Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Дужин, М. В. Карев, Определение ориентации струнных зацеплений при помощи инвариантов конечного типа, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 3, 48–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:20:36

Определение ориентации струнных зацеплений при помощи инвариантов конечного типа*

© 2007. С. В. Дужин, М. В. Карев

§1. Введение

Хорошо известно, что классические инвариантные полиномы (Джонса, HOMFLY и т. д.) и вообще квантовые инварианты узлов принимают одинаковые значения на узлах, отличающихся ориентацией. Класс инвариантов Васильева строго шире [16], и вопрос о том, могут ли инварианты Васильева различать ориентацию, по сей день не решен. В этой работе мы изучаем соответствующую проблему для зацеплений с более чем одной компонентой.

Пусть S_p^1 — дизъюнктное объединение p пронумерованных экземпляров ориентированной окружности, $\mathbb{R}_p^1$ — дизъюнктное объединение p пронумерованных экземпляров вещественной прямой, а I_p^1 — дизъюнктное объединение p пронумерованных ориентированных отрезков $[0, 1]$.

Определение. Назовем *замкнутым p -компонентным зацеплением* гладкое вложение многообразия S_p^1 в ориентированное трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, рассматриваемое с точностью до изотопии, сохраняющей компоненты.

Длинным p -компонентным зацеплением называется гладкое вложение многообразия R_p^1 в ориентированное трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с фиксированной асимптотикой на бесконечности: $x_i(t) = [i, 0, t]$ при $|t| > C$, рассматриваемое с точностью до изотопии, тождественной вне шара достаточно большого радиуса, и евклидова движения пространства.

Струнным p -компонентным зацеплением назовем гладкое вложение многообразия I_p^1 в полосу $\mathbb{R}^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ с закрепленными концами: $x_i(t) = [i, 0, t]$ для $t = 0, 1$, рассматриваемое с точностью до изотопии, тождественной на границе, и евклидова движения пространства.

Замкнутое
зацепление

Длинное
зацепление

Струнное
зацепление

*Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-01012, РФФИ 05-01-00899, НШ-1972.2003.1, 06-01-72551-НЦНИЛ.

Очевидно, что теории длинных и струнных зацеплений эквивалентны. В случае узлов ($p = 1$) обе эти теории также эквивалентны теории замкнутых зацеплений, но это становится неверным в случае $p > 1$.

Вопрос об обратимости в этом случае ставится следующим образом. Пусть L — некоторое зацепление и L' — его обращение, т. е. то же зацепление с той же нумерацией компонент, но с противоположной ориентацией. Зацепление L называется обратимым, если L и L' эквивалентны. Существуют ли необратимые зацепления? Если ответ утвердителен, то какие инварианты могут их различать?

В случае узлов этот вопрос оставался нерешенным долгое время, пока Троттер [14] в 1964 г. не доказал необратимость некоторых узлов (например, крендельного узла $P_{3,5,7}$). Простейшим необратимым узлом является узел 8_{17} ([8]). Инварианты, использованные в работах [14], [8] и др. для доказательства неэквивалентности узла своему обратному, довольно сложны, и до сих пор не известно, можно ли различить какую-то пару взаимно обратных узлов при помощи инвариантов конечного типа.

В случае зацеплений единственным опубликованным результатом по данной проблеме является теорема Лина [11], которая утверждает, что инварианты Васильева различают ориентацию замкнутых зацеплений с шестью или более компонентами. Имеется еще несколько работ, имеющих к этой задаче лишь косвенное отношение, например, Бар-Натан в [2] изучает *гомотопические* инварианты струнных зацеплений, а Лин [10] и Фидлер [7] используют классы инвариантов, отличные от классических инвариантов конечного типа.

Настоящая статья посвящена вопросу определения ориентации с помощью инвариантов конечного типа для *струнных* (или длинных) зацеплений. Переформулировка проблемы в терминах хордовых диаграмм немедленно показывает, что это возможно для числа нитей $p > 2$. В случае двухкомпонентных зацеплений ($p = 2$) вопрос нетривиален; ниже мы даем доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Существует инвариант Васильева f порядка, не превосходящего 7, и двухкомпонентное струнное зацепление L , такие, что $f(L') \neq f(L)$.*

Мы дадим два доказательства этой теоремы. Оба будут основаны на прямых вычислениях. Первое доказательство (§§ 2, 3, предложение 1) использует хордовые диаграммы и требует привлечения компьютерного счета. Второе (§§ 4, 5, предложение 2) использует диаграммы Якоби; необходимые для него вычисления выполняются вручную. Оба доказательства на самом деле относятся к *оснащенным* зацеплениям, но в § 6 мы покажем, каким образом результат переносится на неоснащенный случай, что и завершит доказательство теоремы.

Вопрос об обращении ориентации струнных p -компонентных зацеплений на уровне инвариантов конечного типа тесно связан с вопросом о коммутативности алгебры $\mathcal{A}(p)$ хордовых диаграмм на p нитях. А именно, некоммутативность алгебры $\mathcal{A}(p)$ влечет за собой существование элементов, неинвариантных относительно замены ориентации. В самом деле, операция замены ориентации τ (см. ниже) является антиавтоморфизмом. Если предположить симметричность всех элементов из $\mathcal{A}(p)$, то мы бы получили, что $xy = \tau(xy) = \tau(y)\tau(x) = yx$ для любых $x, y \in \mathcal{A}(p)$. (Мы признательны рецензенту, обратившему наше внимание на это рассуждение.)

Некоммутативность алгебры $\mathcal{A}(p)$ при $p > 2$ очевидна, а при $p = 2$, хотя и считалась известной как фольклорный факт, но нигде до сих пор не была доказана. Предложение 1 настоящей работы содержит, в частности, первое строгое доказательство этого утверждения.

§2. Сведение к хордовым диаграммам

Инварианты конечного типа для различных типов зацеплений определяются так же, как и в классическом случае узлов, см. [1], [6].

Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики 0, например $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{C}$. Обозначим через $V_n(p)$ пространство $\mathbb{F}$ -значных инвариантов Васильева для длинных p -компонентных зацеплений степени не более чем n , через $\mathcal{A}_n(p)$ пространство, порожденное хордовыми диаграммами степени n на p нитях с точностью до четырехчленных соотношений (см. [6], [13]), и через $W_n(p) = \mathcal{A}_n^*(p) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}_n(p), \mathbb{F})$ соответствующее пространство *весовых систем*. Существует линейное отображение $\sigma_n^p: V_n(p) \rightarrow W_n(p)$ (взятие *символа* инварианта Васильева), ядро которого совпадает с $V_{n-1}(p)$, а образ состоит из весовых систем, обращающихся в 0 на хордовых диаграммах с изолированными хордами. (Для случая оснащенных зацеплений образ совпадает с $W_n(p)$.) Через $\mathcal{A}(p)$ мы обозначаем прямую сумму пространств $\mathcal{A}_n(p)$ по всем $n \geq 0$. Пространство $\mathcal{A}(p)$ образует градуированную алгебру (умножение — конкатенация диаграмм).

Как и прежде, обозначим через L' обращение зацепления L . Полагая $\tau_V(f)(L) = f(L')$ для $f \in V$, мы получаем инволюцию τ_V пространства инвариантов Васильева. В терминах хордовых диаграмм соответствующая операция τ_A действует так:

т. е. она меняет ориентацию всех компонент носителя хордовой диаграммы, или, что то же самое, отражает изображенную в плоскости диаграмму относительно горизонтальной линии, если считать, что компоненты носителя ориентированы вертикально (ориентация компонент при этом сохраняется).

То же самое пространство $\mathcal{A}(p)$ можно получить как линейную оболочку всех *обобщенных* хордовых диаграмм, т. е. 1-3-валентных графов, одновалентные вершины которых отождествлены с точками на многообразии $\mathbb{R}_p^1$, с циклическим порядком полуребер, сходящихся в каждой трехвалентной вершине.

Обобщенные хордовые диаграммы понимаются как линейные комбинации обычных хордовых диаграмм, получаемые применением STU-соотношений следующего вида (подробнее см. [1])

(На рисунках здесь и ниже используется такое соглашение: в каждой трехвалентной вершине ребра упорядочены против часовой стрелки.)

Для обобщенных хордовых диаграмм определение инволюции τ_A несколько усложняется. Распространение операции τ_A на обобщенные хордовые диаграммы посредством соотношений STU приводит к следующему правилу:

т. е. необходимо поменять ориентацию на каждой компоненте носителя и умножить результат на ± 1 в зависимости от четности числа трехвалентных вершин, или, что то же самое, просто отразить плоское изображение диаграммы относительно горизонтальной прямой, не меняя ориентации носителя.

Лемма 1. Инволюция τ_A есть градуированный аналог инволюции τ_V , т. е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} V_n(p) & \xrightarrow{\sigma_n^p} & W_n(p) \\ \downarrow \tau_V & & \downarrow \tau_A^* \\ V_n(p) & \xrightarrow{\sigma_n^p} & W_n(p) \end{array}$$

Доказательство. Для обычных хордовых диаграмм это немедленно следует из определения отображения σ ([1], [6]). Распространение на обобщенные хордовые диаграммы происходит, как объяснено выше. $\square$

Проблема существования необратимых струнных зацеплений с помощью инвариантов конечного типа преобразуется в следующую: существует ли хордовая диаграмма на p нитях, не эквивалентная своей обратной по модулю четырехчленных соотношений. При $p \geq 3$ соответствующий пример легко построить:

При $p = 2$ проблема нетривиальна, поскольку, как легко убедиться, хордовые диаграммы малых степеней (например, диаграммы в первом отображении в настоящем параграфе) все τ_A -инвариантны. В следующем параграфе мы предъядим диаграмму, не являющуюся τ_A -инвариантной.

§ 3. Первое доказательство теоремы

Для того чтобы доказать, что некоторый элемент пространства $\mathcal{A}(p)$ отличен от нуля, естественно использовать весовые системы, т. е. линейные функционалы на этом пространстве. Одной из наиболее часто применяемых весовых систем является гомоморфизм Концевича $\varphi = \varphi_{\mathfrak{g}}: \mathcal{A}(p) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes p}$, который строится по метризованной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (см. [9], [6]). В действительности φ принимает значения в $\mathfrak{g}$ -инвариантной подалгебре $U(p) = [U(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$. Мы дадим

описание действия этой весовой системы для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$, используя стандартный базис e_{ij} (матрица с 1 на месте (i, j) и остальными нулями) и метрику, определенную правилом сопряжения $e_{ij}^* = e_{ji}$.

Лемма 2. Пусть $D \in \mathcal{A}(p)$ — (обобщенная) хордовая диаграмма на p нитях. Элемент $\varphi(D) \in U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ может быть получен следующей процедурой. Возьмем альтернированную сумму по всем возможным вариантам разрешения [1] внутренних тройных точек диаграммы D . Для каждого варианта разрешения необходимо обозначить компоненты связности полученной диаграммы различными независимыми индексами, затем заменить каждую пару сходящихся индексов на e_{ij} и взять сумму по всем встречающимся индексам от 1 до N . (Если встречаются замкнутые компоненты, то они переходят в умножение на N .)

Доказательство этой леммы в точности повторяет аналогичное для случая $p = 1$, которое можно найти в [1], [6]. Приведем лишь пример:

Следовательно, образ этой диаграммы при применении к ней весовой системы φ равен

$$\sum_{i,j,k,l=1}^N (e_{ij}e_{jk} \otimes e_{li}e_{kl} - e_{ij}e_{kl} \otimes e_{li}e_{jk} - e_{ij}e_{kl} \otimes e_{jk}e_{li} + e_{ij}e_{ki} \otimes e_{jl}e_{lk}).$$

Заметим, что порядок сомножителей e_{ij} согласуется с ориентацией каждой из компонент носителя, но порядок индексов i, j соответствует «правилу обхода по кругу» (в нашем случае это снизу вверх на левой компоненте и сверху вниз на правой).

Обозначим через τ_U оператор на $U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$, который обращает порядок сомножителей в каждом из мономов и меняет местами индексы у каждого базисного элемента e_{ij} , например $\tau_U(e_{12}e_{23} \otimes e_{13}e_{24}) = e_{32}e_{21} \otimes e_{42}e_{31}$. Этот оператор является инволюцией, сохраняющей ad -инвариантную часть $U(p) = [U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$.

Следующая лемма непосредственно вытекает из конструкции отображения φ .

Лемма 3. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(p) & \xrightarrow{\varphi} & U(p) \\ \downarrow \tau_A & & \downarrow \tau_U \\ \mathcal{A}(p) & \xrightarrow{\varphi} & U(p) \end{array}$$

коммутативна.

Из этой леммы следует, что необратимость хордовой диаграммы может быть замечена на уровне универсальной обертывающей алгебры: если φ -образ диаграммы не τ_U -инвариантен, то и сама диаграмма не инварианта относительно τ_A . Таким образом, следующее предложение доказывает сформулированную в §1 теорему.

Предложение 1. *Каждая из приведенных ниже диаграмм не эквивалентна своему образу при применении инволюции τ_A :*

Доказательство. Вычисленные с помощью компьютера φ -образы диаграмм и их обращений различны, если в качестве алгебры Ли брать $\mathfrak{gl}_4$ (и, следовательно, любую алгебру $\mathfrak{gl}_N$ с $N \geq 4$).

Вычисления проводились так: фиксируем лексикографический порядок на множестве базисных элементов e_{ij} и преобразуем выражение для $\varphi(D)$, полученное по изложенному выше алгоритму, с использованием коммутационных соотношений так, чтобы порядок сомножителей в каждом из мономов становился лексикографическим. Программы, использованные для расчетов, а также входные и выходные данные имеются на интернет-странице [5]. Например, образ диаграммы, изображенной слева, состоит из 58378 слагаемых; его вычисление занимает несколько часов с использованием современного компьютера средней мощности. Поскольку эта диаграмма является произведением двух τ -симметричных диаграмм, мы заодно доказали некоммутативность алгебры $\mathcal{A}(2)$. $\square$

§4. Сведение к диаграммам Якоби

Другая, пожалуй, более простая переформулировка проблемы обратимости может быть дана в терминах *крашенных диаграмм Якоби*. Крашенная диаграмма Якоби — это почти то же самое, что и *китайский иероглиф*, определенный в [1], за исключением того, что ее одновалентные вершины помечены одним из p цветов. *Пространство* крашенных диаграмм Якоби определяется как линейное пространство $\mathcal{B}(p)$, формально порожденное всеми p -цветными диаграммами Якоби и профакторизованное по соотношениям антисимметрии и ИНХ (см. [1], [6]).

По аналогии с теоремой 8 из [1] можно доказать, что отображение симметризации $\chi: \mathcal{B}(p) \rightarrow \mathcal{A}(p)$ является линейным изоморфизмом двух векторных пространств (см. также [12]).

Конструкцию отображения χ мы объясним на примере $p = 2$. Пусть D — диаграмма Якоби с k «ногами» цвета 1 и l «ногами» цвета 2. Тогда $\chi(D)$ будет средним по всем $k!l!$ способам прикрепления ног цвета 1 к первой компоненте носителя и ног цвета 2 ко второй; например,

$$\begin{array}{c} \bullet^2 \quad \bullet^2 \\ | \quad | \\ \bullet^1 \quad \bullet^1 \end{array} \mapsto \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$$

Крашенные диаграммы Якоби можно рассматривать как симметрические элементы пространства $\mathcal{A}(p)$ — ровно в том же смысле, в котором полиномы на

пространстве $\mathfrak{g}^*$ отождествляются с симметрическими элементами универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ в силу теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

Изоморфизм χ чрезвычайно полезен для наших нужд, поскольку инволюция τ_A , перенесенная в $\mathcal{B}(p)$ с его помощью, в терминах диаграмм Якоби приобретает особенно простой вид. А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $\tau_B: \mathcal{B}(p) \rightarrow \mathcal{B}(p)$ — линейный оператор, тождественный на всех диаграммах Якоби с четным числом ног и умножающий на -1 каждую диаграмму с нечетным числом ног. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(p) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{A}(p) \\ \downarrow \tau_B & & \downarrow \tau_A \\ \mathcal{B}(p) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{A}(p) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Этот факт очевидным образом вытекает из определений отображений τ_A и τ_B , данных выше. Приведем простой пример, иллюстрирующий ход рассуждений. Пусть

$$D = \begin{array}{c} \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} 1 \end{array}$$

Тогда по определению

$$\tau_B(D) = - \begin{array}{c} \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} 1 \end{array}$$

Далее,

$$\chi(D) = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} 1 \\ \downarrow \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} 1 \\ \downarrow \end{array}$$

и, следовательно,

$$\tau_A(\chi(D)) = -\frac{1}{2} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} 1 \\ \downarrow \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} 1 \\ \downarrow \end{array} = -\frac{1}{2} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} 1 \\ \downarrow \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} 1 \\ \downarrow \end{array} = \chi(\tau_B(D)). \quad \square$$

Проблема обратимости 2-компонентных струнных зацеплений с учетом приведенной выше леммы переформулируется таким образом: *существует ли ненулевая двухцветная диаграмма Якоби с нечетным числом ног?* В следующем параграфе мы приведем пример такой диаграммы.

§5. Второе доказательство теоремы

Возьмем метризованную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и обозначим через $S(\mathfrak{g})$ симметрическую алгебру векторного пространства $\mathfrak{g}$. Конструкция весовой системы $\mathcal{B}(1) \rightarrow$

$S(\mathfrak{g})$, описанная в [1], [6], допускает обобщение на случай произвольного значения p , позволяя получить гомоморфизм $\psi: \mathcal{B}(p) \rightarrow S(\mathfrak{g})^{\otimes p}$, образ которого лежит в $\mathfrak{g}$ -инвариантной подалгебре p -й симметрической степени $S(p) = [S(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$.

Лемма 5. *Отображение ψ делает коммутативной следующую диаграмму:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(p) & \xrightarrow{\psi} & S(p) \\ \downarrow \chi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{A}(p) & \xrightarrow{\varphi} & U(p) \end{array}$$

где χ — изоморфизм, определенный в предыдущем параграфе, φ — весовая система Концевича для алгебры $\mathcal{A}(p)$, а π есть p -я тензорная степень изоморфизма Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

Доказательство. Доказательство полностью повторяет соответствующее доказательство для случая $p = 1$. $\square$

Для случая алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ существует графический алгоритм нахождения ψ -образа, аналогичный процедуре применения оператора φ , описанной в §3. Единственное отличие состоит в том, что теперь базисные элементы e_{ij} коммутируют, и мы можем не заботиться о порядке сомножителей в мономах. Приведем пример:

$$\begin{aligned} \psi : \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 1 \text{---} \bullet \text{---} 2 \end{array} & \longmapsto \begin{array}{c} j \quad i \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \\ // \quad // \\ i \quad k \quad k \quad i \end{array} - \begin{array}{c} j \quad i \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \\ // \quad // \\ k \quad i \quad j \quad k \end{array} \\ & \longmapsto \sum_{i,j,k=1}^N (e_{jk} \otimes e_{ij}e_{ki} - e_{ki} \otimes e_{ij}e_{jk}) = 0. \end{aligned}$$

Преимущество отображения ψ состоит в том, что $\mathfrak{g}$ -инвариантная часть пространства $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ обладает более прозрачной структурой по сравнению с $U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$. Назовем p -цветным ожерельем порядка n комбинаторный объект, определенный как последовательность из n чисел от 1 до p , рассматриваемая с точностью до циклических перестановок членов последовательности; визуализацией этого объекта являются расположенные на ориентированной окружности n бусин p цветов. Каждому ожерелью можно сопоставить ад-инвариантный элемент из $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ следующим образом. Сопоставим каждой дуге ожерелья свой переменный индекс (i, j и т. д.), каждой бусине сопоставим элемент e_{ij} , где i — индекс на входящей дуге, а j — индекс на выходящей, и поставим элемент e_{ij} в тензорный сомножитель, номер которого совпадает с номером цвета соответствующей бусины. Эти элементы перемножим, а потом просуммируем по всем встречающимся индексам от 1 до N . Например:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} j \quad i \\ \circ \quad \bullet \\ | \quad | \\ k \quad l \end{array} \longmapsto \sum_{i,j,k,l=1}^N (e_{ij}e_{kl} \otimes e_{jk}e_{li}) =: x_{1212}.$$

Здесь и ниже мы обозначаем элемент пространства $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$, отвечающий какому-то ожерелью, через x_μ , где μ — последовательность цветов, лексикографически наименьшая среди всех циклических сдвигов.

Лемма 6. *В случае алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ $\mathfrak{g}$ -инвариантная часть пространства $S(\mathfrak{g})^{\otimes p}$ совпадает с алгеброй, порожденной всеми ожерельями. Алгебраические соотношения между элементами могут иметь место при малых N , но исчезают при $N \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Утверждения, близкие по формулировке к этой лемме, доказаны в [17] и [15]. Данное утверждение из них легко выводится. $\square$

Замечание. Весовую систему со значениями в алгебре ожерелий можно определить непосредственно, не апеллируя к алгебрам Ли. Мы собираемся написать об этом в отдельной публикации.

В алгебре, порожденной ожерельями, существует инволюция τ_S , обращающая ориентацию каждого ожерелья. Для двухцветных ожерелий она действует тождественно вплоть до порядка 5; ожерелье наименьшего порядка, не инвариантное относительно τ_S , есть x_{112122} . Оказывается, что операция τ_S согласуется со всеми остальными операциями обращения, обозначенными выше буквой τ с различными индексами.

Лемма 7. *Инволюции изменения ориентации в пространствах $\mathcal{A}(p)$, $\mathcal{B}(p)$, $S(p)$ и $U(p)$ коммутируют с четырьмя стрелками диаграммы в лемме 5. Точнее, имеет место коммутативный куб*

(напомним, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$, $S(p) = [S(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$ и $U(p) = [U(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$; все отображения были определены выше, в частности, π — это изоморфизм Пуанкаре–Биркгофа–Витта).

Доказательство. На самом деле, единственное, что еще не было доказано — это коммутативность верхней грани куба. Поскольку все вертикальные стрелки — изоморфизмы, этот факт вытекает из коммутативности остальных пяти граней, которая была доказана ранее в различных местах статьи. $\square$

В силу коммутативности верхней грани куба для доказательства не- τ_B -инвариантности какой-то диаграммы Якоби (элемента пространства $\mathcal{B}(p)$) достаточно показать не- τ_S -инвариантность его ψ -образа в алгебре ожерелий. Поскольку минимальный порядок необратимого ожерелья равен 6, а мы хотим найти необратимую диаграмму с нечетным числом ног, это число должно быть

не менее 7. Оказывается, что существует ненулевая диаграмма, имеющая ровно 7 ног, и это дает второе доказательство теоремы.

Предложение 2. Следующая диаграмма отлична от 0 как элемент пространства $\mathcal{B}(2)$:

Доказательство. Прямое вычисление показывает, что образ этой диаграммы в алгебре $S(2)$ (для достаточно большого N), выраженный через ожерелья, равен

$$N(x_{1121222} - x_{1122212}) + 3x_2(x_{112212} - x_{112122}),$$

т. е. отличен от 0. Выражение для $\psi(H)$ содержит 128 слагаемых (по числу 2^7 разрешений трехвалентных вершин), из которых только 8 содержат необратимые ожерелья, например

Этот результат также может быть получен с помощью компьютерной программы, которую можно найти на интернет-странице [5]. $\square$

Замечание 1. Диаграмма H была впервые обнаружена Д. Бар-Натаном: она фигурирует в файле `table.m` на его веб-сайте (см. [3]) как один из базисных элементов пространства двухцветных диаграмм. Однако в препринте [3], содержащем комментарии к этой таблице, сказано, что программа, при помощи которой она была получена, не готова к публикации по причине ее «запутанности» и ввиду некоторых недостатков в алгоритме.

Замечание 2. Из той же таблицы следует, что 7 — минимальная степень инварианта Васильева, способного различать ориентацию 2-компонентных струнных зацеплений. Необходимые для проверки вычисления можно провести вручную.

§6. Переход к неоснащенному случаю

Как упоминалось во введении, результаты, полученные в §§3 и 5, на самом деле относятся к оснащенным зацеплениям, поскольку мы не принимали во внимание одночленные соотношения. Вообще говоря, определение ориентации оснащенного зацепления является более простой задачей, поскольку в теории с

оснащениями есть дополнительная структура, которая (в принципе) может менять свои свойства при обращении. В этом параграфе мы докажем, что основная теорема остается верной и в случае обычных (неоснащенных) зацеплений.

Действительно, обозначим через $\mathcal{A}'(2)$ фактор пространства $\mathcal{A}(2)$ по одночленным соотношениям, т. е. по идеалу, порожденному диаграммами a_1 (одна хорда, прикрепленная к первой компоненте носителя) и a_2 (соответственно одна хорда на второй компоненте носителя): $\mathcal{A}'(2) = \mathcal{A}(2)/\langle a_1, a_2 \rangle$, где угловые скобки обозначают двусторонний идеал с указанными в них образующими. Факторалгебра $\mathcal{A}'(2)$ может быть вложена в $\mathcal{A}(2)$ как подалгебра: по структурной теореме для кокоммутативных алгебр Хопфа алгебра $\mathcal{A}(2)$ является универсальной обертывающей алгебры Ли своих примитивных элементов P . Поэтому, если мы возьмем подпространство в P , порожденное всеми примитивными диаграммами, за исключением a_1 и a_2 , мы получим вложение $\mathcal{A}'(2) \subset \mathcal{A}(2)$. Поскольку диаграммы, фигурирующие в предложении 1, принадлежат этому подпространству, мы заключаем, что необратимость имеет место и для неоснащенных зацеплений.

Покажем теперь, что второе доказательство (§5) также проходит в неоснащенном случае. Пусть $\chi: \mathcal{A}(2) \rightarrow \mathcal{B}(2)$ — определенный выше изоморфизм.

Лемма 8. *Подпространство $\chi^{-1}(\mathcal{A}'(2)) = \mathcal{B}'(2)$ совпадает с подалгеброй в $\mathcal{B}(2)$, порожденной всеми связными диаграммами Якоби, за исключением $b_1 = \text{---}\overset{1}{\bullet}\text{---}\overset{1}{\bullet}$ и $b_2 = \text{---}\overset{2}{\bullet}\text{---}\overset{2}{\bullet}$.*

Доказательство. Этот факт не вполне очевиден по той причине, что изоморфизм линейных пространств χ не является гомоморфизмом алгебр, а подалгебры $\mathcal{A}'(2)$ и $\mathcal{B}'(2)$ определяются своими образующими в смысле разных операций умножения. Тем не менее легко усмотреть непосредственно, что χ -образ диаграммы Якоби, отличной от b_1 и b_2 , является линейной комбинацией произведений связных хордовых диаграмм, отличных от a_1 и a_2 . $\square$

Лемма показывает, что семиногая диаграмма H , фигурирующая в предложении 2, является элементом подалгебры $\mathcal{B}'(2)$, ответственной за инварианты Васильева неоснащенных длинных зацеплений. Поскольку эта диаграмма не равна 0, существование инварианта седьмого порядка, различающего ориентацию, вторично доказано.

§7. Открытые проблемы

Вопрос 1. Существует ли гомоморфизм $\mathcal{B}(1) \rightarrow \mathcal{B}(2)$, образ которого не содержится в τ -инвариантном подпространстве $\mathcal{B}(2)$?

Комментарий. Если бы такой гомоморфизм существовал, то можно было бы попытаться применить технику, разработанную в этой работе, к проблеме обратимости узлов. К сожалению, известный оператор удвоения $\Delta: \mathcal{B}(1) \rightarrow \mathcal{B}(2)$ (определенный в [1], [12]), как легко убедиться, для данной цели не подходит.

Вопрос 2. Возможно ли с помощью инвариантов Васильева заметить необратимость замкнутого 2-компонентного зацепления?

Комментарий. Комбинаторный объект, применяемый для описания инвариантов конечного типа замкнутых зацеплений — это пространство хордовых диаграмм на двух окружностях $\mathcal{A}(S_2^1)$. Ядро очевидного эпиморфизма $\mathcal{A}(\mathbb{R}_2^1)$

$\rightarrow \mathcal{A}(S_2^1)$ порождено так называемыми линк-соотношениями (см. [4]). Для решения вопроса необходимо разобраться во взаимосвязи линк-соотношений с операцией замены ориентации.

Благодарности

Мы благодарим А. С. Хорошкина, С. А. Локтева и Э. Б. Винберга за полезные сведения по теории инвариантов, а также С. К. Ландо и рецензента, прочитавших рукопись и сделавших ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology, **34**:2 (1995), 423–472.
- [2] D. Bar-Natan, *Vassiliev homotopy string link invariants*, J. Knot Theory Ramifications, **4**:1 (1995), 13–32.
- [3] D. Bar-Natan, *Some computations related to Vassiliev invariants*, <http://www.math.toronto.edu/~drorbn/papers>, 1996.
- [4] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky, D. Thurston, *The Århus integral of rational homology 3-spheres II: Invariance and universality*, Selecta Math. (N. S.), **8**:3 (2002), 341–371.
- [5] С. Дужин, *Программы и файлы данных, относящиеся к вычислению весовых систем φ и ψ* , <http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/dataprogram/OrLinks/>.
- [6] S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, *CDBook. Introduction to Vassiliev knot invariants, draft version of a book*, Online at <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/>.
- [7] T. Fiedler, *Isotopy invariants for closed braids and almost closed braids via loops in stratified spaces*, <http://arxiv.org/math.GT/0606443>.
- [8] A. Kawauchi, *The invertibility problem on amphicheiral excellent knots*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **55**:10 (1979), 399–402.
- [9] M. Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants*, Adv. Soviet Math., **16**, Part 2 (1993), 137–150.
- [10] X.-S. Lin, *Finite type link invariants and the invertibility of links*, Math. Res. Lett., **3**:3 (1996), 405–417; <http://arxiv.org/q-alg/9601019>.
- [11] X.-S. Lin, *Finite type link-homotopy invariants*, Enseign. Math. (2), **47**:3–4 (2001), 315–327; <http://arxiv.org/math.GT/0012095>.
- [12] T. Q. T. Le, J. Murakami, *The universal Vassiliev–Kontsevich invariant for framed oriented links*, Compositio Math., **102**:1 (1996), 41–64.
- [13] T. Stanford, *Finite-type invariants of knots, links and graphs*, Topology, **35**:4 (1996), 1027–1050.
- [14] H. F. Trotter, *Non-invertible knots exist*, Topology, **2**:4 (1963), 275–280.
- [15] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов*, в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 55, ВИНТИ, М., 1989, 137–314.
- [16] P. Vogel, *Algebraic structures on modules of diagrams*, Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication 32, August 1995; *Revised in 1997*, <http://www.math.jussieu.fr/~vogel/>.
- [17] Г. Вейль, *Классические группы, их инварианты и представления*, ИЛ, М., 1947.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
e-mail: duzhin@pdmi.ras.ru

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
e-mail: max.karev@gmail.com

Поступило в редакцию
11 октября 2005 г.