Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Саймон, Мероморфные функции Йоста и асимптотические разложения для параметров Якоби, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 2, 78–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2862>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:13:54

УДК 517.98

Мероморфные функции Йоста и асимптотические разложения для параметров Якоби*

© 2007. Б. САЙМОН

Посвящается памяти М. Г. Крейна

§1. Введение

В данной работе мы рассматриваем полубесконечные матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots \\ a_1 & b_2 & a_2 & \dots \\ 0 & a_2 & b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

с экспоненциально убывающими параметрами Якоби (последнее означает, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|b_n| + |a_n - 1|)^{1/n} < 1$). Как обсуждалось в первых двух статьях [2], [3] этой серии (и было хорошо известно ранее), такой матрице J можно сопоставить функцию Йоста u , определенную и аналитическую в окрестности замыкания $\overline{\mathbb{D}}$ круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Как обычно, J описывает рекуррентные соотношения для ортогональных многочленов на вещественной прямой (ОМВП): существует такая вероятностная мера γ на $\mathbb{R}$, что ортогональные многочлены $p_n(x)$ (см. [14], [10], [11]), построенные по этой мере, удовлетворяют уравнениям

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_{n+1}p_n(x) + a_np_{n-1}(x). \quad (1.2)$$

Мера γ является спектральной мерой матрицы J , ассоциированной с вектором $(1\,0\,0\,\dots)^T$, а a_n и b_n могут быть выражены через моменты этой меры при помощи процедуры Грама–Шмидта.

Функция Йоста u определяется мерой γ в силу следующих трех фактов:

- (i) $u(z) = 0$, $z \in \mathbb{D}$, тогда и только тогда, когда $z + z^{-1}$ — собственное число матрицы J ;
- (ii) носитель меры $d\gamma_s$ (сингулярной части меры $d\gamma$) — конечное множество собственных чисел, лежащих в $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$, и

$$d\gamma \upharpoonright [-2, 2] = f(x) dx, \quad (1.3)$$

где

$$f(2 \cos \theta) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{|\sin \theta|}{|u(e^{i\theta})|^2} \right] \quad (1.4)$$

для всех $\theta \in [0, 2\pi)$;

- (iii) $u(0) > 0$.

*При частичной поддержке гранта NSF DMS-0140592 и гранта No. 2002068 Совместного американо-израильского научного фонда (BSF), Иерусалим, Израиль.

Эти факты позволяют определить функцию u (исходя из меры γ) при помощи стандартной теории «хороших» аналитических функций в $\mathbb{D}$. Напротив, функция u во многих случаях не определяет меру γ . В силу соотношений (1.3), (1.4) она определяет абсолютно непрерывную составляющую этой меры и положение точечных нагрузок, но не веса. Мы предпочитаем нормализовать веса при помощи функции

$$M(z) = - \int \frac{d\gamma(x)}{x - (z + z^{-1})}, \quad (1.5)$$

рассматривая ее вычеты в тех точках, где $u(z) = 0$. Исходно функция M определена равенством (1.5) только для $z \in \mathbb{D}$. Это обычная m -функция, перенесенная в $\mathbb{D}$ при помощи стандартного отображения.

Так или иначе, функция u и веса составляют спектральные данные, и наша задача — установить эквивалентность между этими спектральными данными, с одной стороны, и коэффициентами в рекуррентных соотношениях — с другой.

Для того чтобы сформулировать основную теорему, нам необходимо

Определение. Будем говорить, что последовательность $(x_0, \dots, x_n, \dots)$ комплексных чисел *обладает асимптотическим разложением вплоть до $R > 1$* , если существуют такие числа $\mu_1, \dots, \mu_{K(R)} \in \{z : 1 < |z| < R\}$ и многочлены $p_1, \dots, p_{K(R)}$, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| x_n - \sum_{j=1}^{K(R)} p_j(n) \mu_j^{-n} \right|^{1/n} \leq R^{-1}. \quad (1.6)$$

Будем говорить, что $(x_0, \dots)$ *обладает полным асимптотическим разложением*, если такие числа и многочлены существуют для каждого $R > 1$.

Легко видеть, что числа x_n однозначно определяют p_j и μ_j и что справедлива

Теорема 1.1. *Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ обладает асимптотическим разложением вплоть до R в том и только том случае, когда функция*

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \quad (1.7)$$

мероморфна в $\{z : |z| < R\}$, имеет в этой области лишь конечное число полюсов и не имеет особенностей в окрестности круга $\overline{\mathbb{D}}$. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ обладает полным асимптотическим разложением в том и только том случае, когда функция f мероморфна в $\mathbb{C}$.

Действительно, полюсами функции f являются μ_j , а их порядками — увеличенные на 1 степени многочленов p_j .

Мы говорим, что параметры Якоби *обладают асимптотическим разложением вплоть до R* , если последовательность

$$(1, -b_1, 1 - a_1^2, -b_2, 1 - a_2^2, \dots) \quad (1.8)$$

обладает асимптотическим разложением вплоть до R . Таким образом, соответствующая функция f — это

$$B(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} [b_{n+1} z^{2n+1} + (a_{n+1}^2 - 1) z^{2n+2}]. \quad (1.9)$$

Эта функция естественным образом появится ниже, а сейчас мы отметим следующую интерпретацию: если J_0 — матрица Якоби с $a_n \equiv 1$, $b_n \equiv 0$, а $\delta J = J - J_0$, то (см. лемму 6.2 в [2])

$$\mathrm{Tr}(\delta J(J_0 - (z + z^{-1}))^{-1}) = -(z^{-1} - z)^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(1 - z^{2n}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)(z - z^{2n+1}) \right\}. \quad (1.10)$$

Кроме того (см. теорему 2.16 в [9]),

$$u(z) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} a_j \right)^{-1} \det(1 + \delta J(J_0 - (z + z^{-1}))^{-1}). \quad (1.11)$$

Принимая во внимание, что $a_n^2 - 1 = 2(a_n - 1) + O((a_n - 1)^2)$ и $\det(1 + A) = 1 + \mathrm{Tr}(A) + O(\|A\|_1^2)$, мы видим, что если δJ — ядерный оператор, то

$$-(z^{-1} - z) \left(\prod_{j=1}^{\infty} a_j \right) u(z) = c(z) + zB(z) + O(\|\delta J\|_1^2) \quad (1.12)$$

для некоторой аффинной функции $c(z)$. То есть $B(z)$ является некоторой (борновской) аппроксимацией первого порядка функции u .

В каком-то смысле основным результатом данной работы является

Теорема 1.2. *Параметры Якоби обладают полным асимптотическим разложением в том и только том случае, когда u — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Другими словами, $B(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда мероморфной является $u(z)$.*

Конечно, хотелось бы установить связь между полюсами функций u и B . Отчасти для этого, отчасти поскольку мы все равно будем использовать их в доказательствах (§3), имеет смысл привести наши недавние результаты из [12] об аналогичной задаче для ортогональных многочленов на единичной окружности (ОМЕО). Хорошо известно (подробнее см. в [10] и [11]), что с каждой нетривиальной вероятностной мерой μ на $\partial\mathbb{D}$ связана последовательность коэффициентов Верблунского, определяемых формулами

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{\alpha}_n\Phi_n^*(z), \quad (1.13)$$

где через Φ_n обозначены нормированные ортогональные (относительно μ) многочлены и

$$\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(1/\bar{z})}. \quad (1.14)$$

Вместо функции B в [12] используется функция

$$S(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j-1} z^j, \quad (1.15)$$

а вместо u — функция Сегё

$$D(z) = \exp \left(\int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log(w(\theta)) \frac{d\theta}{4\pi} \right), \quad (1.16)$$

где $d\mu = w(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s$. Положим

$$r(z) = \frac{D^{-1}(z)}{D^{-1}(1/\bar{z})}. \quad (1.17)$$

Основными в [12] являются следующие теоремы 1.3 и 1.4.

Теорема 1.3 [4]. *Если $\limsup |\alpha_n|^{1/n} = R^{-1} < 1$, то $r(z) - S(z)$ аналитична в $\{z : 1 - \delta < |z| < R^3\}$ для некоторого $\delta > 0$.*

Замечания. 1. Этот результат принадлежит Дейфту и Остенссону [4], однако в [12] содержится его новое доказательство. Ранее в [10] был доказан более слабый результат, с R^2 вместо R^3 .

2. Суть дела состоит в том, что обе функции r и S имеют особенности на окружности $|z| = R$. Теорема утверждает, что они сокращаются, равно как и все особенности в кольце $\{z : R < |z| < R^3\}$.

3. В [12] приведены явные примеры, в которых $r(z) - S(z)$ имеет особенности на $\{z : |z| = R^3\}$, и показано, что так же обстоит дело и в общем случае. Таким образом, R^3 — наилучшая возможная граница.

Для данного дискретного (с возможной предельной точкой лишь в ∞) множества $\Omega \subset \{z : |z| > 1\}$ мы полагаем

$$\mathbb{G}^{2j-1}(\Omega) = \{\mu_1 \dots \mu_j \bar{\mu}_{j+1} \dots \bar{\mu}_{2j-1} : \mu_k \in \Omega\}, \quad (1.18)$$

$$\mathbb{G}(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{G}^{2j-1}(\Omega). \quad (1.19)$$

Теорема 1.4 [12]. *Функция S является целой в том и только том случае, когда целой является D^{-1} . Если T — множество полюсов функции $S(z)$, а P — множество полюсов функции $D^{-1}(z)$, то*

$$T \subset \mathbb{G}(P), \quad P \subset \mathbb{G}(T). \quad (1.20)$$

В §2 мы доказываем следующий сходный с теоремой 1.3 результат:

Теорема 1.5. *Предположим, что*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n^2 - 1| + |b_n|)^{1/2n} = R^{-1} < 1. \quad (1.21)$$

Тогда функция

$$(1 - z^2)u(z) + z^2 \overline{u(1/\bar{z})} B(z) \quad (1.22)$$

аналитична в $\{z : R^{-1} < |z| < R^2\}$.

Замечания. 1. В работе [3] содержатся необходимые и достаточные условия на u и веса, при которых выполняется соотношение (1.21). Если у J нет собственных значений вне $[-2, 2]$, то необходимым и достаточным условием является аналитичность функции u в $\{z : |z| < R\}$.

2. Функция u вещественна на $\mathbb{R}$; поэтому $\overline{u(\bar{z})} = u(z)$ и, следовательно, функцию (1.22) можно записать как $(1 - z^2)u(z) + u(1/z)B(z)$; мы используем выражение (1.22), чтобы подчеркнуть аналогию со случаем ОМЕО.

3. Конечно, у B есть особенности на окружности $\{z : |z| = R\}$. Таким образом, теорема 1.5 утверждает, что они сокращаются либо с нулями функции $u(1/\bar{z})$, либо с особенностями функции u . Так как $\overline{u(1/\bar{z})}$ может иметь нули в

$|z| > 1$ (в отличие от $\overline{D(\bar{z})^{-1}}$), ситуация здесь несколько иная, чем в случае ОМЕО. Мы обсуждаем это в §2.

4. Как показано в §3, функция (1.22) часто имеет особенности на окружности $\{z : |z| = R^2\}$, так что R^2 нельзя увеличить до R^3 , как в случае ОМЕО. Причины этого различия станут ясны в §3.

Для того чтобы сформулировать аналог теоремы 1.4, нам нужно большее множество, чем $\mathbb{G}$. В нашем случае u и B вещественны на $\mathbb{R}$, поэтому их полюсы симметричны относительно $\mathbb{R}$. Имея это в виду, предположим, что $\Omega \subset \{z : |z| > 1\}$ имеет предельную точку лишь в бесконечности и

$$\bar{\Omega} = \Omega. \quad (1.23)$$

Для каждого m мы полагаем

$$\mathbb{G}^{(m)}(\Omega) = \{\mu_1 \dots \mu_m : \mu_k \in \Omega\}. \quad (1.24)$$

Это определение совпадает с данным ранее, если выполняется условие (1.23) и $m = 2j - 1$. Пусть

$$\tilde{\mathbb{G}}(\Omega) = \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{G}^{(m)}(\Omega) \right] \cup \left[- \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{G}^{(m)}(\Omega) \right]. \quad (1.25)$$

Наш основной результат уточняет теорему 1.2:

Теорема 1.6. *Предположим, что вне отрезка $[-2, 2]$ нет точек спектра матрицы J и что u — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, не обращающаяся в нуль в точках $z = \pm 1$. Пусть P — множество полюсов функции u , а T — множество полюсов функции B . Тогда*

$$P \subset \tilde{\mathbb{G}}(T), \quad T \subset \tilde{\mathbb{G}}(P). \quad (1.26)$$

Для того чтобы сформулировать результат в случае, когда имеются связанные состояния, мы напомним и расширим следующее понятие из [3]:

Определение. Пусть u — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, а точка $z_0 \in \mathbb{D}$ такова, что $u(z_0) = 0$ (т.е. z_0 вещественна и $z_0 + z_0^{-1} \in \sigma(J)$). Точка z_0 называется *неканоническим нулем* для J , если $1/z_0$ не является полюсом функции u и

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)M(z) \neq -(z_0 - z_0^{-1}) \left[u'(z_0)u\left(\frac{1}{z_0}\right) \right]^{-1}. \quad (1.27)$$

Таким образом, если u регулярна в точке $1/z_0$ и выполняется условие (1.27), в котором « $\neq$ » заменено на « $=$ », то z_0 не является неканоническим нулем (и называется *каноническим*). В случае когда имеются связанные состояния или $u(\pm 1) = 0$, мы доказываем следующее:

Теорема 1.7. *Предположим, что u мероморфна в $\mathbb{C}$. Пусть T — множество полюсов функции B , P_1 — множество полюсов функции u , а $P_2 = \{z^{-1} : z \text{ — неканонический нуль для } J\}$. Положим $P = P_1 \cup P_2$. Тогда имеют место включения (1.26).*

Как и в [12], можно легко доказать утверждения, связывающие мероморфность функции u в $\{z : |z| < R^{2\ell-1}\}$ с мероморфностью функции B в том же круге.

В §2 мы используем уравнения Джеронимо–Кейза для доказательства теоремы 1.5. В §3 мы пользуемся вторым отображением Сегё из ОМВП в ОМЕО

для доказательства теоремы 1.6. В §4 мы продолжаем анализ из [3] для того, чтобы вывести теорему 1.7 из теоремы 1.6.

Это исследование было завершено во время моего пребывания в Еврейском университете Иерусалима в качестве приглашенного профессора Фонда леди Дэвис. Я благодарен Х. Фаркасу и Й. Ласту за гостеприимство, оказанное мне Математическим институтом этого университета.

Я с большим удовольствием посвящаю эту статью 100-летнему юбилею со дня рождения Марка Крейна. Студентом я изучал теорему Крейна–Мильмана, но только ощутив влияние М. Г. Крейна на мою собственную работу, я оценил потрясающий размах его достижений: ядерные идеалы, самосопряженные расширения (особенно для квадратичных форм), функция спектрального сдвига и его многочисленные результаты в спектральной теории ортогональных многочленов оказали на меня глубокое воздействие.

§2. Уравнения Джеронимо–Кейза и R^{-2} -следствие

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.5 при помощи метода, использованного в [12] для доказательства теоремы 1.3. Там мы опирались на рекуррентное соотношение Ceg^{ϵ} (1.13) и сопряженное к нему соотношение, т. е.

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) - \alpha_n z \Phi_n(z), \quad (2.1)$$

в точках z и $1/\bar{z}$.

Здесь мы вместо этого используем уравнения Джеронимо–Кейза [5] в форме, предложенной в [3]. Положим

$$C_n(z) = z^n P_n\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad (2.2)$$

где $P_n(x) = (\prod_{j=1}^n a_j) p_n(x)$ — нормированный ортогональный многочлен. Уравнения

$$C_n(z) = (z^2 - b_n z) C_{n-1}(z) + G_{n-1}(z), \quad (2.3)$$

$$G_n(z) = G_{n-1}(z) + [(1 - a_n^2) z^2 - b_n z] C_{n-1}(z) \quad (2.4)$$

являются ненормализованными уравнениями Джеронимо–Кейза. Вместе с начальными данными $G_0(z) = C_0(z) = 1$ они определяют нормированные многочлены степени не выше $2n$. Многочлен C_n имеет вид (2.2), и если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n^2 - 1| + |b_n|) < \infty, \quad (2.5)$$

то для $|z| < 1$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(z) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} a_j \right) u(z) \quad (2.6)$$

(см. теорему А.3 в [3]). Мы обозначим правую часть в (2.6) через $\tilde{u}(z)$.

Соотношения (2.3), (2.4) до некоторой степени похожи на (1.13), (2.1). Отличие в том, что равенство (1.14) заменено на равенство

$$C_n(z) = z^{2n} C_n\left(\frac{1}{z}\right), \quad (2.7)$$

которое легко следует из (2.2). Мы будем писать $f = \tilde{O}(g)$, где $g \rightarrow 0$, если $|f|/|g|^{1-\varepsilon} \rightarrow 0$ для всех $\varepsilon > 0$.

Лемма 2.1. *Если выполняется неравенство (1.21), то для $z \in \mathbb{D}$*

$$(i) \quad |G_n(z) - \tilde{u}(z)| \leq \tilde{O}(R^{-2n}); \quad (2.8)$$

$$(ii) \quad \left| C_n(z) - \frac{\tilde{u}(z)}{1 - z^2} \right| \leq \tilde{O}([\max(|z|, R^{-1})]^{2n}). \quad (2.9)$$

Доказательство. (i) В силу теоремы А.3 из [3]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{1 - z^2}. \quad (2.10)$$

Используя уравнения (2.4) и учитывая, что $\sup_n |C_n(z)| < \infty$, получаем

$$\begin{aligned} |G_n(z) - \tilde{u}(z)| &\leq \sum_{m=n}^{\infty} |G_{m+1}(z) - G_m(z)| \\ &\leq \left(\sup_n |C_n(z)| \right) \sum_{m=1}^{\infty} (|1 - a_{n+m}^2| + |b_{n+m}|) = \tilde{O}(R^{-2n}), \end{aligned}$$

поскольку ряд сходится экспоненциально.

(ii) Из (2.3) следует, что

$$|C_n - G_{n-1} - z^2 C_{n-1}| \leq \sup_n |C_n(z)| |b_n|.$$

Итерируя, получаем

$$\left| C_n - \sum_{j=0}^{n-1} G_{n-j-1} z^{2j} \right| \leq |z|^{2n} + \sup_n |C_n(z)| \sum_{j=0}^{n-1} |b_{n-j}| |z^{2j}| \leq \tilde{O}(\max(|z|, R^{-1})^{2n}).$$

В силу (2.8)

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} (G_{n-j-1} - \tilde{u}) z^{2j} \right| \leq \tilde{O}(\max(|z|, R^{-1})^{2n}).$$

Так как $\sum_j z^{2j} u = (1 - z^2)^{-1} u$, мы получаем (2.9). □

Доказательство теоремы 1.5. Из (2.4) и (2.7) следует, что

$$|G_{n+1} - G_n| \leq \left[\sup_n \left| C_n \left(\frac{1}{z} \right) \right| \right] |z|^{2n+2} [|1 - a_n^2| + |b_n|] \quad (2.11)$$

для $|z| > 1$, откуда видно, что последовательность $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится равномерно для $1 < |z| < R$. В силу принципа максимума мы получаем сходимости для $|z| < R$, а значит, функция u может быть аналитически продолжена в этот

круг. В нем

$$\begin{aligned}\tilde{u}(z) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (G_{n+1}(z) - G_n(z)) \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} ((1 - a_{n+1}^2)z^2 - b_{n+1}z)C_n(z)\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$= \frac{\tilde{u}(\frac{1}{z})}{1 - \frac{1}{z^2}} (B(z) - 1) + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad (2.13)$$

где

$$f_n(z) = ((1 - a_{n+1}^2)z^2 - b_{n+1}z)z^{2n} \left(C_n\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\tilde{u}(\frac{1}{z})}{1 - \frac{1}{z^2}} \right). \quad (2.14)$$

Таким образом,

$$(1 - z^2)\tilde{u}(z) + \tilde{u}\left(\frac{1}{z}\right)z^2B(z) = \tilde{u}\left(\frac{1}{z}\right)z^2 + (1 - z^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z^2)f_n(z). \quad (2.15)$$

Каждая из функций f_n аналитична в кольце $\{z : |z| > 1\}$, так что если ряд равномерно сходится в области $\{z : 1 < |z| < R^2\}$, то левая часть в (2.15) может быть аналитически продолжена в эту область.

В силу (2.9) для $|z| > 1$

$$\left| C_n\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\tilde{u}(\frac{1}{z})}{1 - \frac{1}{z^2}} \right| \leq \tilde{O}\left(\max\left(\frac{1}{|z|}, R^{-1}\right)^{2n}\right);$$

поэтому

$$\left| z^{2n} \left[C_n\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\tilde{u}(\frac{1}{z})}{1 - \frac{1}{z^2}} \right] \right| \leq \tilde{O}(\max(1, |z|R^{-1})^{2n})$$

и, следовательно,

$$|f_n(z)| \leq \tilde{O}(R^{-2n})\tilde{O}(\max(1, |z|R^{-1})^{2n}).$$

Для $1 < |z| < R$ величина в правой части есть $\tilde{O}(R^{-2n})$, а значит, левые части суммируемы. Для $R \leq |z| < R^2$ правая часть есть $\tilde{O}(|z|R^{-2})^{2n}$ и левые части также суммируемы. $\square$

В случае когда $u(\pm R^{-1}) \neq 0$, из (1.22) вытекает, что так как B имеет особенности на окружности радиуса R , то u также должна иметь особенности на этой окружности. Однако если $u(R^{-1}) = 0$ и/или $u(-R^{-1}) = 0$, то этот нуль может компенсировать полюс функции B , и u может иметь большую область аналитичности, чем B . Как показано в [3], именно это происходит в случае неканонических весов.

§3. Второе отображение Сегё и функции Йоста без связанных состояний

В [13], [14] Сегё ввел два отображения вероятностных мер на $\partial\mathbb{D}$, инвариантных относительно комплексного сопряжения, в вероятностные меры на $[-2, 2]$; мы обозначаем их через Sz_1 и Sz_2 . Оба эти отображения инъективны, но только Sz_1 сюръективно. Поэтому именно Sz_1 чаще всего используется и изучается (см.

[11, разд. 13.1]). Однако мы увидим, что отображение Sz_2 также чрезвычайно полезно, особенно для изучения функций Йоста, аналитических в окрестности круга $\mathbb{D}$ и не имеющих нулей в $\overline{\mathbb{D}}$ (случай, когда J не имеет ни резонансов в ± 2 , ни связанных состояний).

Для абсолютно непрерывных мер эти отображения задаются следующими соотношениями:

$$d\mu = w(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad Sz_1(d\mu) = f_1(x) dx, \quad Sz_2(d\mu) = f_2(x) dx, \quad (3.1)$$

где $w(\theta) = w(-\theta)$ и (см. формулы (13.1.6) и (13.2.22) в [11])

$$f_1(x) = \pi^{-1}(4 - x^2)^{-1/2} w(\arccos(x/2)), \quad (3.2)$$

$$f_2(x) = \pi^{-1} c^2 (4 - x^2)^{1/2} w(\arccos(x/2)); \quad (3.3)$$

здесь

$$c = [2(1 - |\alpha_0|^2)(1 - \alpha_1)]^{-1/2}. \quad (3.4)$$

Принимая во внимание, что Sz_1 — биекция между симметричными мерами на $\partial\mathbb{D}$ и произвольными мерами на $[-2, 2]$, мы получаем, что

$$d\gamma \in \text{ran}(Sz_2) \iff \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{-1} d\gamma(x) < \infty. \quad (3.5)$$

Предложение 3.1. *Если $d\gamma$ обладает функцией Йоста u , аналитической в окрестности круга $\overline{\mathbb{D}}$ и не обращающейся в нуль в $\overline{\mathbb{D}}$, то $d\gamma \in \text{ran}(Sz_2)$.*

Доказательство. Так как $d(2 \cos \theta) = -2 \sin \theta d\theta$ и $(4 - 4 \cos^2 \theta) = 4 \sin^2 \theta$, в силу (1.4) правая часть в (3.5) эквивалентна соотношению

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{|u(e^{i\theta})|^2} = \int_0^\pi (\sin^2 \theta)^{-1} f(2 \cos \theta) \sin \theta d\theta = 2 \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{-1} f(x) dx < \infty,$$

которое верно, если функция $|u|$ отделена от нуля. $\square$

Для наших целей важна

Теорема 3.2. *Предположим, что $d\mu$ является нетривиальной вероятностной мерой на $\partial\mathbb{D}$, удовлетворяющей условию Сегё, с коэффициентами Верблунского $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ и функцией Сегё $D(z_0)$. Пусть мере $d\gamma = Sz_2(d\mu)$ соответствуют функция Йоста u и параметры Якоби $\{a_n, b_n\}_{n=1}^\infty$. Тогда*

$$b_{n+1} = \alpha_{2n} - \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1}(\alpha_{2n} + \alpha_{2n+2}), \quad (3.6)$$

$$a_{n+1}^2 - 1 = \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+3} - \alpha_{2n+2}^2(1 - \alpha_{2n+3})(1 + \alpha_{2n+1}) - \alpha_{2n+3}\alpha_{2n+1}, \quad (3.7)$$

$$u(z) = (1 - |\alpha_0|^2)(1 - \alpha_1)D(z)^{-1}. \quad (3.8)$$

Замечание. Формулы вида (3.6), (3.7) для Sz_1 восходят к Геронимусу [6], [7]. Для Sz_2 наиболее ранней из известных мне ссылок является [1]; см. также [8].

Доказательство. Уравнения (3.6), (3.7) совпадают с уравнениями (13.2.20), (13.2.21) в [11]. Для доказательства равенства (3.8) заметим, что в силу (1.4) и (3.3)

$$|u(e^{i\theta})|^{-2} = \pi f_2(2 \cos \theta)(\sin \theta)^{-1} = 2c^2 w = 2c^2 |D|^2.$$

Следовательно, если $z = e^{i\theta}$, то модули правой и левой частей в (3.8) равны. Поскольку обе части аналитичны, не имеют нулей в $\mathbb{D}$ и положительны в $z = 0$, равенство (3.8) выполняется при всех z . $\square$

Тождества (3.6), (3.7), прежде всего, дают второе доказательство теоремы 1.5 в случае, когда u не имеет нулей в $\overline{\mathbb{D}}$, и, что более важно, показывают, что в общем случае граница R^2 оптимальна. Докажем сначала

Предложение 3.3. *Имеет место равенство*

$$B(z) = \alpha_0 z^{-1} + \alpha_1 + 1 + (S(z) - 1)(1 - z^{-2}) + Q(z), \quad (3.9)$$

где Q аналитична в $\{z : |z| < R^2\}$, если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|^{1/n} = R^{-1}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Используя (1.9), (1.15) и (3.6), (3.7), мы получаем (3.9), где

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}(\alpha_{2n} + \alpha_{2n+2})z^{2n+1} + \{\alpha_{2n+2}^2(1 - \alpha_{2n+3})(1 + \alpha_{2n+1}) + \alpha_{2n+3}\alpha_{2n+1}\}z^{2n+2}. \quad (3.11)$$

В силу условия (3.10) $Q(z)$ аналитична в $\{z : |z| < R^2\}$. $\square$

Второе доказательство теоремы 1.5 в случае, когда u не имеет нулей в $\overline{\mathbb{D}}$. Как мы вскоре увидим (см. лемму 3.5), из включений (1.26) следует равенство (3.10). Используя теорему 1.3 и равенство (3.8), мы заключаем, что функция

$$(z^2 - 1)[u(z) - \overline{u(1/\bar{z})}S(z)] \quad (3.12)$$

аналитична в $\{z : R^{-1} < |z| < R^3\}$. В силу предложения 3.3 функция

$$z^2 B(z) - (z^2 - 1)S(z) \quad (3.13)$$

аналитична в $\{z : |z| < R^2\}$, так что установленная выше аналитичность функции (3.12) дает аналитичность функции (1.22) в $\{z : R^{-1} < |z| < R^2\}$. $\square$

Пример 3.4. Пусть $\alpha_{2n} \equiv 0$ (что верно в том и только том случае, когда $b_n \equiv 0$) и $\alpha_{2n+1} = R^{-(2n+1)}$. Тогда в силу (3.10) функция

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+2} R^{-4n-4} = z^2 R^{-4} (1 - z^2 R^{-4})^{-1}$$

имеет полюсы в $z = \pm R^2$. Это показывает, что функция (1.22) может не быть аналитичной ни в каком более широком кольце, чем $\{z : R^{-1} < |z| < R^2\}$. При помощи аналогичного анализа получаем, что если B мероморфна в $\{z : |z| < R^{1+\varepsilon}\}$, то, вообще говоря, функция (1.22) будет иметь особенности на окружности радиуса R^2 . Замена R^3 на R^2 , произошедшая при переходе от теоремы 1.3 к теореме 1.5, обусловлена квадратичными слагаемыми в (3.6), (3.7). $\square$

Далее нам будет нужна (уже использованная выше)

Лемма 3.5. *Пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ связаны посредством формул (3.6), (3.7) и*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|^{1/n} \equiv R_1^{-1} < 1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n^2 - 1| + |b_n|)^{1/2n} \equiv R_2^{-1} < 1. \quad (3.14)$$

Тогда $R_1 = R_2$. Кроме того, $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ обладает полным асимптотическим разложением тогда и только тогда, когда $\{a_n, b_n\}_{n=1}^\infty$ обладают таким разложением, и если T — множество степеней, входящих в разложение для $\{a_n, b_n\}_{n=1}^\infty$ (т.е. T — множество полюсов функции B), а $\tilde{T}$ — аналогичное множество для $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ (т.е. T — множество полюсов функции S), то

$$T \subset \tilde{\mathbb{G}}(\tilde{T}), \quad \tilde{T} \subset \tilde{\mathbb{G}}(T). \quad (3.15)$$

Замечание. Решения уравнений для Sz_1 , аналогичных уравнениям (3.6), (3.7), таковы, что $\{a_n, b_n\}_{n=1}^\infty$ быстро убывают, в то время как $\alpha_{2n+1} \sim n^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$. (В самом деле, для Sz_1 , но не для Sz_2 это происходит с J_0 ; см. пример 13.1.3 в [11].) Фактически из результатов этой работы и работы [12] вытекает, что $R_1^{-1} < 1$ в том и только том случае, когда $R_2^{-1} < 1$.

Доказательство. Из (3.6) следует, что если $R_1^{-1}, R_2^{-1} < 1$, то $R_2 = R_1$, поскольку неглавные слагаемые экспоненциально малы. Кроме того, если α_n обладает полным асимптотическим разложением, то b_{n+1} и $a_{n+1}^2 - 1$ по отдельности обладают асимптотическими разложениями по μ_k^{-2n} , где $\mu_k \in \bigcup_{j=1}^\infty \mathbb{G}^{(j)}(\tilde{T})$. Так как

$$c_1 \mu_k^{-2n} = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \mu_k^{-2n} + \frac{1}{2} (c_1 - c_2) (-\mu_k)^{-2n}, \quad (3.16)$$

$$c_2 \mu_k^{-2n-1} = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \mu_k^{-2n-1} + \frac{1}{2} (c_1 - c_2) (-\mu_k)^{-2n-1}, \quad (3.17)$$

мы можем объединить их в одно разложение, используя $-\mu_k$ наравне с μ_k .

Чтобы доказать обратное, отметим, что экспоненциальное убывание последовательности α_n приводит к равенствам

$$\alpha_{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{n+m+1} + O(R^{-2n})$$

и аналогичным равенствам для α_{2n+1} и $\sum_{m=0}^{\infty} (a_{n+m+1}^2 - 1)$. Подставляя в (3.6) и суммируя, мы получаем явные выражения для α_{2n} и α_{2n+1} в виде сумм произведений четырех или меньшего числа параметров b и $1 - a^2$ с точностью до $O(R^{-3n})$. Итерируя, выводим отсюда явные представления для α в виде «многочленов» от b и $1 - a^2$ степени k с точностью до $O(R^{-(k+2)n})$. Это показывает, что если a и b обладают асимптотическими разложениями с точностью до $O(R^{-(k+1)n})$, то это же верно для α_{2n} и α_{2n+1} , причем соответствующие μ (основания степеней) лежат в $\bigcup_{j=1}^\infty \mathbb{G}^{(j)}(T)$. При помощи формул, аналогичных (3.16), (3.17), мы можем объединить эти два разложения в одно, используя $-\mu$ наравне с μ . Таким образом, $\tilde{T} \subset \tilde{\mathbb{G}}(T)$. $\square$

Доказательство теорем 1.6 и 1.2 в случае, когда u не имеет нулей в $\mathbb{D}$. Если u не имеет нулей в $\mathbb{D}$, то $\gamma \in \text{ran}(Sz_2)$ и мы можем определить S , α_n и т.д. В силу (3.8), если u мероморфна во всей комплексной плоскости, то такова же и D^{-1} . Значит, по теореме 1.4 функция S мероморфна в $\mathbb{C}$, и если $\tilde{T}$ — множество ее полюсов, то

$$\tilde{T} \subset \mathbb{G}(P).$$

В силу леммы 3.5 функция B мероморфна и

$$T \subset \tilde{\mathbb{G}}(\tilde{T}) \subset \tilde{\mathbb{G}}(\mathbb{G}(P)) = \tilde{\mathbb{G}}(P).$$

Обратно, если B мероморфна во всей комплексной плоскости, то по лемме 3.5 такова же и S , и если $\tilde{T}$ — множество полюсов функции S , то

$$\tilde{T} \subset \tilde{\mathbb{G}}(T).$$

По теореме 1.4 функция D^{-1} , а значит, и u мероморфны в $\mathbb{C}$ и

$$P \subset \mathbb{G}(\tilde{T}) \subset \mathbb{G}(\tilde{\mathbb{G}}(T)) = \tilde{\mathbb{G}}(T).$$

§4. Сдвиг коэффициентов и функции Йоста со связанными состояниями

Как и в [3], мы переходим от случая, когда отсутствуют связанные состояния, к общему случаю (т. е. от теоремы 1.6 к теореме 1.7) при помощи сдвига коэффициентов («процедуры раздевания»), т. е. при помощи перехода от J к матрице Якоби $J^{(m)}$ с параметрами $\{a_{n+m}, b_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$. Теорема 3.1 из [3] утверждает, что если функция Йоста, соответствующая матрице J , аналитична в окрестности круга $\mathbb{D}$, то найдется такое k , что $\sigma(J^{(k)}) = [-2, 2]$. Используя небольшое дополнительное рассуждение, мы также можем считать, что для новой матрицы Якоби $u^{(k)}(\pm 1) \neq 0$ (ибо если $\sigma(J^{(k-1)}) = [-2, 2]$ и $u^{(k-1)}$ имеет корень в ± 1 , то $M^{(k-1)}(z)$ имеет там же полюс, а значит, $u^{(k)} = u^{(k-1)}M^{(k-1)}$ не обращается в нуль). Таким образом, мы утверждаем, что все, что нам требуется (и что мы докажем ниже), — это следующий факт:

Теорема 4.1. *Если множества $P = P_1 \cup P_2$ такие, как в теореме 1.7, то*

$$P(J) = P(J^{(1)}), \quad (4.1)$$

где мы указываем зависимость от J явно.

Вывод теорем 1.1 и 1.7 из теорем 4.1 и 1.6. Теорема 1.7 влечет за собой теорему 1.1. Используя равенство (4.1) и индукцию, видим, что $P(J) = P(J^{(k)})$, где k выбрано таким образом (см. выше), чтобы была применима теорема 1.6. Теперь включения (1.26) для J следуют из включений (1.26) для $J^{(k)}$. $\square$

Как и в [3], мы будем использовать M -функцию, ее связь с u и рекуррентные соотношения. Положим (в соответствии с (1.5))

$$M^{(k)}(z) = \langle \delta_1, (z + z^{-1} - J^{(k)})^{-1} \delta_1 \rangle \quad (4.2)$$

для $z \in \mathbb{D} \setminus \{w : w + w^{-1} \in \sigma(J^{(k)})\}$. Функция $M^{(k)}$ имеет полюсы в таких точках w из $\mathbb{D}$, что $w + w^{-1} \in \sigma(J^{(k)})$, а $u^{(k)}$ имеет в этих же точках нули. Справедливы (исходно для $z \in \mathbb{D}$) рекуррентные соотношения (см. (2.4), (2.5) в [3])

$$u^{(k+1)}(z) = a_{k+1}z^{-1}u^{(k)}(z)M^{(k)}(z), \quad (4.3)$$

$$M^{(k)}(z)^{-1} = z + z^{-1} - b_{k+1} - a_{k+1}^2 M^{(k+1)}(z). \quad (4.4)$$

Кроме того, если $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, то из (1.4) и соотношения $\pi f(2 \cos \theta) = \operatorname{Im} M(e^{i\theta})$ вытекает, что

$$[M(z) - \overline{M}(1/\bar{z})] \overline{u(1/\bar{z})} u(z) = z - z^{-1}. \quad (4.5)$$

Тождество (4.5) может быть использовано для мероморфного продолжения функции M из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{C}$, если u мероморфна во всей комплексной плоскости.

После того как мы построили это продолжение, соотношения (4.3), (4.4) распространяются на все $z \in \mathbb{C}$ (как равенства мероморфных функций, с учетом возможных сокращений полюсов и нулей). Эти соотношения также гарантируют мероморфность функции $u^{(1)}$ в $\mathbb{C}$, если u мероморфна в $\mathbb{C}$.

Начнем с эквивалентного определения множества P_2 :

Предложение 4.2. *Точка $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ лежит в P_2 тогда и только тогда, когда*

- (i) z_0 не является полюсом функции u ;
- (ii) обе точки z_0 и z_0^{-1} являются полюсами функции M .

Замечание. Все полюсы функции M , лежащие в $\mathbb{D}$, вещественны, а значит, из (ii) вытекает вещественность z_0 .

Доказательство. По определению $z_0 \in P_2$, если $u(z_0^{-1}) = 0$, z_0 не является полюсом функции u и выполняется (1.27). Так как $z_0^{-1} \in \mathbb{D}$, то

$$u(z_0^{-1}) = 0 \iff z_0 + z_0^{-1} \in \sigma(J) \iff z_0^{-1} \text{ является полюсом функции } M(z).$$

Как показано в [3], в силу (4.5), если $u(z_0) = 0$, то z_0 является полюсом функции M порядка два или более и, конечно, соотношение (1.27) выполняется в z_0^{-1} , поскольку его левая часть бесконечна. Если $u(z_0) \neq 0$, то (1.27) в точности (с учетом равенства (4.5)) означает, что $M(z)$ имеет полюс в z_0 . $\square$

Мы уже отмечали случай, когда z_0 является полюсом функции u , в то время как z_0^{-1} является ее нулем. Мы должны исследовать его отдельно:

Предложение 4.3. *Если $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ является полюсом функции u , а z_0^{-1} — ее нулем, то z_0 является полюсом функции $u^{(1)}$.*

Доказательство. Рассмотрим равенство (4.5) около точки $z = z_0$. Так как все нули функции u в $\mathbb{D}$ простые, то $u(z)\overline{u(1/\bar{z})}$ имеет в z_0 либо полюс, либо конечный ненулевой предел. Тогда (4.5) гарантирует регулярность функции $M(z) - \overline{M(1/\bar{z})}$ в z_0 (возможно, эта функция даже имеет в z_0 нуль). Так как $\overline{M(1/\bar{z})}$ имеет полюс в z_0 , $M(z)$ также должна иметь в z_0 полюс. Следовательно, $u^{(1)} = a_1 z^{-1} u M$ имеет полюс (как минимум второго порядка) в z_0 . $\square$

Предложение 4.4. *Если $z_0 \in P_2(J)$, то $z_0 \in P_1(J^{(1)})$.*

Замечания. 1. Этот результат для точки z_0 внутри круга аналитичности функции u содержится в [3]. Мы приводим здесь практически то же самое доказательство.

2. Утверждение, что $z_0 \in P_2(J)$, в сущности, означает, что «резонансная собственная функция» обращается в нуль, и, таким образом, мы утверждаем, что такие собственные функции не могут иметь двух последовательных нулей и удовлетворять при этом разностному уравнению второго порядка.

Доказательство. Предположим сначала, что $u(z_0) \neq 0$. Согласно предложению 4.2, M имеет полюс в z_0 ; поэтому $u^{(1)} = a_1 z^{-1} u M$ также имеет полюс в z_0 .

Если u имеет нуль k -го ($k \geq 1$) порядка в z_0 , то $\overline{u(1/\bar{z})} u(z)$ имеет в этой точке нуль $(k+1)$ -го порядка, а значит, в силу (4.5) $M(z) - \overline{M(1/\bar{z})}$ имеет полюс $(k+1)$ -го порядка в z_0 . Поскольку функция M имеет простые полюсы в

точках области $\mathbb{D}$ типа $1/z_0$, она обязана иметь полюс $(k+1)$ -го порядка в z_0 . Таким образом, $u^{(1)} = a_1 z^{-1} u M$ имеет полюс в z_0 . $\square$

Предложение 4.5. Если $z_0 \in P_1(J)$ и $z_0 \notin P_1(J^{(1)})$, то $z_0 \in P_2(J^{(1)})$.

Доказательство. Из (4.4) следует, что полюсы функции $M^{(1)}(z)$ являются в точности нулями функции $M(z)$. Следовательно, в силу предложения 4.2 нам нужно только доказать, что

$$\text{если } z_0 \in P_1(J) \text{ и } z_0 \notin P_1(J^{(1)}), \text{ то } M(z_0) = M(1/\bar{z}_0) = 0. \quad (4.6)$$

Так как u имеет полюс в z_0 , а $u^{(1)} = a_1 z^{-1} u M$ не имеет, то $M(z_0) = 0$. В силу предложения 4.3, если $z_0 \notin P_1(J^{(1)})$, то $u(1/\bar{z}) \neq 0$. Значит, $u(z) \overline{u(1/\bar{z})}$ имеет полюс в z_0 . Тогда из тождества (4.5) вытекает, что $M(z) - \overline{M(1/\bar{z})}|_{z=z_0} = 0$. Поскольку $M(z_0) = 0$, мы получаем $M(1/\bar{z}_0) = 0$, что и доказывает утверждение (4.6). $\square$

Нам также нужно доказать некоторые утверждения в обратную сторону, т. е. исходящие из того, что $z_0 \in P(J^{(1)})$.

Предложение 4.6. Если $z_0 \in P_2(J^{(1)})$, то $z_0 \in P_1(J)$.

Доказательство. Согласно предложению 4.2, z_0 и z_0^{-1} являются полюсами функции $M^{(1)}$, а значит, в силу (4.4) — нулями функции M . Как и в доказательстве предложения 4.4, если $u^{(1)}$ имеет в z_0 нуль k -го порядка (включая случай $k = 0$, т. е. $u^{(1)}(z_0) \neq 0$), то $M^{(1)}(z)$ имеет в этой же точке полюс $(k+1)$ -ого порядка, а значит, $M(z)$ имеет нуль $(k+1)$ -го порядка. Это согласуется с равенством $u^{(1)} = a_1 z^{-1} u M$, только если u имеет полюс в z_0 . $\square$

Предложение 4.7. Если $z_0 \in P_1(J^{(1)})$ и $z_0 \notin P_1(J)$, то $z_0 \in P_2(J)$.

Доказательство. По предположению z_0 не является полюсом функции u , и, значит, выполняется первое условие предложения 4.2. Таким образом, нам требуется только показать, что $M(z)$ имеет полюсы в z_0 и z_0^{-1} . Предположим, что u имеет нуль k -го порядка в z_0 (включая случай $k = 0$, т. е. когда $u(z_0) \neq 0$). Используя (4.3) и тот факт, что z_0 является полюсом функции $u^{(1)}$, мы видим, что z_0 является полюсом $(k+1)$ -го порядка функции $M(z)$ и, в частности, ее полюсом (так как $k+1 \geq 1$).

Если $k \geq 1$, то единственная возможность, согласующаяся с равенством (4.5), — это то, что $\overline{u(1/\bar{z})}$ имеет нуль в z_0 , поскольку возможный полюс функции M в z_0^{-1} может быть только простым и не может компенсировать полюс $(k+1)$ -го порядка в z_0 . Значит, $\overline{u(1/\bar{z}_0)} = 0$, а тогда точка z_0^{-1} лежит на вещественной оси и является полюсом функции $M(z)$. Таким образом, второе условие предложения 4.2 также выполняется и $z_0 \in P_2(J)$.

Если $k = 0$ и $M(z)$ не имеет полюса в $\bar{z}_0^{-1}$, то $M(z) - \overline{M(1/\bar{z})}$ имеет полюс в z_0 , в то время как $\overline{u(1/\bar{z}_0)} \neq 0 \neq u(z_0)$ (поскольку $k = 0$ и $1/\bar{z}_0$ не есть полюс), что противоречит (4.5). Следовательно, M должна иметь полюс в $\bar{z}_0^{-1}$, и $z_0 \in P_2(J)$ в силу предложения 4.2. $\square$

Доказательство теоремы 4.1. Если $z_0 \in P(J^{(1)})$, то либо $z_0 \in P_2(J^{(1)})$, а значит, $z_0 \in P_1(J)$ (в силу предложения 4.6), либо $z_0 \in P_1(J^{(1)})$, а значит, $z_0 \in P_1(J) \cup P_2(J)$ (в силу предложения 4.7). Следовательно, $P(J^{(1)}) \subset P(J)$.

Если $z_0 \in P(J)$, то либо $z_0 \in P_2(J)$, а значит, $z_0 \in P_1(J^{(1)})$ (в силу предложения 4.4), либо $z_0 \in P_1(J)$, а значит, $z_0 \in P_1(J^{(1)}) \cup P_2(J^{(1)})$ (в силу предложения 4.5). Поэтому $P(J) \subset P(J^{(1)})$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, J. García-Amor, *Generalizations of the Szegő transformation interval-unit circle*, preprint.
- [2] D. Damanik, B. Simon, *Jost functions and Jost solutions for Jacobi matrices, I. A necessary and sufficient condition for Szegő asymptotics*, Invent. Math., **165** (2006), 1–50.
- [3] D. Damanik, B. Simon, *Jost functions and Jost solutions for Jacobi matrices, II. Decay and analyticity*, Internat. Math. Res. Notices, 2006, Art. ID 19396.
- [4] P. Deift, J. Östensson, *A Riemann-Hilbert approach to some theorems on Toeplitz operators and orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **139** (2006), 144–171.
- [5] J. S. Geronimo, K. M. Case, *Scattering theory and polynomials orthogonal on the unit circle*, J. Math. Phys., **20** (1979), 299–310.
- [6] Ya. L. Geronimus, *On the trigonometric moment problem*, Ann. of Math. (2), **47** (1946), 742–761.
- [7] Я. Л. Геронимус, *Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения*, Зап. научно-исслед. инст. мат. мех. Харьков. матем. общ. (4), **19** (1948), 35–120.
- [8] R. Killip, I. Nenciu, *Matrix models for circular ensembles*, Internat. Math. Res. Notices, **50** (2004), 2665–2701.
- [9] R. Killip, B. Simon, *Sum rules for Jacobi matrices and their applications to spectral theory*, Ann. of Math. (2), **158** (2003), 253–321.
- [10] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory*, part 1, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [11] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 2: Spectral Theory*, part 2, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [12] B. Simon, *Meromorphic Szegő functions and asymptotic series for Verblunsky coefficients*, Acta Math., **195** (2005), 267–285.
- [13] G. Szegő, *Über den asymptotischen Ausdruck von Polynomen, die durch eine Orthogonalitätseigenschaft definiert sind*, Math. Ann., **86** (1922), 114–139.
- [14] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1939; 3rd edition, 1967.

California Institute of Technology, Pasadena
e-mail: bsimon@caltech.edu

Поступило в редакцию
12 мая 2006 г.