Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Азизов, П. Йонас, О локально дефинизируемых матриц-функциях, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 3, 1–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2864>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:33:20

О локально дефинизируемых матриц-функциях*

© 2007. Т. Я. Азизов, П. Йонас

Посвящается памяти М. Г. Крейна

Введение

Работа посвящена исследованию аналитических свойств специальных классов матричнозначных функций методами теории операторов. Пусть G — неванлинновская $n \times n$ -матричнозначная функция, т. е. G кусочно-голоморфна, задана на множестве $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, где символами $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ обозначены множества комплексных и вещественных чисел соответственно, является $\mathbb{R}$ -симметричной функцией: $G(\bar{\lambda}) = G(\lambda)^*$, и $(2i)^{-1}(G(\lambda) - G(\lambda)^*) \geq 0$ при всех λ с $\text{Im } \lambda > 0$. Известно (см. [5], [18]), что такая функция G допускает представление

$$G(\lambda) = S + \Gamma^*(\lambda + (1 + \lambda^2)(A - \lambda)^{-1})\Gamma, \quad (0.1)$$

где A — самосопряженный оператор или самосопряженное линейное отношение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, Γ — ограниченный оператор из $\mathbb{C}^n$ в $\mathcal{H}$ и S — симметрическая $n \times n$ -матрица; при этом представление (0.1) может быть выбрано минимальным, т. е.

$$\mathcal{H} = \overline{\text{span}}\{(\lambda + (1 + \lambda^2)(A - \lambda)^{-1})\Gamma x \mid x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Другими словами, G может быть записана как Q -функция, соответствующая некоторому самосопряженному расширению симметрического линейного отношения (см. [13]). Минимальное представление определяет линейный оператор или линейное отношение A с точностью до унитарной эквивалентности. С другой стороны, любая функция, допускающая представление (0.1) (даже без условия минимальности) является неванлинновской. Аналогичное представление допускают также обобщенные функции Неванлинны (см. [14], [5]) и дефинируемые функции (см. [9]). Как оказалось, при изучении функций упомянутых классов ключевую роль играют спектральные свойства соответствующих линейных операторов или линейных отношений. В то же время, теория этих функциональных классов находит важные приложения в спектральной теории операторов.

Основным объектом изучения в нашей работе являются локально обобщенные функции Неванлинны и локально дефинируемые функции со значениями в множестве $n \times n$ -матриц (см. ниже определение 1.5). Для функций этих классов существует представление, аналогичное (0.1) (см. [11]), т. е. представление в виде Q -функции симметрического оператора специального класса в пространстве Крейна. Локально дефинируемые операторы часто появляются при алгебраических операциях с дефинируемыми и мероморфными функциями.

*Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Целью этой работы является доказательство того, что если функция $G(\lambda)$ является локально дефинируемой или локально обобщенной матричнозначной функцией Неванлинны, то $-(G(\lambda))^{-1}$ принадлежит тому же классу. Следует отметить, что у этого результата нет бесконечномерного операторного аналога (см. ниже пример 2.1). Доказательство основных результатов опирается на представления изучаемых матриц-функций через самосопряженные линейные отношения в пространстве Крейна и на теорию возмущений для таких отношений. Показано, что обратная к дефинируемой матричнозначной функции является дефинируемой, и в этом случае выделены специальные свойства дефинируемости (теорема 2.2).

В §3 основные результаты §2 применяются к исследованию граничной задачи для симметрического оператора в пространстве Крейна, в которой собственное значение играет также роль параметра в граничных условиях. Описаны некоторые спектральные свойства граничной задачи, а также построено такое самосопряженное в пространстве Крейна линейное отношение B , имеющее локальную спектральную функцию, что решение граничной задачи выражается через компрессию его резольвенты.

В §1 приведены необходимые определения и предварительные результаты, используемые при получении основных результатов в §§2, 3.

§1. Некоторые классы оператор-функций

1.1. Обозначения для мероморфных оператор-функций. Пусть Ω — область в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, симметричная относительно вещественной оси $\mathbb{R}$ и такая, что $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ и ее пересечения $\Omega^+ = \Omega \cap \mathbb{C}^+$ и $\Omega^- = \Omega \cap \mathbb{C}^-$ с верхней и нижней полуплоскостями $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ — односвязные множества. Мы не исключаем случаев $\Omega = \overline{\mathbb{C}}$ (или, что эквивалентно, $\overline{\mathbb{R}} \subset \Omega$) и $\Omega = \mathbb{C}$.

Всюду ниже $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ — сепарабельное пространство Крейна и $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — множество линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ (теорию пространств Крейна см., например, в [1]). Пусть S есть $\mathbb{R}$ -симметричное подмножество в $\overline{\mathbb{C}}$, а f и F — соответственно скалярная и $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ -значная функции, определенные на S . Положим $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$, $F^*(z) := F(\bar{z})^+$, $z \in S$, где $+$ обозначает сопряжение в пространстве Крейна.

Через $M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$ обозначается множество всех $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ -значных кусочно-мероморфных функций F , определенных на $\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}$ и симметричных относительно $\mathbb{R}$, т. е. $F = F^*$.

Если G — функция из $M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$, будем обозначать через $P(G; \Omega)$ объединение множества ее точек голоморфности в $\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}$ и множества всех $z \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$, таких, что G может быть аналитически продолжена в z как из Ω^+ , так из Ω^- , причем эти аналитические продолжения совпадают. Для краткости положим $P(G) := P(G; \overline{\mathbb{C}})$, если $G \in M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Напомним определение знака открытых подмножеств $\Delta_0 \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ относительно $\mathbb{R}$ -симметричной оператор-функции.

Определение 1.1. Пусть $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$. Открытое подмножество Δ_0 множества $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ имеет *положительный тип относительно G* , если выполнены следующие условия:

- (i) в Δ_0 нет точек сгущения не вещественных полюсов функции G ;
- (ii) для каждого $x \in \mathcal{H}$ и почти всех $u \in \Delta_0 \setminus \{\infty\}$

$$\liminf_{v \downarrow 0} \operatorname{Im}[G(u + iv)x, x] \geq 0;$$

- (iii) для каждого $x \in \mathcal{H}$ и каждого компактного в $\overline{\mathbb{R}}$ подмножества $\Delta_1 \subset \Delta_0$ существует окрестность $\mathcal{U}_1$ (в $\overline{\mathbb{C}}$) множества Δ_1 , такая, что

$$\inf\{\operatorname{Im}[G(u + iv)x, x] : u + iv \in \mathcal{U}_1 \cap \overline{\mathbb{C}}^+\} > -\infty.$$

Открытое подмножество Δ_0 множества $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ имеет *отрицательный тип относительно G* , если оно имеет положительный тип относительно $-G$. Будем говорить, что Δ_0 имеет *дефинитный тип*, если оно является подмножеством положительного или отрицательного типа.

Эквивалентное описание множеств дефинитного типа см. в [10, лемма 3.8].

1.2. Предварительные сведения об обобщенных неванлинновских и дефинизируемых оператор-функциях. Функция $G \in M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ по определению есть N_κ -функция с неотрицательным целым κ , если ядро $(z - \bar{\zeta})^{-1}(G(z) - G(\zeta)^+)$ имеет точно κ отрицательных квадратов (см., например, [16]), и в этом случае мы будем писать $G \in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Положим $N(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \bigcup_{\kappa=0}^{\infty} N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Функция из $N(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ называется $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ -значной обобщенной функцией Неванлинны.

Каждая обобщенная функция Неванлинны является дефинизируемой ([8, предложение 2.5]) в следующем смысле.

Определение 1.2. Функция $G \in M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ называется *дефинизируемой*, если существует скалярная рациональная функция r , такая, что rG есть сумма функции Неванлинны N и $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ -значной рациональной функции Q , полюсы которой принадлежат $P(G)$:

$$r(z)G(z) = N(z) + Q(z) \quad (1.1)$$

для всех точек голоморфности $z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$ функций N и Q ; здесь по определению рациональная оператор-функция — мероморфная оператор-функция в $\overline{\mathbb{C}}$. Функция r с упомянутыми выше свойствами называется *дефинизирующей* функцией для G .

Подмножество в $M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ всех дефинизируемых функций будем обозначать через $D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Для каждой дефинизируемой оператор-функции существует симметричная дефинизирующая функция r , $r = r^*$ (см. [9, замечание после определения 1.1]). Далее мы приведем простые результаты о дефинизируемых оператор-функциях, необходимые в дальнейшем.

Лемма 1.3. (1) Если $G \in D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и $z_0 \in P(G)$, то для G существует дефинизирующая симметричная функция $r = r^*$, не имеющая полюсов нигде, кроме, возможно, точек z_0 и $\bar{z}_0$.

(2) Если $G \in D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и $r = r^*$ — дефинизирующая функция для G , причем все ее полюсы принадлежат $P(G)$, то существует разложение (1.1) функции rG из определения 1.2, такое, что дополнительно $P(G) \subset P(N)$ и каждый полюс λ функции Q является полюсом функции r , причем его порядок для функции r не меньше его порядка для Q .

Доказательство. Утверждение (1) доказано в [9, лемма 1.2]. Пусть выполнены условия (2), и пусть $rG = \tilde{N} + \tilde{Q}$ — разложение функции rG из определения 1.2.

Множество $\tilde{s} := \overline{\mathbb{R}} \cap (P(G) \setminus P(\tilde{N}))$ конечно. В самом деле, если некоторая точка из $\tilde{s}$ не является полюсом функции r , то она — полюс функции $\tilde{Q}$. Поэтому $\tilde{s}$ содержится в объединении множеств полюсов функций r и $\tilde{Q}$. Точки из $\tilde{s}$ — изолированные точки в множестве $\overline{\mathbb{R}} \setminus P(\tilde{N})$. Отсюда, используя интегральное представление функций Неванлинны (см. (1.3) ниже), получаем, что $\tilde{N}$ может быть записана в виде

$$\tilde{N} = N_{(\tilde{s})} + Q_{\tilde{s}},$$

где $N_{(\tilde{s})}$ и $Q_{\tilde{s}}$ — функции Неванлинны,

$$P(N_{(\tilde{s})}) = P(\tilde{N}) \cup \tilde{s}$$

и $Q_{\tilde{s}}$ — рациональная оператор-функция с полюсами только в $\tilde{s}$.

Положив $N := N_{(\tilde{s})}$, $Q := \tilde{Q} + Q_{\tilde{s}}$, имеем $rG = N + Q$ и

$$\overline{\mathbb{R}} \cap P(G) \subset P(N).$$

Точка $\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \cap P(G)$ является полюсом функции rG тогда и только тогда, когда λ — полюс для Q . Поскольку последнее утверждение справедливо и для $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}) \cap P(G)$, утверждение (2) доказано. $\square$

Дефинизируемые функции можно охарактеризовать их поведением вблизи вещественной оси.

Предложение 1.4 (см. [8], [9]). *Функция $G \in M(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ дефинизируема тогда и только тогда, когда она имеет не более конечного числа не вещественных полюсов и выполнены следующие условия:*

(i) *существуют постоянные $m \geq 1$ и $M > 0$, такие, что*

$$\|G(z)\| \leq M(1 + |z|)^{2m} |\operatorname{Im} z|^{-m}$$

для всех z из некоторой окрестности множества $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

(ii) *существует конечное множество $e \subset \overline{\mathbb{R}}$, такое, что каждая связная компонента множества $\overline{\mathbb{R}} \setminus e$ имеет дефинитный тип относительно G .*

1.3. Локально дефинизируемые оператор-функции. Основной объект этой статьи — мероморфные в $\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}$ функции, локально обладающие некоторыми свойствами обобщенных функций Неванлинны и дефинизируемых функций.

Определение 1.5. Функция $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ называется *локально дефинизируемой* в Ω , если для каждой области Ω' , такой, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, она может быть записана как сумма двух функций $G_0, G_{(0)} \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$,

$$G = G_0 + G_{(0)},$$

где G_0 — дефинизируемая функция, точнее, сужение дефинизируемой функции на Ω , а $G_{(0)}$ голоморфна в Ω' .

Класс оператор-функций, локально дефинизируемых в Ω , обозначим через $D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Если условие « G_0 — дефинизируемая оператор-функция» мы заменим требованием, чтобы G_0 принадлежала классу $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ при некотором $\kappa \geq 0$

(возможно, зависящем от Ω'), то будем говорить что G принадлежит классу $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ локально обобщенных функций Неванлинны.

Далее, если $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то функциональные классы $M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$, $D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, ... будут обозначаться также символами $M^{n \times n}(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}})$, $D^{n \times n}(\Omega)$, $N^{n \times n}(\Omega)$, $N_\kappa^{n \times n}$, $D^{n \times n}$, ... соответственно.

Из определения 1.5 следует, что сумма двух функций из $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ также принадлежит $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Ниже, в предложении 1.6, мы дадим эквивалентное описание множества локально дефинизируемых функций (см. [11, предложение 2.10]). Отметим, что необходимость условий (i)–(iii) немедленно вытекает из предложения 1.4.

Предложение 1.6 [11]. *Функция $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$ локально дефинизируема в Ω тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) *в $\Omega \cap \overline{\mathbb{C}}$ не существует точек сгущения не вещественных полюсов функции G ;*

(ii) *для каждого замкнутого подмножества $\Delta \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ существует такая его окрестность $\mathcal{U} \subset \overline{\mathbb{C}}$ и постоянные $m \geq 1$ и $M > 0$, что*

$$\|G(z)\| \leq M(1 + |z|)^{2m} |\operatorname{Im} z|^{-m}, \quad z \in \mathcal{U} \setminus \overline{\mathbb{R}};$$

(iii) *для каждой точки $\lambda \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ существует такая связная окрестность $I_\lambda \subset \overline{\mathbb{R}}$, что обе компоненты множества $I_\lambda \setminus \{\lambda\}$ имеют дефинитный тип относительно G .*

Если $\mathcal{H}$ — конечномерное пространство, то класс локально обобщенных функций Неванлинны можно охарактеризовать следующим образом.

Предложение 1.7. *Пусть $G \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$.*

(1) *Если $G \in N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, то условия (i)–(iii) предложения 1.6 выполнены с заменой свойства «имеют дефинитный тип» на свойство «имеют положительный тип» в условии (iii).*

(2) *Если $\dim \mathcal{H} < \infty$ и G удовлетворяет условиям (i)–(iii) предложения 1.6 с заменой свойства «имеют дефинитный тип» на свойство «имеют положительный тип», то $G \in N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.*

Доказательство. (1) Пусть $G \in N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Поскольку каждая обобщенная функция Неванлинны дефинизируема (см. [8, предложения 2.5]), то $G \in D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и условия (i)–(iii) предложения 1.6 выполнены. Пусть $\lambda \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$. По определению 1.5 можно записать G в виде $G = G_0 + G_{(0)}$, где $G_0 \in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ с некоторым κ и функция $G_{(0)}$ голоморфна в некоторой окрестности точки λ в $\overline{\mathbb{C}}$. Допустим существование такой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda_n \neq \lambda$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$, что λ_n не имеет окрестностей положительного типа относительно G . Тогда это же верно, если мы заменим G на G_0 . Последнее противоречит включению $G_0 \in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ (см. [11, разд. 2.4]).

(2) Пусть $G \in D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и условие (iii) предложения 1.6 выполнено с заменой свойства «имеют дефинитный тип» на свойство «имеют положительный тип». Пусть Ω' есть $\mathbb{R}$ -симметричная область в $\overline{\mathbb{C}}$ с теми же свойствами, что и Ω , и $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Пусть Δ_0 — объединение конечного числа связных открытых подмножеств множества $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$, такое, что $\Omega' \cap \overline{\mathbb{R}} \subset \Delta_0$ и каждая граничная точка t_0 связной компоненты в Δ_0 принадлежит некоторому интервалу положительного типа относительно G и либо является предельной для точек не голоморфности

функции G в Δ_0 , либо точкой голоморфности этой функции. Согласно [11, предложение 2.11], существует разложение

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

со следующими свойствами:

- (а) G_1 принадлежит $D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и голоморфна на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta_0}$; все граничные точки связных компонент множества Δ_0 принадлежат интервалам положительного типа относительно G_1 ;
- (б) G_2 принадлежит $M(\overline{\mathbb{C}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и локально голоморфна на $(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega') \cup \overline{\mathbb{R}}$.
- (с) G_3 является $\mathbb{R}$ -симметричной $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ -значной функцией, локально голоморфной на $(\Omega' \setminus \overline{\mathbb{R}}) \cup \Delta_0$.

Поэтому для каждой точки $\lambda \in \Delta_0$ существует такая окрестность I_λ в $\overline{\mathbb{R}}$, что множество $I_\lambda \setminus \{\lambda\}$ имеет положительный тип относительно G_1 . Согласно [8, следствие 2.6], G_1 — обобщенная функция Неванлинны. Так как G_2 — рациональная матричнозначная функция, то и она является обобщенной функцией Неванлинны. Положив $G_0 := G_1 + G_2$, $G_{(0)} := G_3$ и воспользовавшись определением 1.5 применительно к Ω' , G_0 и $G_{(0)}$, получаем, что $G \in N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. $\square$

Следующая теорема понадобится нам в §2.

Теорема 1.8. Пусть $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1$ — сепарабельные пространства Крейна. Пусть $G_1 \in D(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1))$, а $q = q^*$, K и $C = C^*$ — мероморфные функции в Ω со значениями в $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ соответственно. Тогда

- (1) функция G , определенная формулой

$$G(z) := q(z)K(\bar{z})^+ G_1(z)K(z) + C(z)$$

для всех точек $z \in \Omega \setminus \mathbb{R}$, лежащих в пересечении областей голоморфности функций q , K , G_1 и C , является локально дефинизируемой в Ω ;

- (2) существует подмножество $e \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ со следующими свойствами:
 - (а) e не имеет точек сгущения в $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$;
 - (б) e содержит все расположенные в $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ полюсы и нули функции q и все полюсы функций K , C ;
 - (с) все связные компоненты множества $(\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}) \setminus e$ имеют дефинитный тип относительно G_1 и G . Если значение функции q положительно на связной компоненте $\delta \subset (\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}) \setminus e$, то знаки типов множества δ относительно G_1 и G совпадают, а если значение q отрицательно, то эти знаки противоположны.

Доказательство. Сначала заметим, что G принадлежит $M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L})$ и удовлетворяет условиям (i), (ii) предложения 1.6. Для доказательства теоремы достаточно проверить утверждение, аналогичное (2), заменив $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ на произвольное связное открытое множество Δ_1 , такое, что $\overline{\Delta_1} \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$.

Пусть $\Omega' \supset \Delta_1$ — область в $\overline{\mathbb{C}}$, такая, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Тогда функция G_1 может быть записана в виде

$$G_1 = G_0 + G_{(0)},$$

где $G_0, G_{(0)} \in M(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1))$, G_0 дефинизируема, а $G_{(0)}$ голоморфна в Ω' . Пусть

$$rG_0 = N + Q,$$

где r , N и Q такие же, как в (1.1), и r и Q не имеют невинных полюсов (см. лемму 1.3). Тогда

$$G(z) = q(z)r(z)^{-1}K(\bar{z})^+N(z)K(z) + q(z)r(z)^{-1}K(\bar{z})^+Q(z)K(z) + C(z) \quad (1.2)$$

для всех $z \in \Omega'$, лежащих в пересечении областей голоморфности функций q , r^{-1} , K , K^+ и C .

Пусть e — объединение множеств всех полюсов функций q , K , C и нулей функции r , расположенных в Δ_1 . Пусть $t_0 \in \Delta_1 \setminus (e \cup \{\infty\})$. Функция G_1 имеет положительный тип (отрицательный тип) на связной компоненте множества $\Delta_1 \setminus (e \cup \{\infty\})$, содержащей t_0 , если $r(t_0) > 0$ (соответственно $r(t_0) < 0$); см. [9, разд. 3.1]. Теорема будет доказана, если показать, что некоторая окрестность точки t_0 имеет положительный (отрицательный) тип относительно функции G , если $q(t_0)r(t_0)^{-1} > 0$ (соответственно $q(t_0)r(t_0)^{-1} < 0$).

Будем предполагать, что $q(t_0)r(t_0)^{-1} > 0$; случай $q(t_0)r(t_0)^{-1} < 0$ рассматривается аналогично. Сумма второго и третьего слагаемых в правой части формулы (1.2) голоморфна в окрестности точки t_0 . Воспользуемся следующим известным (см. [19]) интегральным представлением операторной функции Неванлинны:

$$N(z) = A + Bz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma(t), \quad (1.3)$$

где A , B — ограниченные самосопряженные операторы, причем $B \geq 0$, а монотонно неубывающая оператор-функция Σ такова, что $\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} d[\Sigma(t)x, x] < \infty$ для каждого $x \in \mathcal{H}_1$. Отсюда следует существование таких ограниченного интервала $(\alpha, \beta) \subset \Delta_1 \setminus (e \cup \{\infty\})$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, и неванлинновской функции

$$H(z) = \int_{\alpha}^{\beta} (t-z)^{-1} d\Sigma(t), \quad (1.4)$$

что функция $N - H$ голоморфна в некоторой окрестности (в $\mathbb{C}$) интервала (α, β) . Отметим, что здесь Σ — такая оператор-функция со значениями в множестве ограниченных самосопряженных операторов в $(\mathcal{H}_1, [\cdot, \cdot])$, что для $\alpha \leq t_1 \leq t_2 \leq \beta$ и всех $x \in \mathcal{H}_1$ имеет место неравенство $[\Sigma(t_1)x, x] \leq [\Sigma(t_2)x, x]$, т. е. $(J_1 \Sigma(t_1)x, x)_1 \leq (J_1 \Sigma(t_2)x, x)_1$, где J_1 — фундаментальная симметрия пространства $(\mathcal{H}_1, [\cdot, \cdot])$ и $(\cdot, \cdot)_1 := [J_1 \cdot, \cdot]$.

Заметим, что в $[\alpha, \beta]$ существует такое не более чем счетное подмножество ω , что все функции $t \mapsto (J_1 \Sigma(t)x, x)_1$, $x \in \mathcal{H}_1$, непрерывны на $[\alpha, \beta] \setminus \omega$. В самом деле, если предположить противное, то оператор умножения на независимую переменную в гильбертовом пространстве $L_2([\alpha, \beta], \mathcal{H}_1, J_1 \Sigma)$ классов эквивалентности $\mathcal{H}_1$ -значных функций должен иметь несчетную ортонормированную систему собственных векторов, что противоречит сепарабельности пространства $L_2([\alpha, \beta], \mathcal{H}_1, J_1 \Sigma)$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что для каждого $\varepsilon > 0$ интервал $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, такой, что $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset (\alpha, \beta)$, имеет положительный тип относительно $q_0 K^* H K$, если функция $q_0: z \mapsto q(z)r(z)^{-1}$ положительна на интервале $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Покажем, что для каждого $x \in \mathcal{H}$ и некоторого достаточно малого $v_0 > 0$

$$\inf \{ \operatorname{Im}(q_0(u+iv)[K(u-iv)^+ H(u+iv)K(u+iv)x, x]) : u \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], 0 < v < v_0 \} > -\infty. \quad (1.5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Im} q_0(u + iv)[K(u - iv)^+ H(u + iv)K(u + iv)x, x] \\
&= -i(q_0(u + iv) - q_0(u - iv))[K(u - iv)^+ H(u + iv)K(u + iv)x, x] \\
&\quad - i q_0(u - iv)[(K(u - iv)^+ - K(u + iv)^+)H(u + iv)K(u + iv)x, x] \\
&\quad - i q_0(u - iv)[K(u + iv)^+(H(u + iv) - H(u - iv))K(u + iv)x, x] \\
&\quad - i q_0(u - iv)[K(u + iv)^+ H(u - iv))(K(u + iv) - K(u - iv))x, x], \quad (1.6)
\end{aligned}$$

то из неравенства

$$\inf\{\|H(u + iv)\| |v| : u \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\} < \infty$$

и аналитичности функций q_0 и K на $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ следует, что первый, второй и четвертый члены в правой части равенства (1.6) ограничены на $\{u + iv : u \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], v \in (0, v_0)\}$ при некотором $v_0 > 0$. Третий член можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& 2q_0(u) \operatorname{Im}[H(u + iv)K(u + iv)x, K(u + iv)x] \\
& - i(q_0(u - iv) - q_0(u))[K(u + iv)^+(H(u + iv) - H(u - iv))K(u + iv)x, x].
\end{aligned}$$

Первый член этого выражения неотрицателен, а второй неотрицателен на указанном выше множестве точек $u + iv$. Это доказывает (1.5).

Проверим что для $u \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \setminus \omega$

$$\liminf_{v \downarrow 0} \operatorname{Im}(q_0(u + iv)[K(u - iv)^+ H(u + iv)K(u + iv)x, x]) \geq 0. \quad (1.7)$$

Ниже мы пользуемся тем, что для каждого $u \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \setminus \omega$ все функции $t \mapsto [\Sigma(t)x, y]$ непрерывны в u . Поэтому

$$\lim_{v \downarrow 0} v[H(u + iv)x, y] = 0.$$

Перепишем первый член справа в формуле (1.6) в виде

$$\begin{aligned}
& -i(q_0(u + iv) - q_0(u - iv)) \\
& \times [H(u + iv)((K(u + iv) - K(u)) + K(u))x, ((K(u - iv) - K(u)) + K(u))x].
\end{aligned}$$

Предел этого выражения при $v \downarrow 0$ равен нулю. Предел второго члена справа в формуле (1.6) при $v \downarrow 0$ совпадает с пределом при $v \downarrow 0$ выражения

$$-i q_0(u - iv)[H(u - iv)((K(u + iv) - K(u)) + K(u))x, -2ivK'(u)x];$$

и поэтому тоже равен нулю. Аналогично обстоит дело и с четвертым членом. Так как

$$\begin{aligned}
& -i[K(u + iv)^+(H(u + iv) - H(u - iv))K(u + iv)x, x] \\
& = 2 \operatorname{Im}[H(u + iv)K(u + iv)x, K(u + iv)x] \geq 0,
\end{aligned}$$

то нижний предел третьего члена неотрицателен и $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ имеет положительный тип относительно $q_0 K^* H K$. $\square$

§2. Обратные к локально дефинизируемым матриц-функциям

Из определения класса $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ следует, что $G \in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ влечет за собой $-G^{-1} \in N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $\kappa = 0, 1, \dots$. Следующий пример показывает, что эта импликация не верна, если $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ заменить либо на класс $D(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ дефинизируемых функций, либо на класс $N(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ локально обобщенных неванлинновских функций при $\Omega \neq \overline{\mathbb{C}}$.

Пример 2.1. Пусть $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ — бесконечномерное гильбертово пространство, а A и B — ограниченные самосопряженные операторы, действующие в нем. Тогда оператор-функция $F(z) := zA + B$ является $\mathbb{R}$ -симметричной и голоморфной в $\mathbb{C}$, а потому принадлежит $N(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. В то же время функция $F(z)$ является дефинизируемой: в качестве дефинизирующей может быть взята, например, функция $z \mapsto z(1+z^2)^{-1}$. Выберем $A = P_+ - P_-$, где P_+ и P_- — взаимно дополняющие самосопряженные проекторы в $\mathcal{H}$, $P_+ + P_- = 1$, такие, что $\dim P_\pm \mathcal{H} = \infty$, а $B = B_+ \oplus B_-$, где B_+ и B_- — самосопряженные операторы в $P_+ \mathcal{H}$ и $P_- \mathcal{H}$ соответственно со спектрами $\sigma(-B_+) = \sigma(B_-) = \{n^{-1} : n = 1, 2, \dots\} \cup \{0\}$.

Тогда $-F(z)^{-1} = -(z + (P_+ - P_-)(B_+ \oplus B_-))^{-1}(P_+ - P_-)$ — ортогональная сумма функции Неванлинны $N: z \mapsto -(B_+ + z)^{-1}$ и функции $U: z \mapsto -(B_- - z)^{-1}$, такой, что $-U$ есть функция Неванлинны, и обе эти функции имеют полюсы в точках n^{-1} , $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, $-F^{-1}$ не принадлежит $D(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ и потому не является дефинизируемой и не принадлежит $N(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Ниже в этом параграфе мы покажем, что для случая конечномерного пространства $\mathcal{H}$ функция $-G^{-1}$ дефинизируема, локально дефинизируема или является локально обобщенной функцией Неванлинны одновременно с G .

Теорема 2.2. Пусть $G \in D^{n \times n}$ и $\det G(z) \neq 0$. Тогда $-G^{-1} \in D^{n \times n}$. Более того, если $z_0 \in P(G) \cap P(G^{-1})$ и $r = r^*$ — дефинизирующая функция для G , являющаяся рациональной функцией степени t и имеющая полюсы только в z_0 и $\bar{z}_0$, то

$$r^{-1}(-G^{-1}) \in N_{\kappa_1}^{n \times n}, \quad \text{где } \kappa_1 \leq \begin{cases} tn/2, & \text{если } z_0 \neq \bar{z}_0, \\ tn, & \text{если } z_0 = \bar{z}_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$r(-G^{-1}) \in N_{\kappa_2}^{n \times n}, \quad \text{где } \kappa_2 \leq \begin{cases} tn, & \text{если } z_0 \neq \bar{z}_0, \\ 2tn, & \text{если } z_0 = \bar{z}_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

и существует дефинизирующая функция для $-G^{-1}$, являющаяся рациональной функцией вида gr^{-1} , где $g = g^*$ — неотрицательная на $\mathbb{R}$ рациональная функция степени не более κ_1 .

Доказательство. Пусть z_0 и r удовлетворяют предположениям второй части теоремы. Существование такой дефинизирующей функции r следует из леммы 1.3, п. (1). По лемме 1.3, п. (2), существует разложение $rG = N + Q$, такое, что $N \in N_0^{n \times n}$, $P(G) \subset P(N)$ и Q не имеет полюсов кроме, возможно, точек z_0 и $\bar{z}_0$, причем порядки этих полюсов для Q не выше, чем для r .

Если $z_0 \neq \bar{z}_0$, то кратность полюса z_0 для Q не выше $tn/2$ и потому $Q \in N_{\kappa_1}^{n \times n}$ с $\kappa_1 \leq tn/2$ (см. [9, лемма 3.4]). Если $z_0 = \bar{z}_0$, то $Q \in N_{\kappa_1}^{n \times n}$ с $\kappa_1 \leq tn$ (см. [9, предложение 3.5]). В обоих случаях $N + Q = rG \in N_{\kappa_1}^{n \times n}$ и, следовательно, имеет место (2.1).

Поскольку z_0 и $\bar{z}_0$ — точки голоморфности для $r^{-1}(-G^{-1})$, то (см. [8, доказательство предложения 2.5, п. (3)]) мы получаем существование рациональной дефинизирующей функции g для $r^{-1}(-G^{-1})$ степени κ_1 , которая неотрицательна на $\overline{\mathbb{R}}$ и не имеет полюсов, кроме, возможно, точек z_0 и $\bar{z}_0$, и по лемме 1.3, п. (2), существует разложение

$$gr^{-1}(-G^{-1}) = \tilde{N} + \tilde{Q},$$

где $\tilde{N} \in N_0^{n \times n}$ и рациональная матричнозначная функция $\tilde{Q} = \tilde{Q}^*$ не имеет полюсов за исключением, возможно, точек z_0 и $\bar{z}_0$. Так как $z_0, \bar{z}_0 \in P(-G^{-1})$, то gr^{-1} — дефинизирующая функция для $-G^{-1}$. Это доказывает первое и последнее утверждения теоремы.

Из условий $z_0, \bar{z}_0 \in P(-G^{-1})$ и разложения функции $r^2(r^{-1}(-G^{-1})) = r(-G^{-1})$ в сумму $F_1 + F_2$, где F_1 — голоморфная вблизи точек $z_0, \bar{z}_0$, а F_2 — голоморфная вне некоторой окрестности этих точек функции, следует, что $r(-G^{-1}) \in N_{\kappa_1 + mn/2}^{n \times n}$, если $z_0 \neq \bar{z}_0$, и $r(-G^{-1}) \in N_{\kappa_1 + mn}^{n \times n}$, если $z_0 = \bar{z}_0$. Это доказывает (2.2). $\square$

Теорема 2.3. Если $G \in N^{n \times n}(\Omega)$ и $\det G(z) \neq 0$ на множестве голоморфности функции G , то $-G^{-1} \in N^{n \times n}(\Omega)$.

Доказательство. 1. В случае $\Omega = \overline{\mathbb{C}}$ это утверждение известно (см. [15, предложение 3.3]). Поэтому положим $\Omega \neq \overline{\mathbb{C}}$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\infty \notin \Omega$, $i \in \Omega$, точка i не является полюсом функции G и $\det G(i) \neq 0$. Если это не так, то следует соответствующим образом преобразовать аргумент.

Достаточно доказать теорему в случае, когда не только $\det G(i) \neq 0$, но и $\det G'(i) \neq 0$. В самом деле, предположим, что $\det G'(i) = 0$. Тогда функция $\tilde{G} \in N^{n \times n}(\Omega)$, $\tilde{G}(z) = (1 + z^2)G(z)$ (см. теорему 1.8 и предложение 1.7), удовлетворяет условию $\det \tilde{G}'(i) = \det(2iG(i)) = (2i)^n \det G(i) \neq 0$. Если доказано включение $-\tilde{G}^{-1} \in N^{n \times n}(\Omega)$, то из равенства $-G(z)^{-1} = -(1 + z^2)\tilde{G}(z)^{-1}$ также следует, что $-G^{-1} \in N^{n \times n}(\Omega)$.

2. Предположим, что $\det G'(i) \neq 0$. Пусть области Ω_j для $j = 1, 2, 3$ являются $\mathbb{R}$ -симметричными и ограниченными в $\mathbb{C}$, причем области $\Omega_j \cap \mathbb{C}^\pm$ односвязны и $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega_3} \subset \Omega_2$, $i \in \Omega_3$. Запишем G как сумму $G = G_0 + G_{(0)}$, где $G_0 \in N_{\kappa}^{n \times n}$ при некотором $\kappa \geq 0$ и $G_{(0)}$ голоморфна в Ω_1 .

Существуют пространство Понтрягина $\mathcal{H}_0$ с $\kappa_-(\mathcal{H}_0) = \kappa < \infty$, самосопряженное линейное отношение A_0 в $\mathcal{H}_0$ с $\rho(A_0) = P(G_0)$, оператор $\Gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{H}_0)$ и симметрический оператор $S_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, такие, что

$$G_0(z) = S_0 + \Gamma_0^+ \{z + (z^2 + 1)(A_0 - z)^{-1}\} \Gamma_0, \quad z \in \rho(A_0)$$

(см. [5, теорема 1.1]). Из [11, теорема 2.7] следует существование пространства Крейна $\mathcal{H}_{(0)}$, самосопряженного линейного отношения $A_{(0)}$ в $\mathcal{H}_{(0)}$ с $\Omega_2 \subset \rho(A_{(0)})$, оператора $\Gamma_{(0)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{H}_{(0)})$ и симметрического оператора $S_{(0)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, таких, что

$$G_{(0)}(z) = S_{(0)} + \Gamma_{(0)}^+ \{z + (z^2 + 1)(A_{(0)} - z)^{-1}\} \Gamma_{(0)}, \quad z \in \Omega_2.$$

Рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_{(0)}$, $\Gamma := (\Gamma_0 \ \Gamma_{(0)})^T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{H})$, $S := S_0 + S_{(0)}$. Если A — прямое произведение линейных отношений A_0 и $A_{(0)}$,

то

$$G(z) = S + \Gamma^+ \{z + (z^2 + 1)(A - z)^{-1}\} \Gamma, \quad z \in \Omega_2 \cap \rho(A_0).$$

Так как $\det G'(i) \neq 0$, то

$$\ker \Gamma = \{0\}. \quad (2.3)$$

Определим линейные отображения $\Gamma_z \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathcal{K})$, $z \in \rho(A)$, формулой

$$\Gamma_z := (1 + (z - i)(A - z)^{-1})\Gamma.$$

Непосредственно можно показать, что оператор-функция

$$z \mapsto (A - z)^{-1} - \Gamma_z G(z)^{-1} \Gamma_z^+ \quad (2.4)$$

удовлетворяет резольвентному уравнению на $\{z \in \Omega_2 \cap \rho(A) : \det G(z) \neq 0\}$. Отсюда, поскольку функция (2.4) $\mathbb{R}$ -симметрична, следует существование самосопряженного линейного отношения B в $\mathcal{K}$, такого, что

$$\{z \in \Omega_2 \cap \rho(A) : \det G(z) \neq 0\} \subset \rho(B)$$

и

$$(B - z)^{-1} = (A - z)^{-1} - \Gamma_z G(z)^{-1} \Gamma_z^+ \quad (2.5)$$

для всех $z \in \Omega_2 \cap \rho(A)$ с $\det G(z) \neq 0$, в частности, для $z = i, -i$.

3. Пусть P_0 и $P_{(0)}$ — ортогональные проекторы в $\mathcal{K}$ с областями значения $\mathcal{K}_0 \times \{0\}$ и $\{0\} \times \mathcal{K}_{(0)}$ соответственно, и пусть E_0 — спектральная функция отношения A_0 . Тогда для каждого открытого подмножества Δ_0 множества $\Omega_2 \cap \mathbb{R}$, являющегося объединением конечного числа открытых интервалов и такого, что определен проектор $E_0(\Delta_0)$, разложение

$$\mathcal{K} = E\mathcal{K} + (1 - E)\mathcal{K} \quad \text{с } E := E_0(\Delta_0)P_0$$

приводит линейное отношение A и имеют место следующие утверждения:

(α) $E\mathcal{K}$ — понтрягинское подпространство в $\mathcal{K}$ с конечным рангом отрицательности, т. е. $\kappa_-(E\mathcal{K}) < \infty$,

(β) $\sigma(A \cap (E\mathcal{K})^2) \subset \sigma(A) \cap \overline{\Delta_0}$,

(γ) $\sigma(A \cap ((1 - E)\mathcal{K})^2) \subset \sigma(A) \setminus \Delta_0$.

По определению оператора A

$$\sigma(A) \cap (\Omega_2 \setminus \mathbb{R}) \text{ — конечное множество} \quad (2.6)$$

и

$$\sigma(A) \cap (\Omega_2 \setminus \mathbb{R}) \subset \sigma_{p, \text{norm}}(A); \quad (2.7)$$

здесь через $\sigma_{p, \text{norm}}(\cdot)$ обозначено множество нормальных собственных значений (см. [6, §1.2]). Из [2, теорема 2.4] следует существование открытого подмножества Δ_1 множества $\Omega_2 \cap \mathbb{R}$, являющегося объединением конечного числа открытых интервалов и такого, что $\Omega_3 \cap \mathbb{R} \subset \Delta_1$, $\overline{\Delta_1} \subset \Omega_2 \cap \mathbb{R}$, и самосопряженного проектора F в $\mathcal{K}$, порождающего разложение

$$\mathcal{K} = F\mathcal{K} + (1 - F)\mathcal{K},$$

приводящее B и обладающее свойствами (α), (β), (γ), упомянутыми выше, где E , A , Δ_0 заменены на F , B , Δ_1 . В частности, в Δ_1 нет точек сгущения не вещественного спектра оператора B . Отсюда, принимая во внимание (2.5)–(2.7) и хорошо известный результат теории компактных возмущений (см., например, [6, лемма I.5.2]), получаем, что множество

$$\sigma' := (\overline{\Omega_3} \setminus \mathbb{R}) \cap \sigma(B)$$

конечно и содержится в $\sigma_{p,\text{norm}}(B)$. Поэтому соответствующий проектор Рисса–Данфорда $\widehat{F}$, являющийся самосопряженным, имеет конечный ранг.

Поскольку $(F + \widehat{F})\mathcal{H}$ — пространство Понтрягина с конечным рангом отрицательности, оператор-функция

$$\mathbb{C} \setminus (\overline{\Delta_1} \cup \sigma') \ni z \mapsto (B - z)^{-1}(F + \widehat{F})$$

принадлежит $N_\kappa(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ при некотором $\kappa \geq 0$. Следовательно,

$$(z \mapsto (B - z)^{-1}) \in N(\Omega_3, \mathcal{L}(\mathcal{H})). \quad (2.8)$$

Если $z \in (\Omega_3 \setminus \mathbb{R}) \cap \rho(A) \cap \rho(B)$, то из (2.5) вытекает следующее соотношение:

$$\begin{aligned} L(z) &:= (1 - (z - i)(A - i)^{-1})(B - z)^{-1}(1 - (z + i)(A + i)^{-1}) \\ &\quad + z(A - i)^{-1}(A + i)^{-1} - \frac{1}{2}((A - i)^{-1} + (A + i)^{-1}) \\ &= (1 - (z - i)(A - i)^{-1})\Gamma_z(-G(z)^{-1})\Gamma_z^+(1 - (z + i)(A + i)^{-1}) \\ &= \Gamma(-G(z)^{-1})\Gamma^+. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Обозначим через Γ' отображение $x \mapsto \Gamma x$, рассматриваемое как оператор в $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \text{ran } \Gamma)$. Пусть $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \text{ran } \Gamma)$ — такой оператор, что $Px = x$, $x \in \text{ran } \Gamma$. Тогда $P\Gamma = \Gamma'$, и, учитывая (2.3), получаем

$$\Gamma'^{-1}PL(z)(\Gamma'^{-1}P)^+ = \Gamma'^{-1}P\Gamma(-G(z)^{-1})\Gamma^+(\Gamma'^{-1}P)^+ = -G(z)^{-1}. \quad (2.10)$$

Из соотношений (2.8)–(2.10), предложения 1.7 и теоремы 1.8 следует включение $-G^{-1} \in N^{n \times n}(\Omega_3)$. Поскольку Ω_3 может быть выбрано так, чтобы оно содержало произвольное заданное компактное подмножество из Ω , теорема доказана. $\square$

Замечание 2.4. Пусть F — обобщенная неванлинновская функция; тогда $-F^{-1}$ также является обобщенной неванлинновской функцией и обе они допускают представление (0.1). В работе [17, предложение 2.1] приведена конструкция, позволяющая выразить эти представления одно через другое. Следует отметить, что это построение может быть распространено на более широкий класс оператор-функций и использовано при альтернативном доказательстве второй части теоремы 2.3.

Теорема 2.5. Пусть $G \in D^{n \times n}(\Omega)$ и $\det G(z) \not\equiv 0$ на области голоморфности функции G . Тогда $-G^{-1} \in D^{n \times n}(\Omega)$.

Доказательство. Для дефинизируемой функции G , т.е. для случая, когда $\Omega = \overline{\mathbb{C}}$, утверждение справедливо в силу теоремы 2.2. Поэтому, как и при доказательстве теоремы 2.3, мы полагаем $\infty \notin \Omega$.

Пусть Ω' — ограниченная $\mathbb{R}$ -симметричная область в $\mathbb{C}$, такая, что открытые множества $\Omega' \cap \mathbb{C}^\pm$ односвязны и $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Запишем G в виде $G = G_0 + G_{(0)}$, где G_0 — дефинизируемая функция для G , а $G_{(0)}$ голоморфна в Ω' . Пусть $g = g^*$ — дефинизирующая функция для G_0 , т.е. gG_0 имеет вид $N + P$, где N — функция Неванлинны и P — рациональная матричная функция. Тогда $gG = N + P + G_{(0)} \in N^{n \times n}(\Omega')$ и по теореме 2.3 имеем $-g^{-1}G^{-1} \in N^{n \times n}(\Omega')$. Так как $N^{n \times n}(\Omega') \subset D^{n \times n}(\Omega')$, из теоремы 1.8 получаем, что $-G^{-1} \in D^{n \times n}(\Omega')$. Поскольку множество Ω' может быть выбрано так, чтобы оно содержало заданное компактное подмножество множества Ω , теорема доказана. $\square$

§3. Приложение к абстрактной граничной задаче с собственным параметром в граничных условиях

Пусть $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ — сепарабельное пространство Крейна, и пусть S — плотно заданный замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, допускающий самосопряженные расширения, и A' — одно из них. Предположим, что

$$\dim \mathcal{D}(A')/\mathcal{D}(S) =: n < \infty. \quad (3.1)$$

Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ — граничная тройка для S^+ (см., например, [3]), т.е. $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство с $\dim \mathcal{H} = n$ и Γ_0, Γ_1 — линейные отображения из $\mathcal{D}(S^+)$ в $\mathcal{H}$, такие, что $f \mapsto \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} =: \Gamma f$ сюръективно отображает $\mathcal{D}(S^+)$ на $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ и

$$[S^+ f, g] - [f, S^+ g] = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \mathcal{D}(S^+). \quad (3.2)$$

Предположим, что множество регулярных точек самосопряженного расширения $A_0 := S^+|_{\ker \Gamma_0}$ оператора S непусто. Оператор $A_1 := S^+|_{\ker \Gamma_1}$ — также самосопряженное расширение оператора S . Соотношение (3.2) влечет за собой непрерывность отображений Γ_0 и Γ_1 относительно топологии графика на $\mathcal{D}(S^+)$. Пусть $z \in \rho(A_0)$. Положим $\mathcal{N}_z := \ker(S^+ - z)$. Тогда Γ_0 отображает $\mathcal{N}_z$ биективно на $\mathcal{H}$. Пусть $\gamma(z)$ обозначает обратное к $\Gamma_0|_{\mathcal{N}_z}$ отображение, рассматриваемое как оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathfrak{H}$, и пусть Q — функция Вейля граничной тройки $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$:

$$Q(z) = \Gamma_1 \gamma(z). \quad (3.3)$$

Тогда для $z_1, z_2 \in \rho(A_0)$

$$\gamma(z_2) = (1 + (z_2 - z_1)(A_0 - z_2)^{-1})\gamma(z_1)$$

и

$$Q(z_1) - Q(z_2)^* = (z_1 - \bar{z}_2)\gamma(z_2)^+ \gamma(z_1).$$

Пусть Ω то же, что в §1, и предположим, что $\infty \notin \Omega$. Пусть задана функция $\tau \in M^{n \times n}(\Omega \setminus \overline{\mathbb{R}})$. Для всех $z \in P(\tau; \Omega)$ рассмотрим следующую «граничную задачу»: для заданного $h \in \mathfrak{H}$ найти $f \in \mathcal{D}(S^+)$, такой, что

$$(S^+ - z)f = h \quad \text{и} \quad \tau(z)\Gamma_0 f + \Gamma_1 f = 0. \quad (3.4)$$

Определение 3.1 (см. [4, определение 5]). Скажем, что $z \in P(\tau; \Omega)$ — *регулярная точка* задачи (3.4) и запишем $z \in \rho(S^+, \Gamma, \tau)$, если для каждого $h \in \mathfrak{H}$ задача (3.4) имеет единственное решение $f \in \mathcal{D}(S^+)$. В этом случае линейное отображение $h \mapsto f$ обозначим через $R(z)$.

По теореме о замкнутом графике $R(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при каждом $z \in P(\tau; \Omega)$.

Следующий хорошо известный результат описывает множество регулярных точек задачи (3.4), а также семейство $\{R(z)\}$ разрешающих операторов.

Предложение 3.2 [3]. Пусть $P(\tau; \Omega) \cap \rho(A_0) \neq \emptyset$ и $z_0 \in P(\tau; \Omega) \cap \rho(A_0)$. Тогда $z_0 \in \rho(S^+, \Gamma, \tau)$ в том и только том случае, когда $\det(\tau(z_0) + Q(z_0)) \neq 0$. Это влечет за собой открытость множества $\rho(S^+, \Gamma, \tau) \cap \rho(A_0)$. Если $z \in \rho(S^+, \Gamma, \tau) \cap \rho(A_0)$, то

$$R(z) = (A_0 - z)^{-1} - \gamma(z)(\tau(z) + Q(z))^{-1}\gamma(\bar{z})^+. \quad (3.5)$$

Теперь предположим, что функция τ локально дефинируема в Ω . Тогда из результатов §§1, 2 получаем следующую теорему.

Теорема 3.3. Пусть S — плотно определенный замкнутый симметрический оператор в пространстве Крейна $\mathfrak{H}$, имеющий самосопряженное расширение A' и удовлетворяющий условию (3.1). Предположим, что существует такая граничная тройка $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ для S^+ , что самосопряженное расширение A_0 оператора S , задаваемого соотношением $\mathcal{D}(A_0) = \ker \Gamma_0$, удовлетворяет условию

$$\sigma(A_0) \cap \Omega \subset \sigma_{p, \text{norm}}(A_0). \quad (3.6)$$

Пусть $\tau \in D^{n \times n}(\Omega)$, и предположим, что существует точка $z_0 \in P(\tau; \Omega) \cap \rho(A_0)$, которая является регулярной для задачи (3.4). Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) множество всех не вещественных точек голоморфности функции τ , не являющихся регулярными для (3.4), дискретно в $\Omega \setminus \mathbb{R}$, и в $\Omega \cap \mathbb{R}$ нет точек сгущения этого множества;

(2) для каждой области Ω' , $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, с теми же свойствами, что и у Ω , существуют такие пространство Крейна $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$, содержащее $\mathfrak{H}$ как подпространство Крейна, и самосопряженное линейное отношение B в $\mathfrak{K}$, локально дефинизируемое в Ω' , что

(i) $\Omega' \cap \rho(A_0) \cap \rho(S^+, \Gamma, \tau) \subset \rho(B)$,

(ii) если P — самосопряженный проектор в $\mathfrak{K}$ с $P\mathfrak{K} = \mathfrak{H}$, то

$$R(z) = P(B - z)^{-1}|_{\mathfrak{K}}, \quad z \in \Omega' \cap \rho(S^+, \Gamma, \tau),$$

(iii) если $E(\cdot, B)$ — локальная спектральная функция для B , то для каждого интервала Δ_0 , $\overline{\Delta_0} \subset \Omega' \cap \mathbb{R}$, такого, что проектор $E(\Delta_0, B)$ определен,

$$E(\Delta_0, B)\mathfrak{K} = \overline{\text{span}}\{(B - z)^{-1}E(\Delta_0, B)h : h \in \mathfrak{H}, z \in \rho(B)\}, \quad (3.7)$$

(iv) если $\tilde{\mathfrak{K}}, \tilde{B}$ — еще одна пара, обладающая теми же свойствами, что и $\mathfrak{K}$ и B , то для каждого Δ_0 из (iii), такого, что также определен проектор $E(\Delta_0, \tilde{B})$, существует такой плотно определенный изометрический оператор U из $E(\Delta_0, B)\mathfrak{K}$ в $E(\Delta_0, \tilde{B})\tilde{\mathfrak{K}}$ с плотной областью значений, что $U(B - \lambda)^{-1}x = (\tilde{B} - \lambda)^{-1}Ux$ при $\lambda \in \rho(B) \cap \rho(\tilde{B})$, $x \in E(\Delta_0, B)\mathfrak{K}$.

Доказательство. Из (3.6) следует, что функция Q является мероморфной в Ω . Отсюда в силу теоремы 1.8 имеем $\tau + Q \in D^{n \times n}(\Omega)$. По предположению и предложению 3.2 функция $z \mapsto \det(\tau(z) + Q(z))$ не равна тождественно нулю в $P(\tau; \Omega) \cap \rho(A_0)$. Следовательно, применима теорема 2.5 и потому $-(\tau + Q)^{-1} \in D^{n \times n}(\Omega)$. Отсюда вытекает, что предельные точки множества не вещественных нулей функции $z \mapsto \det(\tau(z) + Q(z))$, лежащих в $P(\tau; \Omega) \cap \rho(A_0)$, не могут принадлежать множеству $\Omega \cap \mathbb{R}$. Справедливость утверждения (1) теперь вытекает из предложения 3.2.

Без ограничения общности можно предположить, что $i, -i \in \Omega'$ для области Ω' , удовлетворяющей предположениям п. (2). Это не является ограничением. Так как в силу (3.6) функции $z \mapsto (A_0 - z)^{-1}$ и $z \mapsto \gamma(\bar{z})^+$ мероморфны в Ω , то по теореме 1.8 функция R принадлежит $D(\Omega, \mathcal{L}(\mathfrak{H}))$ (см. (3.5)). По той же теореме функция $z \mapsto z + (1 + z^2)R(z)$ принадлежит $D(\Omega, \mathcal{L}(\mathfrak{H}))$. Тогда из [11, теорема 3.8] следует существование таких пространства Крейна $\mathfrak{K}$, самосопряженного линейного отношения B в $\mathfrak{K}$, являющегося локально дефинизируемым в Ω' ,

оператора $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ и ограниченного самосопряженного оператора S в $\mathfrak{H}$, что имеет место (i) и при $z \in \Omega' \cap \rho(A_0) \cap \rho(S^+, \Gamma, \tau)$

$$z + (1 + z^2)R(z) = S + \Lambda^+(z + (1 + z^2)(B - z)^{-1})\Lambda, \quad (3.8)$$

а также справедливо утверждение (iii), где равенство (3.7) заменено на

$$E(\Delta_0, B)\mathfrak{K} = \overline{\text{span}}\{(B - z)^{-1}E(\Delta_0, B)\Lambda h : h \in \mathfrak{H}, z \in \rho(B)\}.$$

Если в (3.8) положить $z = i$, то получим $S = 0$ и $\Lambda^+\Lambda = I$. Поэтому Λ — изометрия из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$ и $\Lambda\Lambda^+ =: P$ — самосопряженный проектор в $\mathfrak{K}$ с $P\mathfrak{K} = \Lambda\mathfrak{H}$. Для доказательства п. (2) достаточно отождествить $\Lambda\mathfrak{H}$ с $\mathfrak{H}$ и к (iv) применить [11, теорема 3.6]. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
- [2] J. Behrndt, P. Jonas, *On compact perturbations of locally definitizable selfadjoint relations in Krein spaces*, Integral Equations Operator Theory, **52**:1 (2005), 17–44.
- [3] V. Derkach, *On Weyl function and generalized resolvents of a Hermitian operator in a Krein space*, Integral Equations Operator Theory, **23**:4 (1995), 387–415.
- [4] V. Derkach, M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps*, J. Funct. Anal., **95**:1 (1991), 1–95.
- [5] A. Dijksma, H. Langer, H. S. V. de Snoo, *Eigenvalues and pole functions of Hamiltonian systems with eigenvalue depending boundary conditions*, Math. Nachr., **161**:1 (1993), 107–154.
- [6] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [7] P. Jonas, *A note on perturbations of selfadjoint operators in Krein spaces*, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 43, Birkhäuser, Basel, 1990, 229–235.
- [8] P. Jonas, *A class of operator-valued meromorphic functions on the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **17**:2 (1992), 257–284.
- [9] P. Jonas, *Operator representations of definitizable functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **25**:1 (2000), 41–72.
- [10] P. Jonas, *On locally definite operators in Krein spaces*, in: Spectral Theory and its Appl., Ion Colojoară Anniversary Volume, Theta, Bucharest, 2003, 95–127.
- [11] P. Jonas, *On operator representations of locally definitizable functions*, Preprint, Reihe Mathematik Nr. 2005/20, TU Berlin, 2005.
- [12] G. Köthe, *Topologische lineare Räume. I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 107, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1960.
- [13] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, *О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ* , Функц. анализ и его прил., **5**:2 (1971), 59–71; **5**:3 (1971), 54–69.
- [14] М. Г. Крейн, H. Langer, *Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Räume Π_κ zusammenhängen*, Math. Nachr., **77**:1 (1977), 187–236.
- [15] М. Г. Крейн, H. Langer, *Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ* , Acta Sci. Math., **43**:1–2 (1981), 181–205.
- [16] М. Г. Крейн, H. Langer, *Über die Q -Funktion eines π -hermiteschen Operators im Räume Π_κ* , Acta Sci. Math., **34** (1973), 191–230.
- [17] A. Luger, *A factorization of regular generalized Nevanlinna functions*, Integral Equations Operator Theory, **43**:3 (2002), 326–345.

- [18] B. Sz.-Nagy, A. Korányi, *Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie*, Acta Math., **100**:3–4 (1958), 171–202.
- [19] Ю. Л. Шмультян, *Об операторных R -функциях*, Сиб. матем. ж., **2** (1971), 442–451.

Воронежский государственный университет

e-mail: azizov@math.vsu.ru

Технический университет г. Берлин

e-mail: jonas@math.TU-Berlin.de

Поступило в редакцию

15 сентября 2005 г.