Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Е. В. Корицкая, Квазилинейное уравнение Бюргерса–Хопфа и многогранники Сташефа, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 3, 34–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2867>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:19:32

Квазилинейное уравнение Бюргерса–Хопфа и многогранники Сташефа

© 2007. В. М. БУХШТАБЕР, Е. В. КОРИЦКАЯ

Введение

Многогранники Сташефа находятся в центре внимания нескольких областей исследований, в последнее время особенно в связи с приложениями теории операд. В работе показано, что двупараметрическая производящая функция $U(t, x)$, вычисляющая числа k -мерных граней n -х многогранников Сташефа, удовлетворяет уравнению Бюргерса–Хопфа $U_t = UU_x$ с начальным условием $U(0, x) = x^2/(1 - x)$.

Это открывает новые пути (см. [10]) исследования комбинаторики данной серии многогранников в целом. Напомним, что в работе Фомина и Зелевинского [6] введены обобщения многогранников Сташефа для произвольной системы корней, где многогранники Сташефа (ассоциэдры) дают A -серию, а многогранники Ботта–Таубса (циклоэдры) дают B -серию.

В §1 настоящей работы собраны необходимые факты о многогранниках Сташефа K_n и числах Каталана C_n . Для каждого n описана явная реализация многогранника K_n в виде выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^{n-1}$ с целочисленными вершинами. Отметим, что различным реализациям ассоциэдров и циклоэдров в последнее время посвящено много работ (см. [8]). Наша конструкция развивает результаты из работ [13] и [9].

В §2 собраны необходимые факты о квазилинейном уравнении $U_t = UU_x$. Получен явный вид решения в случае начальных данных интересующего нас вида, а также результаты об этом уравнении, которые нашли важные приложения в комбинаторике многогранников Сташефа.

В §3 доказана основная теорема работы: *производящая функция $U(t, x) = \sum u_{k,n} t^k x^n$ при $0 \leq k \leq n - 2$, где $u_{k,n}$ — число $(n - k - 2)$ -мерных граней n -го многогранника Сташефа, удовлетворяет уравнению $U_t = UU_x$ с начальным условием $U(0, x) = x^2/(1 - x)$.*

В §4 получены соотношения Дена–Соммервилля [5] для многогранников Сташефа в качестве следствия основной теоремы.

В §5 исследуется многообразие Φ решений $U(t, x)$ уравнения Бюргерса–Хопфа, таких, что $U(t, x)$ — функция, регулярная в $(0, 0)$, и $U(0, x) = \varphi(x) = \alpha x^2 + \dots$, где $\alpha \neq 0$. Описан некоторый класс преобразований этого многообразия Φ . Показано, что для любой функции из Φ существует преобразование (деформация), которое переводит ее в решение $\tilde{U}(t, x)$ уравнения Бюргерса–Хопфа с начальным условием $\tilde{U}(0, x) = x^2$. В качестве следствия основной теоремы установлено, что $\tilde{U}(t, x)$ является производящей функцией чисел Каталана. Отметим, что в работе Артамкина [2] можно найти примеры различных

функций из Φ . Эти функции у него представляют собой производящие функции чисел модулярных графов, возникающих при описании компактификации Делиня–Мамфорда $\overline{M}_{g,n}$ пространства модулей $M_{g,n}$.

В заключительном §6 собраны замечания, указывающие на некоторые пути дальнейшего развития результатов этой работы.

Авторы выражают благодарность И. М. Кричеверу за ценные обсуждения, а также В. В. Голышеву, С. В. Фомину и Г. М. Цукерман, которые обратили наше внимание на ряд работ по теме этой статьи.

§1. Многогранники Сташефа и числа Каталана

Впервые многогранники Сташефа K_n , где $n \geq 3$, появились в его работе [12] как множество параметров для отображений, задающих «высшие ассоциативности», и определялись через расстановки скобок в формальных мономах $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. Сейчас существует несколько различных способов введения этих многогранников (см. [7]).

Определение 1.1. Множество i -мерных граней Γ_i , $0 \leq i < n-2$, многогранника Сташефа K_n размерности $n-2$ — это множество корректных расстановок $n-2-i$ пар скобок в мономе $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. При этом внешняя пара скобок $(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)$ не учитывается.

Отношение инцидентности определяется следующим образом. Пусть $\gamma \in \Gamma_k$, $\delta \in \Gamma_l$, причем $k > l$. Тогда клетка δ лежит на границе клетки γ (т.е. $\delta \subset \partial\gamma$ геометрически), если $\gamma \subset \delta$ (как расстановка пар скобок).

Множество 0-мерных граней многогранника K_n , т.е. множество вершин, — это множество корректных расстановок $n-2$ пар скобок. Их количество равняется числу Каталана $C_{n-1} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$ — это один из возможных способов определения чисел Каталана [14].

Две вершины в K_n соединяются ребром тогда и только тогда, когда расстановка скобок, соответствующая одной вершине, может быть получена из расстановки, соответствующей второй вершине, выкидыванием пары скобок и добавлением единственно возможным способом другой пары скобок, отличной от выкинутой.

В ряде случаев технически проще воспользоваться другим, эквивалентным приведенному выше, определением многогранников Сташефа.

Определение 1.2. Пусть задан выпуклый $(n+1)$ -угольник; тогда множество i -мерных граней Γ_i , $0 \leq i < n-2$, многогранника Сташефа K_n размерности $n-2$ — это множество всех различных наборов из $n-i-2$ непересекающихся диагоналей (т.е. любой грани соответствует некоторый набор из непересекающихся диагоналей и наоборот).

Отношение инцидентности определяется так же, как и в предыдущем определении. Пусть $\gamma \in \Gamma_k$, $\delta \in \Gamma_l$, причем $k > l$. Тогда клетка δ лежит на границе клетки γ (т.е. $\delta \subset \partial\gamma$ геометрически), если $\gamma \subset \delta$ (как множества диагоналей).

Для каждого $(n-1)$ -мерного многогранника Сташефа K_{n+1} можно явным образом построить реализацию в виде простого многогранника с целочисленными вершинами, лежащего в гиперплоскости в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Для этого воспользуемся определением многогранников Сташефа через скобочную структуру.

Рис. 1. Многогранник Штеффа K_4

Рассмотрим формальный моном $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n+1}$. Пронумеруем все знаки умножения в этом мономе слева направо, т.е. i -й знак умножения, где $1 \leq i \leq n$, стоит между a_i и a_{i+1} . Каждой корректной расстановке $n-1$ пар скобок в этом мономе поставим в соответствие n -мерный вектор $M = (m_1, \dots, m_n)$, где координаты m_i определяются следующим образом. В мономе со скобочной структурой каждый знак умножения отвечает за умножение некоторых двух меньших мономов. Положим $m_i = l_i r_i$, где l_i и r_i — длины правого и левого мономов, за умножение которых отвечает i -й знак умножения. Например, в случае $n = 3$ расстановке скобок $a_1 \cdot ((a_2 \cdot a_3) \cdot a_4)$ соответствует вектор $(3, 1, 2)$, так как $m_1 = 1 \cdot 3$, $m_2 = 1 \cdot 1$ и $m_3 = 2 \cdot 1$, а расстановке скобок $(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4)$ — вектор $(1, 4, 1)$.

Таким образом, мы имеем отображение вершин $(n-1)$ -мерного многогранника Штеффа K_{n+1} в $\mathbb{R}^n$. Продолжив его по линейности, получаем отображение

$$M: K_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через $I_{i,l}$ интервал $[i+1, \dots, i+l] \subset [1, \dots, n]$, где $0 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq l \leq n-i$. Сопоставим каждому интервалу $I_{i,l}$, где $i > 0$, линейную функцию

$$p_{i,l}(\mathbf{x}) = (n-l)(x_{i+1} + \dots + x_{i+l}) - l(x_1 + \dots + x_i + x_{i+l+1} + \dots + x_n)$$

в $\mathbb{R}^n$ и интервалу $I_{0,l}$ функцию $p_{0,l}(\mathbf{x}) = (n-l)(x_1 + \dots + x_l) - l(x_{l+1} + \dots + x_n)$. Положим

$$L_{i,l} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : p_{i,l}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}nl(n-l) \geq 0\}.$$

Скобочная структура на мономе $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n+1}$ задается набором из $n-1$ пар скобок. Каждой паре скобок, имеющей вид $a_1 \cdot \dots \cdot a_i \cdot (a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_{i+l+1}) \cdot a_{i+l+2} \cdot \dots \cdot a_{n+1}$, поставим в соответствие интервал $I_{i,l}$.

Например, в случае монома $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ мы получаем следующее соответствие на множестве пар скобок:

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot a_4 &\rightarrow I_{0,2}, & a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) \cdot a_4 &\rightarrow I_{1,1}, & a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot a_4) &\rightarrow I_{1,2}, \\ a_1 \cdot a_2 \cdot (a_3 \cdot a_4) &\rightarrow I_{2,1}, & (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 \cdot a_4 &\rightarrow I_{0,1}. \end{aligned}$$

Следующая теорема является результатом развития идей, предложенных в работе Сташефа [13].

Теорема 1.1. *Отображение M является вложением. Образ этого отображения лежит в гиперплоскости*

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = n(n+1)/2\}$$

и представляет собой пересечение симплекса $\sigma = \{x \in H : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ и полупространств $L_{i,1}$. Образ каждой вершины многогранника лежит в пересечении $n-1$ полупространств $L_{i,1}$, которые задаются парами скобок, входящих в скобочную структуру, соответствующую этой вершине.

Доказательство. Можно дать непосредственное доказательство этой теоремы, используя введенные выше понятия. Фактически, оно будет изложением основного результата работы [9] на языке скобочных структур. Напомним, что в [9] используется язык плоских бинарных деревьев. $\square$

Определение 1.3. Многогранник P размерности n называется *простым*, если в каждой его вершине пересекаются ровно n граней максимальной размерности.

Предложение 1.2. *Многогранники Сташефа являются простыми многогранниками.*

Доказательство. Это утверждение можно доказать непосредственно, используя комбинаторику многогранников Сташефа. Теорема 1.1 дает явное описание $n-1$ гиперграней, пересечение которых является выбранной вершиной $(n-1)$ -мерного многогранника K_{n+1} . $\square$

В дальнейшем нам также понадобится понятие двойственных многогранников. Пусть P — многогранник размерности n .

Определение 1.4. Многогранник P^* называется *двойственным к многограннику P* , если существует взаимно однозначное соответствие, при котором i -мерная грань γ_i , $0 \leq i \leq n-1$, многогранника P переходит в грань γ_{n-i-1}^* размерности $n-i-1$ многогранника P^* таким образом, что вложению $\gamma_i \subset \gamma_j$ соответствует вложение $\gamma_{n-j-1}^* \subset \gamma_{n-i-1}^*$.

Рассмотрим некоторые свойства многогранников, двойственных к многогранникам Сташефа.

Каждая пара скобок в мономе $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n+1}$ задает гипергрань многогранника K_{n+1} . Таким образом, при переходе к двойственному многограннику ей соответствует вершина многогранника K_{n+1}^* . Описанное выше соответствие пары скобок интервалу позволяет отождествить вершины многогранника K_n^* с интервалами и, тем самым, скобочную структуру со структурой на множестве интервалов.

Определение 1.5. Многогранник называется *симплициальным*, если каждая его грань является симплексом.

Известно (см. [5]), что многогранник, двойственный к простому многограннику, является симплицальным, и наоборот. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.3. *Многогранники, двойственные к многогранникам Сташефа, являются симплицальными.*

Определение 1.6. Многогранник называется *флаговым*, если каждый набор вершин, попарно соединенных ребрами, образует симплекс.

Предложение 1.4. *Многогранники, двойственные к многогранникам Сташефа, являются флаговыми.*

Доказательство. Набору из k попарно соединенных ребрами вершин многогранника K_n^* соответствует набор из k диагоналей многогранника K_n . Поскольку эти вершины попарно соединены ребрами, то диагонали не пересекаются. Значит, этому набору непересекающихся диагоналей по определению соответствует некоторая грань. Поскольку K_n^* симплицален, эта грань будет симплексом. $\square$

В итоге получаем следующий известный факт.

Предложение 1.5. *Граница многогранника K_n^* , двойственного к K_n , является триангуляцией $(n - 3)$ -мерной сферы.*

§2. Квазилинейное уравнение Бюргерса–Хопфа

Уравнением Хопфа называется уравнение

$$U_t + f(U)U_x = 0.$$

Уравнение Хопфа с $f(U) = U$ является предельным случаем следующих уравнений:

$$U_t + UU_x = \mu U_{xx} \quad (\text{уравнение Бюргерса}),$$

$$U_t + UU_x = \delta U_{xxx} \quad (\text{уравнение Кортевега-де Фриза}).$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений в частных производных ([15], [16]), квазилинейное уравнение Хопфа

$$U_t + f(U)U_x = 0$$

с начальным условием $U(0, x) = \varphi(x)$ имеет решение $U = \varphi(\xi)$, где $\xi = \xi(t, x)$ задается соотношением $x = \xi + f(\varphi(\xi))t$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай $f(U) = -U$ и называть уравнение $U_t = UU_x$ уравнением Бюргерса–Хопфа. Преобразование $t \rightarrow -t$ переводит это уравнение в уравнение $U_t + UU_x = 0$.

При начальном условии $\varphi(x) = x^2/(1 - x)$ функция $\xi(t, x)$ задается квадратным уравнением $(t + 1)\xi^2 - (1 + x)\xi + x = 0$. Решив его, получаем явное выражение для решения данной задачи Коши в окрестности точки $(0, 0)$:

$$U(t, x) = \frac{\xi^2}{1 - \xi}, \quad \text{где } \xi = \frac{2x}{x + 1 + \sqrt{(x + 1)^2 - 4(t + 1)x}}.$$

В случае общего начального условия из соотношения $x = \xi - \varphi(\xi)t$ получаем

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{t}(\xi - x).$$

Таким образом, $\xi(t, x) = tU(t, x) + x$, т. е. можно исключить функцию $\xi(t, x)$ из уравнения $U = \varphi(\xi)$.

Следствие 2.1. *Решение уравнения $U_t = UU_x$ с $U(0, x) = \varphi(x)$ является решением функционального уравнения (уравнения на характеристиках)*

$$U = \varphi(x + tU).$$

В частности, когда $\varphi(x)$ является рациональной функцией, функция $U(t, x)$ удовлетворяет алгебраическому функциональному уравнению $\sum_{k=0}^n a_k(t, x)U^k = 0$, где $a_k(t, x)$ — полиномы от t и x .

В нашем случае, когда $\varphi(x) = x^2/(1 - x)$, функция $U(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$t(1 + t)U^2 + (2xt + x - 1)U + x^2 = 0.$$

Непосредственно из этого уравнения видно, что U обладает симметрией

$$U(t, x) = U(-(t + 1), -x).$$

Рассмотрим $\xi(t, x)$ как функцию от x с параметром t . Тогда она является функционально-обратной к функции $x - \varphi(x)t$. Следовательно, можно применить классическую формулу Лагранжа для вычисления функционально-обратной функции:

$$\xi(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} -\ln \left(1 - \frac{x}{z} \left(1 - \frac{\varphi(z)}{z} t \right)^{-1} \right) dz = \sum \frac{x^n}{n} \left[\left(1 - \frac{\varphi(z)}{z} t \right)^{-n} \right]_{n-1},$$

где $[\gamma(z)]_k$ — коэффициент при z^k ряда $\gamma(z)$.

Подставив в эту формулу начальное условие $\varphi(x) = x^2/(1 - x)$, получаем, что

$$\xi(t, x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \left[\left(1 + \frac{tz}{1 - (t+1)z} \right)^n \right]_{n-1}.$$

Следовательно,

$$U(t, x) = \sum_{n \geq 2} V_n(t)x^n,$$

где

$$V_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n}{l+1} \binom{n-2}{l} t^l (1+t)^{n-2-l}.$$

Заметим, что из полученной формулы моментально следует тождество

$$U(t, x) = U(-(t+1), -x).$$

Более того, если воспользоваться известным тождеством (см. [11, с. 617, формула 25])

$$\sum_{l=0}^k \binom{n}{l+1} \binom{k}{l} = \binom{n+k}{k+1}, \quad \text{где } 0 \leq k \leq n-2,$$

то из этой формулы для $V_n(t)$ следует классический результат

$$f_{k-1}(K_n) = \frac{1}{n} \binom{n-2}{k} \binom{n+k}{k+1}, \quad \text{где } 0 \leq k \leq n-2.$$

Здесь $f_{k-1}(K_n)$ — число $(n - k - 2)$ -мерных граней многогранника Сташефа.

Другой способ получения решения заключается в рассмотрении законов сохранения. Пусть $U(t, x)$ является решением задачи Коши для уравнения Бюргерса–Хопфа

$$U_t = UU_x, \quad U(0, x) = \varphi(x).$$

Это уравнение обладает законами сохранения

$$\left(\frac{U^{k+1}}{k+1} \right)_x = \left(\frac{U^k}{k} \right)_t, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому для любых $k, l, 1 \leq k \leq l, l = 1, 2, \dots$,

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{U^{l+1}}{l+1} \right) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{U^l}{l} \right)_t = \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{U^{l-k+1}}{l-k+1} \right).$$

Определим $U_k(x)$ как коэффициенты при t^k в разложении

$$U(t, x) = \sum_n \sum_k u_{k,n} t^k x^n = \sum U_k(x) t^k.$$

Тогда при $l = k$

$$\frac{d^k}{dt^k} U \Big|_{t=0} = k! U_k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{U_0^{k+1}(x)}{k+1} \right).$$

Следовательно,

$$U_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^k}{dx^k} \varphi^{k+1}(x).$$

Используя биномиальное разложение

$$(1-x)^{-(k+1)} = 1 + (k+1)x + \dots + \frac{(k+l) \cdots (k+1)}{l!} x^l + \dots,$$

получаем, что

$$u_{k,n} = \frac{1}{n} \binom{n-2}{k} \binom{n+k}{k+1} = f_{k-1}(K_n).$$

Таким образом, мы вычислили число $f_{k-1}(K_n)$, $n \geq 3, 1 \leq k < n-2$, при помощи законов сохранения для уравнения Бюргерса–Хопфа.

В работе [7] содержится вычисление этого числа, следующее работе Кэли 1891 г., в которой также используется функция $U_k(x)$. Отметим, что Кэли получил приведенный выше вид функции $U_k(x)$ при помощи рекуррентной формулы

$$f(k, n) = \frac{n}{2k} \sum_{l+m=n+2} \sum_{i+j=k-1} f(i, l) f(j, m), \quad \text{где } f(k, n) = u_{k,n-1} = f_{k-1}(K_{n-1}).$$

В следующем параграфе мы докажем, что эти числа связывает другая рекуррентная формула, которая сразу приведет нас к уравнению Бюргерса–Хопфа.

§3. Уравнение Бюргерса–Хопфа и многогранники Шташефа

В §2, используя теорию квазилинейных уравнений, мы показали, что решение $U(t, x)$ уравнения Бюргерса–Хопфа с $U(0, x) = x^2/(1 - x)$ является производящей функцией для чисел $f_{k-1}(K_n)$. Этот параграф посвящен обратной задаче — используя только комбинаторику многогранников Шташефа, мы показываем, что производящая функция чисел $f_{k-1}(K_n)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса–Хопфа с тем же начальным условием.

Определение 3.1. Пусть S — симплицальный n -мерный многогранник. Обозначим через f_i число его i -мерных граней. Целочисленный вектор $f(S) = (f_0, \dots, f_{n-1})$ называется f -вектором этого симплицального многогранника. Для удобства положим $f_{-1} = 1$.

Для простых многогранников f -вектором называется f -вектор двойственного к нему симплицального многогранника.

Обозначим число $f_{k-1}(K_n)$ ($n-k-2$)-мерных граней многогранника Шташефа K_n через $u_{k,n}$. Положим $U(t, x) = \sum_{n,k} u_{k,n} t^k x^n$, где $0 \leq k \leq n-2$, $u_{0,n} = 1$ при $n \geq 2$ и $u_{0,n} = 0$ при $n = 0, 1$. Отметим, что $u_{n-2,n} = C_{n-1}$.

Теорема 3.1. Функция U является решением уравнения Бюргерса–Хопфа

$$U_t = UU_x$$

с начальным условием $U(0, x) = x^2/(1 - x)$.

Важнейшей частью доказательства этой теоремы являются рекуррентные соотношения на числа $u_{k,n}$.

Лемма 3.2. Числа $u_{k,n}$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$ku_{k,n} = \sum_{i+j=k-1} \sum_{p+q=n+1} pu_{i,p}u_{j,q}, \quad 0 \leq k \leq n-2,$$

$u_{0,n} = 1$ при $n \geq 2$, $u_{0,n} = 0$ при $n = 0, 1$.

Доказательство. Согласно определению 1.2, число $f_{k-1}(K_n)$ равняется количеству различных способов проведения k непересекающихся диагоналей в $(n+1)$ -угольнике.

Пусть в $(n+1)$ -угольнике проведено k непересекающихся диагоналей. Любая из них делит $(n+1)$ -угольник на два меньших, в которых проведены в сумме еще $k-1$ диагоналей. Количество способов разбить $(n+1)$ -угольник на два меньших $(p+1)$ - и $(q+1)$ -угольника равняется $n+1$ во всех случаях, кроме случая $p = q = (n+1)/2$, в котором оно равняется $(n+1)/2$. Тем самым можно получить рекуррентное соотношение, учитывая, что каждый способ проведения k диагоналей считается ровно k раз. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. При подстановке выражения для U получаются следующие тождества:

$$\begin{aligned} UU_x &= \left(\sum_{q,j} u_{j,q} t^j x^q \right) \cdot \left(\sum_{p,i} pu_{i,p} t^i x^{p-1} \right) = \sum_{i,j,p,q} pu_{i,p} u_{j,q} t^{i+j} x^{p+q-1} \\ &= \sum_{k-1, n+1} \left(\sum_{i+j=k-1} \sum_{p+q=n+1} pu_{i,p} u_{j,q} t^{k-1} x^n \right) \stackrel{!}{=} \sum_{k-1, n+1} ku_{k,n} t^{k-1} x^n = U_t. \end{aligned}$$

где равенство, помеченное восклицательным знаком, следует из полученного в лемме 3.2 рекуррентного соотношения. $\square$

§ 4. Соотношения Дена–Соммервилля

Очевидно, что преобразование $(\tilde{t}, \tilde{x}) = (\alpha t + \beta, \alpha x + \gamma)$ сохраняет вид уравнения Бюргерса–Хопфа. При этом решение $U(t, x)$ с начальным условием $U(0, x) = \varphi(x)$ переходит в решение $\tilde{U}(t, x)$ с начальным условием $\tilde{U}(0, x) = \tilde{\varphi}(x) = U(\beta, \alpha x + \gamma)$.

Имеет место классическая формула для эйлеровой характеристики границы любого n -мерного симплицеального многогранника P :

$$f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = \chi(\partial P).$$

Предложение 4.1. *Равенство $U(0, x) = U(-1, -x)$ вытекает из формулы для эйлеровой характеристики сферы.*

Доказательство. Как уже говорилось выше, граница многогранника K_n^* , двойственного к многограннику Сташефа K_n — это некоторая триангуляция $(n-3)$ -мерной сферы. А значит, $\chi(\partial K_n) = \chi(\partial K_n^*) = 1 + (-1)^{n-3}$.

Так как $U(0, x) = x^2/(1-x)$, то условие $U(0, x) = U(-1, -x)$ эквивалентно условию

$$1 = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k u_{k,n}$$

для каждого $n \geq 2$. Имеем $u_{k,n} = f_{k-1}(K_n)$, причем $f_{-1}(K_n) = 1$; поэтому

$$(-1)^n = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k f_{k-1}(K_n) = 1 - \chi(\partial K_n).$$

Следовательно, $\chi(\partial K_n) = 1 + (-1)^{n-3}$. $\square$

В случае квазилинейных уравнений имеется аналог теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши в случае, когда начальное условие нехарактеристическое. В данном случае оно именно такое.

Используя предложение 4.1, получаем, что решение уравнения Бюргерса–Хопфа с данным начальным условием обладает симметрией

$$U(t, x) = U(-(t+1), -x).$$

Напомним, что выше это равенство уже было доказано дважды, первый раз с использованием явного вида решения, а второй — с использованием функционального уравнения на U , полученного из характеристик.

В случае простых многогранников формула для эйлеровой характеристики допускает обобщение в виде соотношений Дена–Соммервилля [5]. В терминах f -векторов n -мерного многогранника P их можно записать так:

$$f_{k-1} = \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \binom{j}{k} f_{j-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Как известно (см. [5]), соотношения Дена–Соммервилля записываются в виде

$$h_i = h_{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где h_i — координаты h -вектора, который определяется следующим образом.

Определение 4.1. Пусть $f_0, \dots, f_{n-1}$ — координаты f -вектора n -мерного многогранника P . Тогда целочисленный вектор $h(P) = (h_0, \dots, h_n)$, где h_i определяются из уравнения

$$h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1},$$

называется h -вектором многогранника P .

Предложение 4.2. Соотношения Дена–Соммервилля эквивалентны симметрии $U(t, x) = U(-(t+1), -x)$ решения уравнения Бюргерса–Хопфа.

Доказательство. Положим $h(t) = \sum h_i t^{n-i}$. Тогда соотношения Дена–Соммервилля можно переписать в виде

$$h(t) = t^n h(1/t).$$

Вернувшись к f -векторам, получаем

$$\begin{aligned} \sum_0^n f_{i-1} (t-1)^{n-i} &= t^n \sum_0^n f_{i-1} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-i} \\ &\iff \sum f_{i-1} (t-1)^{n-i} = \sum f_{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &\iff \sum f_{i-1} \left(\frac{1}{t-1} \right)^i = (-1)^n \sum f_{i-1} \left(\frac{t}{1-t} \right)^i. \end{aligned}$$

В силу того, что $1/(t-1) = -(1+t/(1-t))$, получаем, полагая $\tau = 1/(t-1)$, что последнее равенство эквивалентно равенству

$$\sum_k u_{k,n} \tau^k = (-1)^n \sum_k u_{k,n} (-(\tau+1))^k,$$

что и требовалось показать. $\square$

§5. Преобразование решений уравнения Бюргерса–Хопфа

Пусть $U(t, x) = \sum_{k,n} u_{k,n} t^k x^n$ — решение задачи Коши уравнения Бюргерса–Хопфа. Выберем матрицу $\alpha = \{\alpha_{k,n}\}$ и зададим преобразование

$$U(t, x) \rightarrow U(t, x, \alpha) = \sum_{k,n} \alpha_{k,n} u_{k,n} t^k x^n.$$

В терминах, используемых в комбинаторике (см. [14]), это преобразование можно переписать в виде

$$U(t, x, \alpha) = U(t, x) * A(t, x),$$

где $A(t, x) = \sum_{k,n} \alpha_{k,n} t^k x^n$ и $*$ — умножение Адамара.

Лемма 5.1. Если $\alpha_{k,n} \alpha_{p,q} = \alpha_{k+p+1, n+q-1}$ для всех k, n, q и p , то $U(t, x, \alpha)$ является решением уравнения Бюргерса–Хопфа.

Доказательство. Поскольку $U(t, x)$ удовлетворяет уравнению $U_t = U U_x$, выполняется следующее рекуррентное соотношение на $u_{k,n}$:

$$k u_{k,n} = \sum_{i+j=k-1} \sum_{p+q=n+1} p u_{i,p} u_{j,q}.$$

В силу соотношения на $\alpha_{k,n}$ верно следующее рекуррентное соотношение на коэффициенты ряда $U(t, x, \alpha)$:

$$k\alpha_{k,n}u_{k,n} = \sum_{i+j=k-1} \sum_{p+q=n+1} p\alpha_{i,p}\alpha_{j,q}u_{i,p}u_{j,q},$$

а значит, $U(t, x, \alpha)_t = U(t, x, \alpha)U(t, x, \alpha)_x$. $\square$

Рассмотрим ряд $A(t, x) = \sum_{k,n} \alpha_{k,n} t^k x^n$, где $0 \leq k \leq n-2$. Положим $A(0, x) = A(x) = \sum_{n \geq 2} a_n x^n$, т. е. $a_n = \alpha_{0,n}$.

Теорема 5.2. *Ряд $A(x)$ задает ряд $A(t, x)$ с коэффициентами $\alpha_{k,n}$, $n \geq 2$, $0 \leq k \leq n-2$, удовлетворяющими соотношениям*

$$\alpha_{k,n}\alpha_{p,q} = \alpha_{k+p+1,n+q-1},$$

тогда и только тогда, когда

$$A(x) = \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha - \beta x}.$$

Поскольку $\alpha \neq 0$, это равно $\alpha x^2/(1 - bx)$, где $\beta = \alpha b$.

Доказательство. Пусть $\alpha_{k,n}$, $n \geq 2$, $0 \leq k \leq n-2$, удовлетворяют соотношениям $\alpha_{k,n}\alpha_{p,q} = \alpha_{k+p+1,n+q-1}$. Тогда $\alpha_{k,n} = \alpha_{0,2}^k \alpha_{0,n-k}$ и должно выполняться соотношение $(\alpha_{0,2}^k \alpha_{0,l-k})(\alpha_{0,2}^p \alpha_{0,q-p}) = \alpha_{0,2}^{k+p+1} \alpha_{0,(l-k)+(q-p)-2}$. Таким образом, $\alpha_{0,n}\alpha_{0,m} = \alpha_{0,2}\alpha_{0,n+m-2}$, где $l-k = n$ и $q-p = m$.

Положим $x^2\psi(x) = A(x)$ и $\psi_i = a_{i+2}$. Тогда из формулы для $\alpha_{k,n}$ получаем соотношение

$$\psi_k\psi_l = a_2\psi_{k+l}.$$

Используя это соотношение, покажем что ряд $\psi(x)$ должен удовлетворять функциональному уравнению

$$\psi(x)\psi(y) = a_2 \frac{x\psi(x) - y\psi(y)}{x - y}.$$

А именно,

$$\begin{aligned} \psi(x)\psi(y) &= \left(\sum_{i \geq 0} \psi_i x^i \right) \left(\sum_{j \geq 0} \psi_j y^j \right) = a_2 \sum_{n \geq 0} \psi_n \sum_{i+j=n} x^i y^j \\ &= a_2 \sum_{n \geq 0} \psi_n \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} = a_2 \frac{x\psi(x) - y\psi(y)}{x - y}. \end{aligned}$$

Дифференцируя по y полученное уравнение на $\psi(x)$, при $y = 0$ получаем

$$\psi(0) = a_2, \quad \psi(x)\psi'(0) = a_2 \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{a_2}{x} \right).$$

Следовательно,

$$\psi(x) = \frac{a_2^2}{a_2 - \psi'(0)x}.$$

Тем самым мы получили, что ряд $A(x)$ обязан иметь следующий вид:

$$A(x) = \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha - \beta x} = \frac{\alpha x^2}{1 - bx}, \quad \text{где } \beta = \alpha b.$$

В обратную сторону, пусть ряд $A(x)$ имеет указанный вид. Тогда

$$\alpha_{0,n} = a_n = \beta^{n-2} \alpha^{3-n}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{k,n} = \alpha^k \beta^{n-k-2} \alpha^{3-n+k} = \alpha^{k+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-k-2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha_{k,n} \alpha_{p,q} &= \alpha^{k+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-k-2} \alpha^{p+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{q-p-2} \\ &= \alpha^{k+p+2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n+q-k-p-4} = \alpha_{k,n} \alpha_{k+p+1, n+q-1}. \end{aligned}$$

□

Следствие 5.3. Пусть $\alpha_{k,n} \alpha_{p,q} = \alpha_{k+p+1, n+q-1}$. Тогда

$$U(t, x, \alpha) = U(t, x) * A(t, x),$$

где

$$A(t, x) = \frac{\alpha^2 x^2}{(\alpha - \beta x)(1 - \alpha t x)} \quad u \quad \alpha = \alpha_{0,2}, \quad \beta = \alpha_{0,3}.$$

Умножение Адамара на ряд $A(t, x)$ полученного вида переводит решение уравнения $U_t = UU_x$ с $U(0, x) = x^2 \psi(x)$ в решение $\tilde{U}(t, x)$ того же уравнения с $\tilde{U}(0, x) = \alpha x^2 \psi(\frac{\beta}{\alpha} x)$.

Рассмотрим важные случаи описанных выше преобразований.

1. Пусть $\alpha = 1, \beta = 1$; тогда $\alpha_{k,n} = 1$, где $0 \leq k \leq n - 2$, и

$$A(x) = \frac{x^2}{1 - x}.$$

2. Пусть $\beta = 0$; тогда $A(x) = \alpha x^2$ и

$$\alpha_{k,n} = \begin{cases} \alpha^{n-1}, & \text{если } k = n - 2, \\ 0, & \text{если } k \neq n - 2. \end{cases}$$

Следовательно, решение уравнения

$$U_t = UU_x, \quad U(0, x) = \alpha x^2,$$

имеет вид

$$U(t, x) = \alpha x^2 + \sum_{n \geq 3} \alpha^{n-1} u_{n-2,n} t^{n-2} x^n,$$

где $u_{n-2,n} = f_{n-3}(K_n) = C_{n-1}$.

При $\alpha = 1/2$ получается производящая функция для тривалентных деревьев, рассмотренная в работе Артамкина [2].

Таким образом, мы получили явную связь между производящими функциями для тривалентных деревьев и для чисел Каталана (см. [14, упр. 6.19 (f)]). Отметим, что можно построить явный изоморфизм между триангуляциями n -угольников и тривалентными деревьями (см. [14]).

Классическая производящая функция для чисел Каталана задается рядом $K(x)$, удовлетворяющим уравнению $1 + K^2 = xK$.

§6. Замечания

1. Теорема 5.2 дает общее решение функционального уравнения

$$\gamma(a, c)\gamma(b, d) = \gamma(a + b + 1, c + d - 1)$$

в классе функций $\gamma(a, c)$ целочисленных аргументов a и c .

2. Оператор

$$D_x^y G(x) = \frac{xG(x) - yG(y)}{x - y}$$

играет большую роль в теории гиперэллиптических функций [3]. Он задает обобщенный сдвиг, в частности, удовлетворяет уравнению ассоциативности

$$D_y^z D_x^y = D_x^y D_x^z.$$

Таким образом, полученное выше уравнение

$$\psi(x)\psi(y) = D_x^y \psi(x)$$

можно рассматривать как своеобразный аналог классического функционального уравнения Коши

$$\psi(x)\psi(y) = \psi(x + y) = d_x^y \psi(x).$$

Различным обобщениям этого функционального уравнения и их приложениям посвящен обзор [4].

3. Плоские бинарные деревья являются инструментом описания дихотомических иерархических классификаций в прикладной статистике (см. гл. 8 книги [1]). Обратим внимание, что линейные функции $p_{i,l}$ из §1, взятые нами из [9], эквивалентны функциям

$$\frac{1}{l(n-l)} p_{i,l}(x) = \frac{1}{l}(x_{i+1} + \dots + x_{i+l}) - \frac{1}{(n-l)}(x_1 + \dots + x_i + x_{i+l+1} + \dots + x_n).$$

Эти функции, если пользоваться языком статистики, вычисляют разницу между средним значением показателей объектов, попавших в один класс, и средним значением показателей объектов вне этого класса.

4. В работе [2] показано, что производящая функция $\Phi_0(t, x)$ чисел стабильных деревьев удовлетворяет уравнению Бюргерса–Хопфа с начальным условием

$$\Phi_0(0, x) = e^x - 1 - x.$$

Используя результаты §2, мы получаем, что

$$t\Phi_0(t, x) = \xi(t, x) - x,$$

где $\xi(t, x)$ как функция от x с параметром t является функционально обратной к функции

$$x - (e^x - 1 - x)t.$$

Используя разд. 6.2.8 работы [14], мы получаем, что функция $x + \Phi_0(1, x)$ является производящей функцией числа произвольных расстановок скобок (группировок) в множествах, т. е. дает решение задачи 4 из четырех знаменитых задач Шрёдера.

5. В работе Лодея и Ронко [10] показано, что производящая по x функция $f_t^K(x)$ полиномов Пуанкаре многогранников Сташефа является функционально обратной по x к соответствующей производящей функции стандартных симплексов. В качестве следствия они получили формулу для $f_t^K(x)$. Непосредственно из определений следует, что наша производящая функция $U(t, x)$ связана с $f_t^K(x)$ соотношением

$$tU(t, x) = x f_{1/t}^K(-tx).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин, *Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности*, Финансы и статистика, М., 1989.
- [2] И. В. Артамкин, *Производящие функции модулярных графов и уравнение Бюргерса*, Матем. сб., **196**:12 (2005), 3–32.
- [3] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, *Hyperelliptic Kleinian functions and applications*, in: Solutions, Geometry and Topology: On the Crossroad, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 179 (eds. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov), 1997, 1–33.
- [4] В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер, *Интегрируемые уравнения, теоремы сложения и проблема Римана–Шоттки*, УМН, **61**:1 (2006), 25–84.
- [5] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004.
- [6] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Y-systems and generalized associahedra*, Ann of Math. (2), **158**:3 (2003), 977–1018.
- [7] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinskii, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [8] Ch. Hohlweg, C. Lange, *Realizations of the associahedron and cyclohedron* <http://arxiv.org/abs/math.CO/0510614>.
- [9] J.-L. Loday, *Realization of the Stasheff polytope*, Arch. Math., **83**:3 (2004), 267–278.
- [10] J.-L. Loday, M. O. Ronco, *Trialgebras and families of polytopes*, <http://arxiv.org/abs/math.AT/0205043>.
- [11] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, М., 1981.
- [12] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I, II*, Trans. Amer. Math. Soc., **108**:2 (1963), 275–292; **108**:2 (1963), 293–312.
- [13] J. D. Stasheff, *From operads to “physically” inspired theories*, in: Operads: Proceeding of Renaissance (Conferences, Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math., vol. 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 53–81.
- [14] Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции*, Мир, М., 2005.
- [15] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977.
- [16] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*, Физматлит, М., 2003.

Математический институт им. В. А. Стеклова
e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Московский государственный университет
e-mail: koritskaya@gmail.com

Поступило в редакцию
4 июля 2007 г.