *A view of three decades of linear filtering theory*, IEEE Trans. Information Theory, **IT-20** (1974), 145–181.
- [17] T. Kailath, A. Viera, M. Morf, *Inverses of Toeplitz operators, innovations and orthogonal polynomials*, SIAM Review, **20** (1978), 106–116.
- [18] М. Г. Крейн, *Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности*, Докл. АН СССР, **105**:4 (1955), 637–640.
- [19] М. Г. Крейн, *К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем*, Докл. АН СССР, **111** (1956), 1167–1170.
- [20] М. Г. Крейн, *О расположении корней многочленов, ортогональных на единичной окружности по знакопеременному весу*, Теория функций, функц. анализ и приложений., **2** (1966), 131–137.
- [21] М. Г. Крейн, Г. Лангер, *Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ними проблемы продолжения*, Докл. АН СССР, **258** (1981), 537–541.
- [22] M. G. Krein, H. Langer, *On some continuation problems which are closely related to the theory of operators in spaces Π_κ . IV: Continuous analogues of orthogonal polynomials on the unit circle with respect to an indefinite weight and related continuation problems for some classes of functions*, J. Operator Theory, **13**:2 (1985), 299–417.
- [23] М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян, *Матрично-континуальные аналоги задач Шура и Каратеодори–Тёплица*, Изв. АН Арм. ССР, **21**:2 (1986), 107–141.
- [24] A. Lindquist, *On Fredholm integral equations, Toeplitz equations and Kalman–Bucy filtering*, Appl. Math. Optim., **1** (1975), 355–373.
- [25] L. A. Sakhnovich, *On Krein’s differential system and its generalization*, Integral Equations Operator Theory, **55**:4 (2006), 561–572.

School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University
Afdeling Wiskunde, Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit, Amsterdam
Department of Mathematics,
Technion – Israel Institute of Technology, Haifa

Поступило в редакцию
1 ноября 2006 г.