Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Шкаликов, Диссипативные операторы в пространстве Крейна. Инвариантные подпространства и свойства сужений, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 2, 93–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:08:11

УДК 517.9+517.43

Диссипативные операторы в пространстве Крейна. Инвариантные подпространства и свойства сужений*

© 2007. А. А. Шкаликов

К столетию Марка Григорьевича Крейна

§1. Введение

Напомним основные определения теории пространств с индефинитной метрикой. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, в котором наряду с обычным скалярным произведением (x, y) задано индефинитное скалярное произведение $[x, y] = (Jx, y)$, где J — самосопряженный оператор, такой, что $J^2 = 1$. Здесь и далее в операторных равенствах 1 означает тождественный оператор. Пространство $\mathcal{H}$ всегда считается сепарабельным. Оператор J называют канонической или внутренней симметрией в $\mathcal{H}$. При изучении гамильтоновых систем роль J играет симплектическая матрица. Поскольку оператор J самосопряженный и унитарный одновременно, то его спектр состоит из двух точек ± 1 . Поэтому справедливо представление $J = P_+ - P_-$, где P_+ и P_- — взаимно ортогональные ортопроекторы, причем $P_+ + P_- = 1$. Пространство $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ называют пространством Понтрягина и обозначают через Π_{κ} , если одно из чисел $\text{rank } P_+$ или $\text{rank } P_-$ конечно и равно κ , и пространством Крейна, если оба эти числа бесконечны. Подпространство $\mathcal{L}$ в $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ называют неотрицательным, если для всех $x \in \mathcal{L}$ выполнено неравенство $[x, x] \geq 0$. Если неотрицательное подпространство $\mathcal{L}$ не допускает неотрицательных нетривиальных расширений, то оно называется максимальным. Аналогично определяют максимальные неположительные подпространства в $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$.

Пусть A — линейный оператор в $\mathcal{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$. Через $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначаем его спектр и резольвентное множество соответственно. Если оператор A замыкаем, то через $\bar{A}$ обозначаем его замыкание. Плотный определенный оператор A называется *диссипативным* в $\mathcal{H}$, если $\text{Re}(Ax, x) \leq 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$. Диссипативный оператор называется *максимально диссипативным* или *m -диссипативным*, если он не допускает нетривиальных диссипативных расширений. Известно [14, гл. V, § 3.10], что последнее условие для диссипативного оператора A эквивалентно условию $\rho(A) \supset \mathbb{C}^+$, где $\mathbb{C}^+$ — открытая правая комплексная полуплоскость. Оператор A называется *J -диссипативным* (*J -максимально диссипативным*) или *диссипативным* (*m -диссипативным*) в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$, если JA — диссипативный (m -диссипативный) оператор в $\mathcal{H}$. Аналогично, A называется *симметрическим* (*самосопряженным*) в

*Работа поддержана программой «Ведущие научные школы», грант № НШ-5247.2006.1, Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 07-01-00283, и фондом ИНТАС, грант № 05-1000008-7883.

пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$, если JA симметричен (самосопряжен) в пространстве $\mathcal{H}$.

Представим пространство $\mathcal{H}$ в виде ортогональной суммы, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$, где $\mathcal{H}^\pm = P_\pm \mathcal{H}$ — образы проекторов $P_\pm$. Пусть A — линейный оператор в $\mathcal{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$. Положим $\mathcal{D}^\pm = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{H}^\pm$. Далее мы будем иметь дело только с такими операторами, для которых сумма $\mathcal{D}^+ \oplus \mathcal{D}^-$ является *существенной областью*¹⁾ оператора A . Это означает следующее: если A_0 — сужение оператора A на $\mathcal{D}^+ \oplus \mathcal{D}^-$, то $A \subset \overline{A_0}$, где $\overline{A_0}$ — замыкание оператора A .

Рассматривая, если нужно, сужение оператора A , будем далее считать, что $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}^+ \oplus \mathcal{D}^-$. В этом случае A допускает представление в виде операторной матрицы по отношению к каноническому разложению $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$:

$$A = \begin{pmatrix} P_+ A P_+ & P_+ A P_- \\ P_- A P_+ & P_- A P_- \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

При таком представлении векторы $x = x_+ + x_- \in \mathcal{H}$, где $x_\pm \in \mathcal{H}^\pm$, отождествляются со столбцами $x = \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix}$ и действие A задается равенством

$$Ax = A \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x_+ + A_{12}x_- \\ A_{21}x_+ + A_{22}x_- \end{pmatrix}, \quad x_+ \in \mathcal{D}^+, x_- \in \mathcal{D}^-.$$

В 1941 г. С. Л. Соболев обратил внимание Л. С. Понтрягина на следующий замечательный факт: *самосопряженный оператор в пространстве Π_1 всегда имеет по меньшей мере один собственный вектор* (доказательство Соболева долгое время оставалось неопубликованным; этот результат Соболев применял для исследования устойчивости одной задачи механики [28]). Это наблюдение Соболева послужило толчком для исследования Понтрягина [24], где он заложил начала геометрии пространств с индефинитной метрикой и получил следующий фундаментальный результат.

Теорема Понтрягина. Пусть A — самосопряженный оператор в пространстве Π_κ , причем $\text{rank } P_+ = \kappa < \infty$. Тогда существует A -инвариантное максимальное неотрицательное подпространство $\mathcal{L}$ ($\dim \mathcal{L} = \kappa$), такое, что спектр сужения $A|_{\mathcal{L}}$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости.

После работы [24] проблема существования инвариантных максимальных полудефинитных подпространств оказалась в центре внимания теории операторов в пространствах Понтрягина и Крейна. Крейн [16] получил аналог теоремы Понтрягина для унитарных операторов в Π_κ , развивая другой подход к проблеме, нежели в [24]. Важное обобщение теоремы Понтрягина было получено Лангером [19], [20] и Крейном [17]. Сформулируем результат из [20].

Теорема Лангера. Пусть A — самосопряженный оператор в пространстве Крейна $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$, причем $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{H}^+$ (это условие эквивалентно возможности представления (1.1), в котором операторы A_{11} и A_{21} ограничены). Если оператор $A_{12} = P_+ A P_-$ компактен, то существует A -инвариантное максимальное неотрицательное подпространство $\mathcal{L}$, такое, что спектр сужения $A|_{\mathcal{L}}$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости.

¹⁾В английском языке для этого понятия резервируется слово «core». В русском издании монографии [14] это слово не совсем удачно переведено как «ядро».

Впоследствии теоремы о существовании A -инвариантных подпространств были получены для других классов операторов. Крейн ввел и исследовал класс дефинитных операторов, а позже для более широкого класса так называемых дефинируемых операторов Лангер [21], [22] доказал теорему о существовании максимальных неотрицательных и неположительных инвариантных подпространств, а также установил существование спектральной функции для таких операторов. Эти исследования получили развитие в работах Йонаса [12], [13] и Дритшеля [6], [7]. Крейн и Лангер [18] и независимо Азизов [2], [3] начали исследование диссипативных операторов в пространствах Понтрягина и Крейна. В частности, в этих работах они доказали следующий результат.

Теорема Крейна–Лангера–Азизова. Пусть $-iA$ — максимально диссипативный оператор в пространстве Понтрягина $\Pi_{\mathcal{K}}$. Тогда справедливо утверждение теоремы Понтрягина.

Далее, Азизов и Хорошавин [4] доказали аналог теоремы Лангера для некоторого класса нерастягивающих операторов в пространстве Крейна, а с помощью этого результата Азизов [5, гл. 2] доказал, что теорема Лангера из [20] остается справедливой для максимально диссипативных операторов в пространстве Крейна (при этом в формулировке верхнюю комплексную полуплоскость нужно заменить на левую). Более того, Азизов показал, что условие компактности оператора A_{12} можно заменить на условие его компактности по отношению к оператору A_{22} , т. е. компактности оператора $A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1}$ при некотором $\mu \in \rho(A_{22})$ (для самосопряженных операторов этот факт ранее был отмечен Крейном [17]). Прямое, более короткое доказательство теоремы Азизова было предложено автором [25].

Задачу описания вещественного спектра или чисто мнимого спектра для сужений самосопряженных или диссипативных операторов в пространстве Крейна на максимальное неотрицательное инвариантное подпространство изучали Костюченко и Оразов [15], Гомилко [10] и автор [26].

Условие Лангера $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{H}^+$ (или условие ограниченности в матричном представлении (1.1) операторов A_{11} и A_{21}) является весьма ограничительным. В частности, оно не выполняется в некоторых конкретных задачах, которые были модельными в работах [1], [23]). Это обстоятельство послужило мотивом для получения обобщений сформулированных результатов, когда условие Лангера заменяется другим, более слабым. Такой результат был недавно получен автором [27]. Условие Лангера в [27] заменено следующим условием: найдется число μ в левой полуплоскости, такое, что операторы

$$(A_{22} - \mu)^{-1}A_{21}, \quad A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1}, \quad S(\mu) = A_{11} - A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1}A_{21}$$

ограничены. Оператор-функцию $S(\mu)$ называют *передаточной функцией* (а также трансфер-функцией или дополнением Фробениуса–Шура). Язык, использующий передаточные функции, на первый взгляд может показаться неуклюжим, но он естествен, и соответствующие условия в конкретных задачах нетрудно проверять. При этом условие ограниченности первых двух операторов, как правило, выполняется автоматически. Но условие ограниченности передаточной функции является достаточно «жестким». Ниже мы увидим, что оно выполняется в том и только том случае, когда сужение оператора A на соответствующее инвариантное подпространство является ограниченным оператором. Конечно,

имея в виду дальнейшие приложения (которые в этой работе мы не рассматриваем), представляется привлекательной задача от этого условия избавиться. Это является основной целью настоящей работы. Но научившись находить инвариантные подпространства, такие, что сужения $A|_{\mathcal{L}}$ неограниченны, мы приходим к новой важной задаче: являются ли они генераторами полугрупп какого-либо типа? Найти достаточные условия для положительного ответа на этот вопрос — вторая цель работы.

§2. Существование инвариантных подпространств

В случае неограниченных операторов важно определить, в каком смысле понимается инвариантность подпространств. Мы сделаем это в случае подпространств специального вида

$$\mathcal{L} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix}, x_+ \in \mathcal{H}^+ \right\}, \quad (2.1)$$

где $K: \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$ — линейный ограниченный оператор. О таких подпространствах говорят, что они имеют *граф-представление*, или называют их *граф-подпространствами*, а K — *угловым оператором*. Подпространство $\mathcal{L}$ такого вида будем называть *A -инвариантным*, если из условия $x_+ \in \mathcal{D}(A)$ следуют включения $Kx_+ \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax \in \mathcal{L}$ для всех $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{L}$. Легко проверить, что если граф-подпространство $\mathcal{L}$ является A -инвариантным в смысле приведенного определения и A замыкаем, то $\mathcal{L}$ инвариантно в смысле того же определения относительно замыкания $\bar{A}$ этого оператора. Приведенное определение согласуется с пониманием инвариантности в предшествующих работах: при выполнении условия Лангера $\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{D}(A)$ подпространство $\mathcal{L}$ считалось инвариантным, если $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}(A)$ и $A(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

Далее будет использоваться следующий хорошо известный факт (см. [24], [5]): *подпространство $\mathcal{L}$ является максимальным неотрицательным, если и только если оно является граф-подпространством с нерастягивающим угловым оператором (т.е. $\|K\| \leq 1$).*

Основная теорема об инвариантных подпространствах будет доказана для m -диссипативных операторов в пространстве Крейна. Известно [5, теорема II.2.9], что при выполнении условия Лангера $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{H}^+$ оператор A m -диссипативен в $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ тогда и только тогда, когда $-A_{22}$ максимально диссипативен в $\mathcal{H}^-$, т.е. левая полуплоскость лежит в резольвентном множестве оператора A_{22} . В общем случае можно утверждать, что из m -диссипативности оператора A вытекает только диссипативность операторов A_{11} и $-A_{22}$. Но мы будем работать с передаточной функцией, поэтому будем требовать выполнения только условия существования резольвенты оператора A_{22} при некотором (а тогда при всех) $\mu \in \mathbb{C}^-$. Сущность налагаемых ниже условий состоит в том, что оператор A_{22} является доминирующим по отношению к сплетающим операторам A_{21} и A_{12} . Сформулируем основной результат.

Теорема 2.1. Пусть A — диссипативный оператор в пространстве Крейна $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}^+ \oplus \mathcal{D}^-$, плотной в $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$. Пусть (1.1) — его матричное представление в $\mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$, и пусть выполнены следующие условия:

- (i) оператор $-A_{22}$ является m -диссипативным в пространстве $\mathcal{H}^-$ (т.е. существует резольвента $(A_{22} - \mu)^{-1}$ при всех $\mu \in \mathbb{C}^-$);

- (ii) оператор $F(\mu) = (A_{22} - \mu)^{-1} A_{21}$ допускает ограниченное замыкание при некотором (а тогда при всех) $\mu \in \mathbb{C}^-$;
- (iii) оператор $G(\mu) = A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1}$ компактен при некотором (а тогда при всех) $\mu \in \mathbb{C}^-$.

Тогда существует максимальное неотрицательное подпространство, инвариантное относительно оператора A . В случае когда замыкание $\bar{A}$ является t -диссипативным в $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ (и только в этом случае), найдется максимальное неотрицательное A -инвариантное подпространство $\mathcal{L}^+$, такое, что спектр сужения $A_+ = \bar{A}|_{\mathcal{L}^+}$ содержится в замкнутой левой полуплоскости.

Сразу отметим, что в условиях теоремы не нужно дополнительно требовать замыкаемости оператора A . Всякий плотно определенный диссипативный оператор в пространстве Крейна замыкаем (см., например, [5, гл. I, §2]). Доказательству теоремы предположим ряд лемм. Первая из них известна и доказана в [1]. Основную роль в дальнейшем играют леммы 2.3, 2.4 и 2.8. Далее, там, где не возникает недоразумений, мы будем опускать указание на зависимость операторов $G(\mu)$, $F(\mu)$, $S(\mu)$ от выбора $\mu \in \mathbb{C}^-$ и писать G , F , S .

Лемма 2.2. Пусть A — оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}^+ \oplus \mathcal{D}^-$, резольвентное множество $\rho(A_{22})$ непусто, а операторы

$$G = A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1} \quad \text{и} \quad F = (A_{22} - \mu)^{-1} A_{21}, \quad \mu \in \rho(A_{22}),$$

ограничены при некотором (а тогда при всех) $\mu \in \rho(A_{22})$. Тогда оператор A замыкаем в том и только том случае, когда $S = A_{11} - A_{12}F$ замыкаем в $\mathcal{H}^+$, и замыкание $\bar{A}$ определяется равенством

$$\bar{A} = \mu + \begin{pmatrix} 1 & G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{S} - \mu & 0 \\ 0 & A_{22} - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{F} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Более точно, область определения и действие оператора $\bar{A}$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{A}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} \in \mathcal{H}, x_+ \in \mathcal{D}(\bar{S}), \bar{F}x_+ + x_- \in \mathcal{D}^- \subset \mathcal{D}(A_{22}) \right\}, \\ \bar{A} \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{S}x_+ + G(A_{22} - \mu)(\bar{F}x_+ + x_-) \\ (A_{22} - \mu)(\bar{F}x_+ + x_-) + \mu x_- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Лемма 2.3. При $\mu \in \rho(A_{22})$ справедливо равенство

$$JA + \mu = J \begin{pmatrix} 1 & G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S + \mu & 0 \\ 0 & A_{22} - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F & 1 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Доказательство. В справедливости этого равенства легко убедиться непосредственной проверкой с учетом представления (2.2), в котором вместо замыканий $\bar{A}$, $\bar{F}$ и $\bar{S}$ участвуют A , F и S . Конечно, равенство (2.3) остается верным, если в нем операторы A , F , S заменить на их замыкания. $\square$

Лемма 2.4. При $\mu \in \rho(A_{22})$ для всех $x_+ \in \mathcal{D}_+$ справедливо равенство

$$(Sx_+, x_+) = \left(JA \begin{pmatrix} x_+ \\ -Fx_+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_+ \\ -Fx_+ \end{pmatrix} \right) + \mu(Fx_+, Fx_+). \quad (2.4)$$

В частности, при любом $\mu \in \mathbb{C}^-$ оператор $S = S(\mu)$ с областью определения $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}^+$ является диссипативным в пространстве $\mathcal{H}^+$, если оператор

A диссипативен в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$. Оператор $\bar{S}$ является m -диссипативным в пространстве $\mathcal{H}^+$, если $\bar{A}$ является m -диссипативным в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$, и наоборот.

Доказательство. В справедливости равенства (2.4) легко убедиться непосредственной проверкой с помощью равенства (2.3). Эквивалентность m -диссипативности операторов $\bar{S}$ в пространстве $\mathcal{H}^+$ и $\bar{A}$ в пространстве $\mathcal{H}$ также следует из равенства (2.3). $\square$

Лемма 2.5. Пусть подпространство $\mathcal{L}$ имеет представление (2.1), т.е. является граф-подпространством. Тогда $\mathcal{L}$ является A -инвариантным в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$(1 - KG)(A_{22} - \mu)(F + K) = K(S - \mu). \quad (2.5)$$

Здесь предполагается, что областью определения оператора в правой (а потому и в левой) части равенства является линейал $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}^+$.

Доказательство. Пусть подпространство $\mathcal{L}$ является A -инвариантным. Тогда $Kx_+ \in \mathcal{D}^-$ для всех $x_+ \in \mathcal{D}^+$, и из равенства (2.2) находим

$$(A - \mu) \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S - \mu)x_+ + G(A_{22} - \mu)(F + K)x_+ \\ (A_{22} - \mu)(F + K)x_+ \end{pmatrix}.$$

Здесь правая часть принадлежит $\mathcal{L}$; поэтому, обозначая первую координату через y_+ , получаем

$$[(S - \mu) + G(A_{22} - \mu)(F + K)]x_+ = y_+, \quad (A_{22} - \mu)(F + K)x_+ = Ky_+.$$

Подставляя выражение для y_+ во второе равенство, приходим к уравнению (2.5).

Обратно, если выполнено уравнение (2.5), то при всех $x_+ \in \mathcal{D}^+$ справедливы два последних уравнения. Тогда $(A_{22} - \mu)Kx_+ = Ky_+ - A_{21}x_+$, а следовательно, $Kx_+ \in \mathcal{D}^-$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A) \quad \text{и} \quad A \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \text{для любого } x \in \mathcal{D}^+,$$

т.е. $\mathcal{L}$ является A -инвариантным. Переходя в (2.5) к замыканиям и вспоминая описание области $\mathcal{D}(\bar{A})$, непосредственно получаем, что $\mathcal{L}$ является также $\bar{A}$ -инвариантным. $\square$

Замечание 2.6. Ранее, начиная с работы Понтрягина [24], использовалась другая версия леммы 2.5: $\mathcal{L}$ является A -инвариантным тогда и только тогда, когда

$$A_{21} + A_{22}K - KA_{11} - KA_{12}K = 0. \quad (2.6)$$

Это уравнение называют уравнением Риккати, ассоциированным с оператор-матрицей A . Однако в случае, когда все элементы оператор-матрицы A могут быть неограниченными операторами, удобнее иметь дело с модифицированным уравнением Риккати (2.5).

Лемма 2.7. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства, оператор $-T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ является m -диссипативным, а $B: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ T -компактен. Тогда

$$\|B(T - \mu)^{-1}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty$$

равномерно в любом секторе $\Lambda_\gamma = \{\lambda : |\arg(\pi - \mu)| \leq \gamma\}$, $\gamma < \pi/2$.

Доказательство. Положим $G(\mu) = B(T - \mu)^{-1}$. По условию $G(\mu)$ компактен при некотором (а тогда при всех) $\mu \in \mathbb{C}^-$. Воспользуемся равенством

$$G(\mu) = G(-1)(T + 1)(T - \mu)^{-1}.$$

Очевидно, что в условиях леммы норма оператор-функции $(T + 1)(T - \mu)^{-1}$ равномерно ограничена в секторе Λ_γ вне малой окрестности нуля. Компактный оператор $G(-1)$ можно приблизить с произвольной точностью в операторной норме конечномерным оператором. Поэтому достаточно показать, что $\|V(T + 1)(T - \mu)^{-1}\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ в левой полуплоскости для любого одномерного оператора $V = (\cdot, \varphi)\psi$, где $\varphi \in \mathcal{H}_1$, $\psi \in \mathcal{H}_2$. Заметим, что V можно с произвольной точностью приблизить в операторной норме оператором $V_0 = (\cdot, \varphi_0)\psi$, где $\varphi_0 \in \mathcal{D}(T^*)$ (в условиях леммы сопряженный оператор T^* плотно определен). Но оператор $V_0(T + 1)$ ограничен, а $\|(T - \mu)^{-1}\| \leq (\cos \gamma)^{-1}|\mu|^{-1}$ в секторе Λ_γ . Отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

В силу леммы 2.7 найдутся значения $\mu \in \mathbb{C}^-$, для которых $\|G(\mu)\| < 1/2$, т. е. множество $\mu \in \mathbb{C}^- \cap \rho(1 - KG)$ непусто, если $\|K\| \leq 1$. Тогда из леммы 2.5 получаем следующий важный для дальнейшего результат.

Лемма 2.8. Пусть число $\mu \in \mathbb{C}^-$ такое, что $\|G(\mu)\| < 1/2$. Тогда оператор A обладает инвариантным максимальным неотрицательным подпространством в том и только том случае, когда найдется нерастягивающий оператор $K: \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$, такой, что

$$F + K = (A_{22} - \mu)^{-1}(1 - KG)^{-1}K(S - \mu), \quad \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}^+. \quad (2.7)$$

Решение K этого уравнения не зависит от $\mu \in \mathbb{C}^- \cap \rho(1 - KG)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы непосредственно следует из леммы 2.5. Далее, уравнение (2.7) эквивалентно уравнению (2.5), где операторы в обеих частях равенств определены на $\mathcal{D}^+$. Поскольку операторы $A_{21} = (A_{22} - \mu)F$ и KA_{11} корректно определены на $\mathcal{D}^+$, то $(A_{22} - \mu)K$ и $KA_{12}F$ обладают тем же свойством. Но тогда в (2.5) можно раскрыть скобки и получить уравнение (2.6), в котором все слагаемые корректно определены на $\mathcal{D}^+$. Легко также убедиться в справедливости обратного утверждения: если уравнение (2.6) выполнено на линейале $\mathcal{D}^+$, то при любом $\mu \in \mathbb{C}^-$ выполняется уравнение (2.5) на той же области определения (нужно проделать обратные преобразования). Таким образом, K не зависит от μ . $\square$

Напомним [9, гл. 6], что система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется безусловным базисом, если любой элемент $x \in \mathcal{H}$ однозначно представим в виде ряда $\sum c_k e_k$, безусловно сходящегося по норме пространства $\mathcal{H}$. Числовые коэффициенты $c_k = c_k(x)$ в этом представлении являются линейными непрерывными функционалами; поэтому $c_k(x) = (x, e_k^*)$. Систему $\{e_k^*\}_{k=1}^\infty$ называют сопряженной; она тоже является безусловным базисом. Если безусловный базис почти нормирован (т. е. $c_1 < \|e_k\| < c_2$ при некоторых $c_1, c_2 > 0$), то его называют базисом Рисса.

Лемма 2.9. Пусть T — плотно определенный замыкаемый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_T$ — плотно вложенное в $\mathcal{H}$ гильбертово пространство, снабженное нормой графика

$$\|x\|_T = \sqrt{\|\overline{T}x\|^2 + \|x\|^2}.$$

Существует система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, $e_k \in \mathcal{D}(T)$, являющаяся безусловным базисом в обоих пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_T$. В частности, если $\{e_k^*\}_{k=1}^\infty$ — сопряженная к ней система, то проекторы $P_n = \sum_{k=1}^n (\cdot, e_k^*) e_k$ на подпространства $\mathcal{L}_n = \text{Lin}\{e_k\}_{k=1}^n$ (а также сопряженные к ним проекторы P_n^*) сильно сходятся к тождественному оператору в обоих пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_T$.

Доказательство. Сначала построим систему $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_k \in \mathcal{D}(\bar{T})$, которая является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$ и безусловным базисом в $\mathcal{H}_T$.

Известно [14, теорема V.3.24], что оператор $T^*\bar{T}$ самосопряжен в $\mathcal{H}$, а его область определения $\mathcal{D}(T^*\bar{T})$ является существенной областью для оператора $\bar{T}$ и потому плотна в $\mathcal{H}_T = \mathcal{D}(\bar{T})$. Из определения нормы в пространстве $\mathcal{H}_T$ следует, что оператор $C = (1 + T^*\bar{T})^{1/2}$ изоморфно отображает $\mathcal{H}_T$ в $\mathcal{H}$. Если вложение $\mathcal{H}_T \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно, то оператор $C^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ компактный. В качестве искомой системы тогда можно взять полную ортонормированную в $\mathcal{H}$ систему $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ собственных векторов этого оператора, поскольку система $\{\mu_k \psi_k\}_{k=1}^\infty$, где $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность собственных значений оператора C^{-1} , будет полной и ортонормированной в пространстве $\mathcal{H}_T$.

Если $C^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ некомпактен, но его спектр состоит только из собственных значений, то доказательство сохраняется: нужно выбрать ортонормированную систему в каждом собственном подпространстве и взять объединение этих систем. В общем случае рассмотрим оператор $C_1 = 1 + \sum_{k=1}^\infty k(E_k - E_{k-1})$, где E_λ — спектральная функция оператора C . Очевидно, что спектр оператора C_1 состоит только из собственных значений, причем операторы $C^{-1}C_1$ и $C_1^{-1}C$ ограничены, т.е. пространства $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_C$ и $\mathcal{H}_{C_1}$ совпадают и нормы в них эквивалентны. Поэтому, если взять систему с требуемыми свойствами для оператора C_1 , то она будет безусловным базисом в $\mathcal{H}_T$.

Итак, построена ортонормированная в $\mathcal{H}$ система $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_k \in \mathcal{D}(\bar{T})$, являющаяся безусловным базисом в $\mathcal{H}_T$. Из определения замыкания $\bar{T}$ следует, что линейал $\mathcal{D}(T)$ плотен в $\mathcal{H}_T$. Положим $\alpha_k = \|\varphi_k\|_T$ и выберем элементы $e_k \in \mathcal{D}(T)$ так, чтобы

$$\sum \alpha_k^2 \|\alpha_k^{-1} \varphi_k - e_k\|_T^2 < \delta.$$

Тогда в силу неравенств $\|x\|_T \geq \|x\|$, $\alpha_k \geq 1$

$$\sum \|\alpha_k^{-1} \varphi_k - e_k\|_T^2 < \delta, \quad \sum \|\varphi_k - \alpha_k e_k\|^2 < \delta.$$

Поскольку система $\{\alpha_k^{-1} \varphi_k\}$ — базис Рисса в $\mathcal{H}_T$, то, согласно теореме Бари [9, гл. 6], система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ обладает тем же свойством, если число $\delta < 1$ выбрано достаточно малым. Так как $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система в $\mathcal{H}$, то в силу той же теоремы Бари система $\{\alpha_k e_k\}$ является базисом Рисса в пространстве $\mathcal{H}$ при любом $\delta < 1$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.10. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства и последовательность операторов $K_n: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ слабо сходится к оператору $K: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ при $n \rightarrow \infty$ (будем писать $K_n \rightarrow K$). Пусть последовательности операторов $B_n: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ и $D_n: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ сильно сходятся к B и D соответственно (пишем $B_n \rightarrow B$, $D_n \rightarrow D$). Тогда

$$K_n D_n \rightarrow KD, \quad B_n K_n \rightarrow BK, \quad B_n K_n D_n \rightarrow BKD. \quad (2.8)$$

Если $G: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ — компактный оператор, а оператор $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ ограничен, то при любом $s = 1, 2, \dots$

$$(GK_n)^s \rightarrow (GK)^s, \quad (K_n G)^s K_n = K_n (GK_n)^s \rightarrow (KG)^s K, \quad GK_n UG \Rightarrow GKUG, \quad (2.9)$$

где знак $\Rightarrow$ означает сходимость в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Конечно, сформулированные утверждения в разных формах отмечались и использовались во многих книгах и работах. Похожие утверждения можно найти, например, в [11, гл. 12].

Доказательства легче провести независимо. Например, из определения слабой сходимости при любых $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ имеем

$$|(K_n D_n x - K D x, y)| = |(D_n x - D x, K_n^* y) + ((K_n - K) D x, y)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из этого следует первое утверждение в (2.8). Второе получается аналогично, а третье следует из первых двух. Так как компактный оператор G можно с произвольной точностью приблизить конечномерным оператором, то утверждения (2.9) достаточно доказать для одномерного оператора $G = (\cdot, \varphi)\psi$, где $\varphi \in \mathcal{H}_2$, $\psi \in \mathcal{H}_1$, причем достаточно проверить первое и третье утверждения. Но в этом случае проверка тривиальна. $\square$

Лемма 2.11. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства, $G: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ — компактный оператор, оператор $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ плотно определен и замкнут, а $B: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ является T -подчиненным, т.е. при некоторых $a, b > 0$ справедлива оценка

$$\|Bx\| \leq b\|Tx\| + a\|x\| \quad \text{для любого } x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(B). \quad (2.10)$$

Пусть последовательность операторов $D_n: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ слабо сходится к оператору D , а последовательность $E_n: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ сходится к нулю в равномерной операторной топологии. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{C}$ лежит в резольвентном множестве оператора T и $\Omega \cap \rho(T + GDB)$ непусто.

Тогда спектр оператора $T + GDB$ в области Ω дискретен. Если Γ — компакт в Ω , не содержащий собственных значений этого оператора, то при достаточно больших n операторы $T + GD_n B + E_n - \lambda$ обратимы при $\lambda \in \Gamma$ и равномерно на Γ имеет место сильная резольвентная сходимость

$$(T + GD_n B + E_n - \lambda)^{-1} \rightarrow (T + GDB - \lambda)^{-1} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

В частности, если при всех достаточно больших $n > n_0$ в Ω не содержится точек спектра оператора $T + GD_n B + E_n$, то $\rho(T + GDB) \supset \Omega$.

Доказательство. Последнее утверждение этой леммы в разных частных случаях и разными методами доказано в [5] (см. доказательство теоремы III.2.8) и в [25, лемма 5]. Здесь мы проведем доказательство, основанное на синтезе идей из [5] и [25].

Сразу отметим, что дискретность спектра оператора $T + GDB$ в области Ω следует из теоремы Фредгольма для аналитической оператор-функции $1 + GDB(T - \lambda)^{-1}$ (см., например, [9, гл. 1]). Здесь мы учитываем, что условия леммы гарантируют ограниченность оператор-функции $B(T - \lambda)^{-1}$ на любом компакте в Ω . Положим

$$R(\lambda) = (T + GDB - \lambda)^{-1}, \quad Y_n(\lambda) = G(D_n - D)BR(\lambda) + E_n R(\lambda).$$

Тогда $(T + GD_nB + E_n - \lambda)^{-1} = R(\lambda)(I + Y_n(\lambda))^{-1}$. Поэтому для доказательства соотношения (2.11) достаточно доказать сильную сходимость

$$(1 + Y_n(\lambda))^{-1} \rightarrow 1, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Оператор-функция $BR(\lambda) = [B(T - \lambda)^{-1}][1 + GDB(T - \lambda)^{-1}]^{-1}$ равномерно ограничена на Γ . Поэтому

$$Y_n^2(\lambda) = [*]G(D_n - D)[*]G[*] + \tilde{E}_n(\lambda),$$

где $\tilde{E}_n(\lambda) \Rightarrow 0$, а знаком $[*]$ обозначены равномерно ограниченные оператор-функции, не зависящие от n . Из леммы 2.10 следует, что $Y_n(\lambda) \rightarrow 0$, $Y_n^2(\lambda) \Rightarrow 0$. В частности, $\|Y_n^2(\lambda)\| < 1/2$ при достаточно больших $n > n_0$; поэтому из равенства $(1 - Y_n^2)(1 + Y_n)^{-1} = 1 - Y_n$ получаем равномерную оценку

$$\|(1 + Y_n(\lambda))^{-1}\| < 2(1 + \|Y_n(\lambda)\|) \leq \text{const}, \quad n > n_0. \quad (2.12)$$

Следовательно,

$$(1 + Y_n(\lambda))^{-1} - 1 = Y_n(\lambda) - Y_n^2(\lambda)(1 + Y_n(\lambda))^{-1} \rightarrow 0.$$

Этим завершается доказательство соотношения (2.11).

Для доказательства последнего утверждения леммы возьмем в качестве Γ произвольный жорданов контур в Ω и проинтегрируем резольвенту $(T + GD_nB + E_n - \lambda)^{-1}$ вдоль Γ . Получим проекторы Рисса $Q_n(\Gamma)$, которые сильно сходятся к соответствующему проектору Рисса $Q(\Gamma)$ предельного оператора. Если в Ω не содержится точек спектра оператора $T + GD_nB + E_n$, то $Q_n(\Gamma) = 0$, а потому $Q(\Gamma) = 0$ для любого контура $\Gamma \in \Omega$. Но тогда оператор $T + GDB$ не имеет собственных значений в Ω . $\square$

Лемма 2.12. Пусть $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — замкнутый плотно определенный оператор, а B является T -подчиненным, т.е. выполнена оценка (2.10), причем $b < 1$. Если $\|Tx\| \geq \gamma\|x\|$ для всех $x \in \mathcal{D}(T)$ и $a < (1 - b)\gamma$, то образы операторов T и $T + B$ замкнуты, а размерности их дефектных подпространств (т.е. размерности ядер операторов T^* и $(T + B)^*$) совпадают.

Доказательство. Это утверждение есть частный случай теоремы IV.5.22 из [14]. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Обозначим через $\mathcal{H}_S^+$ вложенное в $\mathcal{H}^+$ гильбертово пространство с нормой графика оператора $\bar{S}$. Согласно лемме 2.9, выберем систему элементов $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, $e_k \in \mathcal{D}^+ = \mathcal{D}(S)$, являющуюся безусловным базисом в обоих пространствах $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}_S^+$. Положим

$$P_n := \sum_{k=1}^n (\cdot, e_k^*)e_k, \quad \mathcal{H}_n^+ := \text{Lin}\{e_k^*\}_{k=1}^n = P_n^*(\mathcal{H}^+),$$

где $\{e_k^*\}$ — сопряженная система. Тогда $P_n \rightarrow 1$ в обоих пространствах $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}_S^+$. Рассмотрим операторы

$$A_n = \begin{pmatrix} P_n^* A_{11} P_n & P_n^* A_{12} \\ A_{21} P_n & A_{22} \end{pmatrix},$$

действующие в пространствах $\mathcal{H}_n^+ \oplus \mathcal{H}^-$. Очевидно, что операторы A_n являются m -диссипативными в пространстве Понтрягина Π_n . Согласно теореме

Крейна–Лангера–Азизова, операторы A_n обладают n -мерными максимальными неотрицательными подпространствами $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{D}(A_n)$. В силу леммы 2.8 найдутся нерастягивающие операторы $K_n: \mathcal{H}_n^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$, такие, что

$$F_n + K_n = (A_{22} - \mu)^{-1}(1_n - K_n G_n)^{-1} K_n (S_n - \mu 1_n), \quad (2.13)$$

где $F_n = F P_n$, $G_n = P_n^* G$, $S_n = P_n^* S P_n$, а 1_n — тождественный оператор в $\mathcal{H}_n$.

Доопределим операторы K_n и 1_n на все пространство $\mathcal{H}^+$, полагая их равными нулю на ортогональном дополнении к $\mathcal{H}_n^+$. Известно (см., например, [11, гл. 2]), что единичный шар в сепарабельном гильбертовом пространстве является слабо компактным. Так как нормы операторов K_n не превосходят единицы, то можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $K_{n_j} \rightharpoonup K$. Далее для краткости мы опускаем индекс j . Конечно, для предельного оператора K также имеем $\|K\| \leq 1$. Учитывая, что F — ограниченный оператор, а G — компактный оператор с нормой $\|G\| < 1/2$, в силу леммы 2.10 получаем

$$\begin{aligned} F P_n &\rightarrow F, & (K_n P_n^* G)^s K_n &\rightarrow (K G)^s K, & s = 1, 2, \dots, \\ (1_n - K_n P_n^* G)^{-1} K_n &\rightarrow (1 - K G)^{-1} K. \end{aligned}$$

Так как оператор $\bar{S}: \mathcal{H}_S^+ \rightarrow \mathcal{H}^+$ ограничен, а $P_n \rightarrow 1$ в $\mathcal{H}_S^+$, то $(\bar{S}_n - \mu 1_n)x \rightarrow (\bar{S} - \mu)x$ для всех $x \in \mathcal{D}(\bar{S})$. Вновь пользуясь леммой 2.10, получаем, что в уравнении (2.13) можно перейти к слабому пределу. Тогда для предельного оператора K получим уравнение (2.7), справедливое на области $\mathcal{D}(\bar{S})$. В силу леммы 2.8 граф-подпространство с угловым оператором K является максимальным неотрицательным и A -инвариантным.

Докажем вторую часть теоремы о существовании инвариантного подпространства $\mathcal{L}^+$, такого, что спектр сужения $A_+ = \bar{A}|_{\mathcal{L}^+}$ лежит в замкнутой левой полуплоскости.

Имеем

$$(\bar{A} - \mu) \begin{pmatrix} x_+ \\ K x_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{S} - \mu + G L) x_+ \\ L x_+ \end{pmatrix}, \quad L := (A_{22} - \mu)(F + K), \quad \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\bar{S}). \quad (2.14)$$

Определим оператор $Q: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}^+$ равенством

$$Q \begin{pmatrix} x_+ \\ K x_+ \end{pmatrix} = x_+, \quad x = \begin{pmatrix} x_+ \\ K x_+ \end{pmatrix} \in \mathcal{L}.$$

Очевидно, что Q ограниченно обратим, причем $\|Q^{-1}\| \leq \sqrt{2}$. Из равенств (2.5) и (2.14) получаем

$$(\bar{A} - \alpha)|_{\mathcal{L}^+} = Q^{-1}(\bar{S} - \alpha + G L)Q = Q^{-1}[\bar{S} - \alpha + V(\bar{S} - \mu)]Q, \quad V := G(1 - G K)^{-1}K. \quad (2.15)$$

Здесь $V = V(\mu)$, причем в силу леммы 2.7 число $\mu \in \mathbb{C}^-$ можно выбрать так, что $\|V\| < 1/3$. Воспользуемся леммой 2.12, полагая

$$T = \bar{S} - \alpha, \quad B = V(\bar{S} - \alpha) + (\alpha - \mu)V.$$

В этом случае $\|T x_+\| \geq (\operatorname{Re} \alpha) \|x_+\|$, а B является T -подчиненным с постоянными $a = |\alpha - \mu|/3$, $b = 1/3$. Тогда при всех положительных $\alpha > |\alpha - \mu|/2$ оператор $(\bar{S} - \alpha) + V(\bar{S} - \mu)$ является обратимым в том и только том случае, когда оператор $\bar{S} - \alpha$ обратим, т. е. когда $\bar{S}$ является m -диссипативным. Согласно лемме 2.7, это

эквивалентно m -диссипативности оператора $\bar{A}$ в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$. Следовательно, открытая левая полуплоскость может принадлежать резольвентному множеству сужения $\bar{A}|_{\mathcal{L}^+}$ только в случае, когда оператор $\bar{A}$ является m -диссипативным в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$.

Пусть A обладает этим свойством. Тогда равенство (2.15) можно переписать в виде

$$(\bar{A} - \alpha)|_{\mathcal{L}^+} = Q^{-1}[1 + M(\alpha)](\bar{S} - \alpha)Q, \quad M(\alpha) := V[1 + (\alpha - \mu)(\bar{S} - \alpha)^{-1}]. \quad (2.16)$$

Значения оператор-функции $M(\alpha)$ — компактные операторы, а при больших положительных α оператор $1 + M(\alpha)$ обратим. В силу аналитической теоремы Фредгольма [9, гл. 1] спектр оператора $1 + M(\alpha)$ (а потому и спектр сужения $A_+ = \bar{A}|_{\mathcal{L}^+}$) в открытой правой полуплоскости может состоять только из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности.

Заметим, что $\text{Im}[Ax_0, x_0] = (\text{Im } \alpha_0)[x_0, x_0]$, если $Ax_0 = \alpha_0 x_0$. Так как A диссипативен в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$, а $\mathcal{L}$ — неотрицательное подпространство, то число $\alpha \in \mathbb{C}$ может быть собственным значением оператора $A|_{\mathcal{L}}$ только в случае $\text{Im}[Ax_0, x_0] = [x_0, x_0] = 0$. Поэтому, если A (или $A|_{\mathcal{L}}$) строго диссипативен, то $A|_{\mathcal{L}}$ не имеет собственных значений в $\mathbb{C}^+$, а потому вся эта полуплоскость принадлежит резольвентному множеству. Тем самым теорема полностью доказана для строго диссипативных операторов A .

В общем случае рассмотрим семейство операторов

$$A_\varepsilon = A - \varepsilon P_+, \quad \varepsilon > 0.$$

Уже доказано, что для этих операторов имеются максимальные неотрицательные A_ε -инвариантные подпространства с угловыми операторами K_ε . Сужения операторов A_ε на эти инвариантные подпространства являются строго диссипативными операторами, так как

$$\text{Re} \left[(A - \varepsilon P_+) \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} \right] \leq -\varepsilon(x_+, x_+).$$

Поэтому открытая правая полуплоскость лежит в резольвентных множествах этих сужений. Эти сужения имеют представления

$$\bar{A}_\varepsilon|_{\mathcal{L}_\varepsilon^+} = Q^{-1}(\bar{S} + i\varepsilon + V_\varepsilon(\bar{S} + i\varepsilon - \mu))Q, \quad V_\varepsilon := G(1 - K_\varepsilon G)^{-1}K_\varepsilon. \quad (2.17)$$

Запишем модифицированное уравнение Риккати для оператора A_ε :

$$F + K_\varepsilon = (A_{22} - \mu)^{-1}(1 - K_\varepsilon G)^{-1}K_\varepsilon(S + i\varepsilon - \mu).$$

Выберем подпоследовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ так, что $K_{\varepsilon_n} =: K_n \rightharpoonup K_0$. Как и раньше, мы снова можем перейти к слабому пределу в этом уравнении. Тогда K_0 является угловым оператором A -инвариантного граф-подпространства $\mathcal{L}^+$. Сужение оператора A на это инвариантное подпространство имеет представление (2.17), в котором нужно положить $\varepsilon = 0$. Воспользуемся леммой 2.11, положив

$$T = \bar{S}, \quad B = \bar{S} - \mu, \quad D_n = (1 - K_n G)^{-1}K_n, \quad E_n = i\varepsilon_n(1 + GD_n).$$

Условия этой леммы выполнены, поскольку G компактен и $D_n \rightharpoonup D = (1 - K_0 G)^{-1}K_0$. Получаем, что правая полуплоскость свободна от спектра предельного оператора $T + GDB$, который подобен сужению оператора A на $\mathcal{L}^+$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.13. Мы можем уточнить утверждение теоремы 2.1 для случая, когда оператор A является диссипативным, но не m -диссипативным. Для этого удобно использовать язык теории полуфредгольмовых операторов (см. [14, гл. IV, §5]). Число $d = \text{def}(JA - \alpha) \leq \infty$, равное размерности ядра $\ker(A^*J - \bar{\alpha})$, не зависит от $\alpha \in \mathbb{C}^+$. В силу леммы 2.3 имеем

$$\text{def}(JA - \alpha)|_{\alpha \in \mathbb{C}^+} = \text{def}(JA + \mu)|_{\mu \in \mathbb{C}^-} = \text{def}(\bar{S}(\mu) - \alpha)|_{\alpha = -\mu} = \text{def}(\bar{S}(\mu) - \alpha)|_{\alpha \in \mathbb{C}^+}.$$

Из второй теоремы устойчивости для полуфредгольмовых операторов при $\alpha \in \mathbb{C}^+$ получаем равенство

$$\text{ind}(\bar{S} - \alpha) = \text{ind}(\bar{S} - \alpha + V(\bar{S} + \mu)) = \text{ind}(A|_{\mathcal{L}} - \alpha) = d$$

для индексов операторов. При этом число $\text{nul}(A|_{\mathcal{L}} - \alpha)$, равное размерности ядра $\ker(A|_{\mathcal{L}} - \alpha)$, равно нулю для всех $\alpha \in \mathbb{C}^+$, за возможным исключением множества изолированных точек (см. подробнее [14, гл. IV, §5.6]).

§3. Полугрупповые свойства сужений

Мы предполагаем, что читателю известны определения голоморфной полугруппы и C_0 -полугруппы и их генераторов (см., например, [8, I, II], [14, IX]) в гильбертовом (или банаховом) пространстве $\mathcal{H}$. Далее мы будем использовать только свойства резольвент генераторов таких полугрупп. Напомним следующие предложения. Первые два хорошо известны (см. цитированные монографии), они дают критерии того, что оператор является генератором C_0 -полугруппы и голоморфной полугруппы соответственно, в терминах резольвенты генератора.

Теорема о генераторе C_0 -полугруппы (Феллер–Миядера–Филлипс). *Замкнутый плотно определенный оператор $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ является генератором C_0 -полугруппы тогда и только тогда, когда найдется число $\omega \in \mathbb{R}$, такое, что полуплоскость $\text{Re } \lambda > \omega$ лежит в резольвентном множестве $\rho(T)$ и для всех целых $n \geq 1$ и $\lambda > \omega$*

$$\|(T - \lambda)^{-n}\| \leq C(\lambda - \omega)^{-n}, \quad (3.1)$$

где постоянная C не зависит от λ и n .

В этом случае для полугруппы $U(t) = \exp(Tt)$ выполняется оценка $\|U(t)\| \leq Ce^{\omega t}$. Нижняя грань чисел ω , для которых выполнена эта оценка или оценка (3.1), называется *экспоненциальным типом* C_0 -полугруппы. В случае $\omega < 0$ полугруппу называют *экспоненциально устойчивой*.

Теорема о генераторе голоморфной полугруппы. *Замкнутый плотно определенный оператор $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ является генератором голоморфной полугруппы тогда и только тогда, когда правая полуплоскость лежит в резольвентном множестве $\rho(T)$ и для всех λ , $\text{Re } \lambda > 0$, выполняется оценка*

$$\|(T - \lambda)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-1}, \quad (3.2)$$

где постоянная C не зависит от λ .

Конечно, такая оценка выполняется, если T является максимальным секторальным оператором, т.е. его числовой образ (множество значений квадратичной формы (Tx, x) , когда x пробегает $D(T)$ и $\|x\| = 1$) лежит в секторе $\Lambda_\alpha = \{\lambda : |\arg(\lambda - \pi)| < \alpha\}$ при некотором $\alpha < \pi/2$. В этом случае неравенство (3.2) выполняется при $C = (\cos \alpha)^{-1}$.

Далее удобно будет ввести следующее определение: полугруппу $U(t) = \exp(Tt)$ назовем *квазиголоморфной*, если для резольвенты ее генератора выполнена оценка (3.2) для всех λ , $\operatorname{Re} \lambda > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно, а постоянная C зависит только от ε . Очевидно, это условие эквивалентно тому, что $T - \varepsilon$ является генератором голоморфной полугруппы при любом $\varepsilon > 0$. Известно, что квазиголоморфная полугруппа является C_0 -полугруппой экспоненциального типа 0. Обратное, конечно, неверно.

Заметим, что в основной теореме 2.1 в явном виде не фигурировали условия на оператор A_{11} . Но получить результаты о полугрупповых свойствах сужения A_+ без дополнительных условий на оператор A_{11} — задача трудная. Мы вернемся к ней в другой работе, а здесь приведем результат для случая, когда оператор A_{12} ограничен. Кроме того, мы рассмотрим случай, когда один из операторов A_{11} или $S = S(\mu)$ генерирует квазиголоморфную полугруппу. Нам понадобятся два утверждения.

Теорема Герхарта [8, теорема V.1.11]. *Экспоненциальный тип C_0 -полугруппы, генерируемой оператором T в гильбертовом пространстве, совпадает с нижней гранью чисел β , для которых полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ лежит в $\rho(T)$ и*

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda > \beta} \|(T - \lambda)^{-1}\| < \infty.$$

Лемма 3.1. *Пусть T есть m -диссипативный, а V — компактный операторы в $\mathcal{H}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдется достаточно большое число $r = r(\varepsilon)$, такое, что для всех λ из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \varepsilon$, удовлетворяющих условию $|\lambda| > r$, оператор $T + V - \lambda$ обратим и*

$$\|(T + V - \lambda)^{-1}\| \leq (2\varepsilon)^{-1}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Действуем так же, как в лемме 2.7. Пусть сначала $V = (\cdot, \varphi)\psi$ — одномерный оператор в $\mathcal{H}$. Представим его в виде

$$V = V_0 + V_1, \quad V_0 = (\cdot, \varphi)\psi_0, \quad \|V_1\| < \delta, \quad \psi_0 \in \mathcal{D}(T).$$

Положим $\psi_1 = (T - 1)\psi_0$. Тогда

$$(T - \lambda)^{-1}\psi_0 = (T - \lambda)^{-1}(T - 1)^{-1}\psi_1 = (\lambda - 1)^{-1}[(T - \lambda)^{-1}\psi_1 - (T - 1)^{-1}\psi_1].$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $\delta < \varepsilon/4$. В полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \varepsilon$ имеем оценку $\|(T - \lambda)^{-1}\| \leq \varepsilon^{-1}$. Поэтому при таких λ

$$\|(T - \lambda)^{-1}(V_1 + V_0)\| \leq \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{\|\varphi\| \|\psi_1\|}{|\lambda - 1|} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) < \frac{1}{2}, \quad \text{если } |\lambda| > 1 + 4\|\varphi\| \|\psi_1\| \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Очевидно, что из этой оценки следует (3.3). Доказательство сохраняется, если V конечномерен. Так как компактный оператор можно приблизить по норме с произвольной точностью конечномерным, то оценка остается справедливой и для компактного оператора V . $\square$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и A_+ — сужение m -диссипативного оператора $\bar{A}$ в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ на инвариантное максимальное неотрицательное подпространство $\mathcal{L}^+$, такое, что $\sigma(A_+)$ лежит в замкнутой левой полуплоскости. Пусть также выполнено одно из условий*

- (i) оператор A_{12} компактен;
- (ii) оператор A_{12} ограничен и

$$\sup_{\mu \in \mathbb{C}^-, |\mu| > r} \|(A_{22} - \mu)^{-1}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Тогда A_+ генерирует C_0 -полугруппу экспоненциального типа 0. Если, кроме того, $\bar{A}$ равномерно m -диссипативен в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$, т. е. $\operatorname{Re}[Ax, x] \leq -\varepsilon(x, x)$ для всех $x \in D(A)$ при некотором $\varepsilon > 0$, то A_+ генерирует экспоненциально устойчивую C_0 -полугруппу.

Доказательство. Из формул (2.14) и (2.15) следует, что

$$A_+ := \bar{A}|_{\mathcal{L}^+} = Q^{-1}XQ, \quad X = \bar{S} + A_{12}(F + K).$$

Оператор $\bar{S} = \bar{S}(\mu)$ является m -диссипативным, а потому генерирует полугруппу сжатий в $\mathcal{H}^+$, тем более, C_0 -полугруппу. Из теоремы устойчивости для C_0 -полугрупп при ограниченных возмущениях [14, теорема IX.2.1] получаем, что оператор X также генерирует C_0 -полугруппу. Кроме того, спектр оператора X лежит в замкнутой левой полуплоскости. Тогда, если оператор A_{12} компактен, в силу леммы 3.1 резольвента $(X - \alpha)^{-1}$ является ограниченной в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha > \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Остается воспользоваться теоремой Герхарта.

Теперь пусть выполнено условие (ii) (отметим, что оно заведомо выполнено, если $-A_{22}$ генерирует квазиголоморфную полугруппу). Как и ранее, достаточно доказать ограниченность резольвенты $(X - \alpha)^{-1}$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha > \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$ и больших $|\alpha| > r(\varepsilon)$. Тогда вновь можно воспользоваться теоремой Герхарта.

Воспользуемся представлением (2.15), из которого получим

$$(X - \alpha)^{-1} = (S - \alpha)^{-1}(1 + M(\mu, \alpha))^{-1}, \quad M(\mu, \alpha) := V[1 + (\alpha - \mu)(\bar{S} - \alpha)^{-1}]. \quad (3.5)$$

Здесь $V = G(\mu)(1 - KG(\mu))^{-1}K$. Так как оператор A_{12} ограничен и выполнено условие (3.4), то $\|V(\mu)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\mathbb{C}^-$. Выбор числа μ в представлении (3.5) находится в нашей власти, положим $\mu = -\bar{\alpha}$. Из оценки $(\alpha + \bar{\alpha})\|(\bar{S} - \alpha)^{-1}\| \leq 2$ следует $\|M(-\bar{\alpha}, \alpha)\| \rightarrow 0$ при $\alpha \in \mathbb{C}^+, |\alpha| \rightarrow \infty$. Из представления (3.5) получаем равномерную ограниченность резольвенты $(X - \alpha)^{-1}$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha \geq \varepsilon > 0$ при больших $|\alpha|$. Поэтому экспоненциальный тип генерируемой оператором X полугруппы неположителен.

Пусть теперь оператор $\bar{A}$ является равномерно m -диссипативным в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$. Тогда $J\bar{A}$ обратим и $\operatorname{Re}(J\bar{A}x, x) \geq \varepsilon(x, x)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Следовательно, оператор $J\bar{A} - \lambda J$ обратим в полосе $|\operatorname{Re} \lambda| < \varepsilon$, а в более узкой полосе $|\operatorname{Re} \lambda| < \delta < \varepsilon$ верна оценка

$$\|(A_+ - \lambda)^{-1}\| \leq \|(A - \lambda)^{-1}\| = \|(JA - \lambda J)^{-1}\| \leq 1/(\varepsilon - \delta).$$

Из теоремы Герхарта получаем, что A_+ генерирует полугруппу экспоненциального типа $\leq -\varepsilon$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и A_+ — сужение m -диссипативного оператора $\bar{A}$ в пространстве $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ на инвариантное, максимальное неотрицательное подпространство $\mathcal{L}^+$, такое, что $\sigma(A_+)$ лежит в замкнутой левой полуплоскости. Пусть также выполнено одно из условий

- (i) оператор $\bar{S} = \bar{S}(\mu)$ генерирует квазиголоморфную полугруппу при некотором $\mu \in \mathbb{C}^-$;
- (ii) оператор $\bar{A}_{11}$ генерирует квазиголоморфную полугруппу и при некотором $\mu \in \mathbb{C}^-$ оператор $R(\mu) := A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1}A_{21}$ является A_{11} -ограниченным с нулевой A_{11} -гранью, т.е. при любом $\delta > 0$ найдется $a = a(\delta)$, такое, что

$$\|R(\mu)x\| \leq \delta \|A_{11}x\| + a\|x\|, \quad x \in \mathcal{D}(A_{11});$$

- (iii) оператор $\bar{A}_{11}$ генерирует квазиголоморфную полугруппу, а оператор A_{21} является A_{11} -ограниченным.

Тогда A_+ генерирует квазиголоморфную полугруппу.

Доказательство. Пусть $\bar{S}(\mu_0)$ генерирует квазиголоморфную полугруппу. Из формулы

$$R(\mu) = A_{12}(A_{22} - \mu)^{-1}A_{21} = R(\mu_0) + (\mu - \mu_0)G(\mu)F(\mu_0)$$

следует, что при любом $\mu \in \mathbb{C}^-$ оператор $S(\mu)$ является ограниченным возмущением оператора $S(\mu_0)$. Кроме того, $\bar{S}(\mu)$ является m -диссипативным, а потому он также генерирует квазиголоморфную полугруппу.

Воспользуемся равенством

$$\bar{S}(\mu) - \alpha = [1 - (\mu - \mu_0)G(\mu)F(\mu_0)(\bar{S}_0 - \alpha)^{-1}](\bar{S}_0 - \alpha),$$

где $\bar{S}_0 = \bar{S}(\mu_0)$. Найдется достаточно большое число $r = r(\mu, \varepsilon)$, такое, что при $|\alpha| > r$, $\operatorname{Re} \alpha \geq \varepsilon$ выполняется оценка

$$\|(\mu - \mu_0)G(\mu)F(\mu_0)(\bar{S}_0 - \alpha)^{-1}\| < 1/2.$$

Следовательно,

$$\|(\bar{S}(\mu) - \alpha)^{-1}\| < 2\|(\bar{S}_0 - \alpha)^{-1}\| < C(\varepsilon)|\alpha|^{-1} \quad \text{при } |\alpha| > r(\mu, \varepsilon), \operatorname{Re} \alpha \geq \varepsilon. \quad (3.6)$$

В этом неравенстве постоянная $C = C(\varepsilon) \geq 1$ от μ не зависит. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\mu < 0$ так, чтобы

$$\|G(\mu)(1 - KG(\mu))^{-1}\| < (4C)^{-1}.$$

Тогда для функции $M(\mu, \alpha)$, определенной в (3.5), получаем оценку

$$\|M(\mu, \alpha)\| < (4C)^{-1}(1 + C(1 + |\mu||\alpha|^{-1})) < 3/4,$$

если $|\alpha| > \max\{r, |\mu|\}$. Так как $\bar{S}(\mu)$ генерирует квазиголоморфную полугруппу, то из представления (3.5) имеем

$$\|(X - \alpha)^{-1}\| \leq 4\|(\bar{S}(\mu) - \alpha)^{-1}\| \leq C|\alpha|^{-1} \quad \text{при } \operatorname{Re} \alpha \geq \varepsilon, |\alpha| > r(\mu, \varepsilon), \quad (3.7)$$

с постоянной C , не зависящей от α . Так как спектр оператора X лежит в левой полуплоскости, то эта оценка остается справедливой во всей полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha \geq \varepsilon$. Следовательно, X генерирует квазиголоморфную полугруппу.

Покажем, что из условия (ii) вытекает условие (i). По условию $\|\bar{A}_{11} - \alpha\|^{-1} \leq C(\varepsilon)|\alpha|^{-1}$ при $\operatorname{Re} \alpha \geq \varepsilon$, поэтому из второго условия в (ii) при тех же значениях α получаем

$$\begin{aligned} \|R(\mu)(\bar{A}_{11} - \alpha)^{-1}x\| &\leq \delta\|\bar{A}_{11}(\bar{A}_{11} - \alpha)^{-1}x\| + a\|(\bar{A}_{11} - \alpha)^{-1}x\| \\ &\leq (\delta(1 + C(\varepsilon)) + aC(\varepsilon)|\alpha|^{-1})\|x\|. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\delta < (2+2C(\varepsilon))^{-1}$ и достаточно больших $|\alpha|$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha \geq \varepsilon$ выполнена оценка $\|R(\mu)(\bar{A}_{11} - \alpha)^{-1}\| < 1/2$. Из равенства

$$(\bar{S} - \alpha)^{-1} = [1 + R(\mu)(\bar{A}_{11} - \alpha)^{-1}]^{-1} (\bar{A}_{11} - \alpha)^{-1}$$

и m -диссипативности оператора $\bar{S} = \bar{S}(\mu)$ получаем, что $\bar{S}$ генерирует квазиголоморфную полугруппу.

Покажем, что из условия (iii) следует (ii). Имеем $R(\mu) = G(\mu)A_{21}$. Но $G(\mu)$ компактен; поэтому если A_{21} является A_{11} -ограниченным, то $R(\mu)$ обладает тем же свойством с нулевой A_{11} -гранью. Теорема полностью доказана. $\square$

Автор признателен проф. Т. Я. Азизову и проф. А. М. Гомилко за кропотливый труд при чтении рукописи работы. Их замечания позволили устранить ряд погрешностей в рукописи и улучшить изложение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, A. A. Shkalikov, *The essential spectrum of some matrix operators*, Math. Nachr., **167** (1994), 5–20.
- [2] Т. Я. Азизов, *Инвариантные подпространства и критерии полноты системы собственных векторов J -диссипативных операторов в пространстве Понтрягина*, Докл. АН СССР, **200**:5 (1971), 1015–1017.
- [3] Т. Я. Азизов, *Диссипативные операторы в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **37**:3 (1973), 639–662.
- [4] Т. Я. Азизов, С. А. Хорошавин, *Об инвариантных подпространствах операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой*, Функц. анализ и его прил., **14**:4 (1980), 1–7.
- [5] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
- [6] M. A. Dritschel, *A method for constructing invariant subspaces for some operators on Krein spaces*, in: Operator Theory: Advances and Applications, vol. 61, Birkhäuser, Basel–Boston, 1993, 85–113.
- [7] M. A. Dritschel, *Compact perturbations of operators on Krein spaces*, in: Contemporary Mathematics, vol. 189, 1995, 201–211.
- [8] K. J. Engel, R. Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2000.
- [9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [10] А. М. Гомилко, *Инвариантные подпространства J -диссипативных операторов*, Функц. анализ и его прил., **19**:3 (1985), 61–62.
- [11] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.
- [12] P. Jonas, *Compact perturbations of definitizable operators. II*, J. Operator Theory, **8**:1 (1982), 3–18.
- [13] P. Jonas, *On a class of self-adjoint operators in Krein space and their compact perturbations*, Integral Equations Operator Theory, **11**:3 (1988), 351–384.
- [14] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [15] А. Г. Костюченко, М. Б. Оразов, *О некоторых свойствах корней самосопряженного квадратичного пучка*, Функц. анализ и его прил., **9**:4 (1975), 28–40.
- [16] М. Г. Крейн, *Об одном приложении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой*, УМН, **50** (1950), 180–190.

- [17] М. Г. Крейн, *Об одном новом применении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой*, Докл. АН СССР, **154**:5 (1964), 1023–1026.
- [18] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, *О дефинитных пространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ* , Функци. анализ и его прил., **5**:2 (1971), 59–71; **5**:3 (1971), 54–69.
- [19] Г. К. Лангер, *О J -эрмитовых операторах*, Докл. АН СССР, **134**:2 (1962), 263–266.
- [20] H. Langer, *Eine Verallgemeinerung eines Satzes von L. S. Pontrjagin*, Math. Ann., **152**:5 (1963), 434–436.
- [21] H. Langer, *Invariant subspaces for a class of operators in spaces with indefinite metric*, J. Funct. Anal., **19**:3 (1975), 232–241.
- [22] H. Langer, *Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces*, Lecture Notes in Math., **948** (1982), 1–46.
- [23] R. Mennicken, A. A. Shkalikov, *Spectral decomposition of symmetric operator matrices*, Math. Nachr., **179** (1996), 259–273.
- [24] Л. С. Понтрягин, *Эрмитовы операторы в пространствах с индефинитной метрикой*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **8** (1944), 243–280.
- [25] А. А. Шкаликов, *О существовании инвариантных подпространств у диссипативных операторов в пространстве Крейна*, Фундам. прикл. матем., **5**:2 (1999), 627–635.
- [26] А. А. Шкаликов, *О принципах отбора и свойствах некоторых частей собственных и присоединенных элементов операторных пучков*, Вестник МГУ. Матем. Мех., **43**:4 (1988), 16–25.
- [27] А. А. Шкаликов, *Об инвариантных подпространствах диссипативных операторов в пространстве с индефинитной метрикой*, Труды МИРАН, **248** (2005), 294–303.
- [28] С. Л. Соболев, *Движение симметрического волчка с полостью, заполненной жидкостью*, Журнал прикл. матем. и техн. физики, 1960, № 3, 20–55.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
email: ashkalikov@yahoo.com

Поступило в редакцию
12 января 2007 г.