Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Яфаев, Оператор Шрёдингера: определители возмущения, функция спектрального сдвига, тождества следов и прочее, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 3, 60–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2868>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 02:44:25

Оператор Шрёдингера: определители возмущения, функция спектрального сдвига, тождества следов и прочее

© 2007. Д. Р. ЯФАЕВ

Посвящается 100-летию со дня рождения Марка Григорьевича Крейна

§1. Введение

Для пары самосопряженных операторов H_0, H в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ функция спектрального сдвига (ФСС) $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; H, H_0)$ вводится соотношением

$$\mathrm{Tr}(f(H) - f(H_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) f'(\lambda) d\lambda, \quad (1.1)$$

получившим название «формула следа». Концепция ФСС в теории возмущений появилась в литературе в работе [23] известного физика И. М. Лифшица. Ее математическая теория была вскоре построена М. Г. Крейном, установившим в [19] соотношение (1.1) для пары самосопряженных операторов H_0, H с ядерной разностью $V = H - H_0$ и широкого класса функций f . Затем оно было обобщено им в [20] (более подробное изложение см. в [21]) на операторы H_0, H с ядерной разностью $R(z) - R_0(z)$ их резольвент. Кроме того, в [3] была найдена связь (формула Бирмана–Крейна) с матрицей рассеяния (МР) $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$. Там было показано, что для λ из сердцевины (см. [33]) спектра оператора H_0

$$\mathrm{Det} S(\lambda) = \exp(-2\pi i \xi(\lambda)). \quad (1.2)$$

Позднее теория Крейна была развита в различных направлениях и применена к дифференциальным операторам. Достаточно подробное изложение «абстрактных» результатов можно найти в обзоре [5] или книге [33], где, однако, приложения к дифференциальным операторам почти не обсуждались. Настоящую работу можно до некоторой степени рассматривать как продолжение статьи [5] (а отчасти, и [6]). Однако здесь, в отличие от [5], изложение не является обзором. Мы рассматриваем только оператор Шрёдингера, являющийся достаточно представительным примером. Развиваемый ниже подход и основные полученные результаты являются новыми.

В §2 мы кратко напоминаем основные результаты теории Крейна. В §3 обсуждаются ее приложения к оператору Шрёдингера в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь наша основная цель состоит в распространении теории Крейна на возмущения неядерного типа. Интересные результаты в этом направлении можно найти в [18], [24] и [7]. Аналог ФСС называется регуляризованной ФСС. Наш «прямой» подход оказывается полезным и для возмущений ядерного типа и позволяет выявить специфические свойства ФСС, не выполняющиеся для случая произвольных самосопряженных операторов. Например, мы показываем, что $\xi(\lambda)$ — непрерывная функция переменной λ при $\lambda > 0$ (вообще говоря,

она принадлежит только классу $L_1^{(loc)}$, но доказательство этого факта оказывается довольно сложным при $d > 3$.

Другая цель этой работы состоит в получении высокоэнергетического асимптотического разложения ФСС и связанных с ней объектов, что является существенным ингредиентом в выводе спектральных тождеств. Эти вопросы интенсивно изучались в литературе; см. [9], [12] по поводу одномерного случая и [8], [10] по поводу случая $d = 3$. Мы в основном занимаемся многомерной задачей. В [8], [10] на потенциал $v(x)$ налагались довольно ограничительные предположения (требовалось чтобы он принадлежал классу Шварца). Отметим также работу [28] и обзор [29], где высокоэнергетическое асимптотическое разложение ФСС и спектральные тождества обсуждались в рамках микролокального анализа.

В настоящей работе мы предлагаем новый подход к построению асимптотического разложения (АР) функции $\xi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. При этом возникают две различные задачи. Первая из них — доказательство существования такого разложения. Вторая состоит в нахождении достаточно простых выражений для асимптотических коэффициентов. Первую задачу мы решаем в §6, используя высокоэнергетическое асимптотическое разложение МР $S(\lambda)$ (см. §5) и формулу Бирмана–Крейна. Это дает также АР функции $\text{Tr}(R^m(z) - R_0^m(z))$, где $m > d/2 - 1$, при $|z| \rightarrow \infty$ во всей комплексной плоскости с разрезом по $\mathbb{R}_+$. В §4 мы используем другой метод построения этого АР, который работает только вдали от спектра, но зато дает эффективные выражения для асимптотических коэффициентов. Это приводит также к эффективным выражениям для коэффициентов в асимптотическом разложении ФСС. Другое выражение для этих коэффициентов получается в терминах инвариантов уравнения теплопроводности. Наконец, в §7 выводятся тождества следов как целого, так и полуцелого порядков.

§2. Теория Крейна

1. Ниже мы используем следующие стандартные определения (см., например, [11]): $\mathfrak{S}_p$, $p \geq 1$, — симметрично нормированный идеал (с нормой $\|\cdot\|_p$) алгебры всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$; в частности, $\mathfrak{S}_1$ — идеал ядерных операторов, а $\mathfrak{S}_2$ — идеал операторов Гильберта–Шмидта; определитель $\text{Det}(I + A)$ корректно определен для $A \in \mathfrak{S}_1$, и его свойства в существенном те же, что и в конечномерном случае. Для $A \in \mathfrak{S}_p$, $p = 1, 2, \dots$, корректно определен регуляризованный определитель $\text{Det}_p(I + A)$.

Пусть H_0, H — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$, $R(z) = (H - z)^{-1}$ — их резольвенты, определенные соответственно на множествах ϱ_0, ϱ регулярных точек операторов H_0, H . Определитель возмущения (ОВ) для пары H_0, H с разностью $V = H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ вводится соотношением

$$D(z) = D_{H/H_0}(z) = \text{Det}(I + VR_0(z)), \quad z \in \varrho_0. \quad (2.1)$$

Функция $D(z)$ голоморфна на множестве ϱ_0 ,

$$D(\bar{z}) = \overline{D(z)}, \quad (2.2)$$

и она имеет корень z порядка k тогда и только тогда, когда z является собственным значением кратности k оператора H . Кроме того, $D(z)$ удовлетворяет

тождеству

$$D^{-1}(z)D'(z) = \text{Tr}(R_0(z) - R(z)), \quad z \in \varrho_0 \cap \varrho. \quad (2.3)$$

Эти свойства ОВ распространяются на случай $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$.

ФСС построена в терминах ОВ в следующей теореме М. Г. Крейна. Поскольку $D(z) \rightarrow 1$ при $|\text{Im } z| \rightarrow \infty$, будем фиксировать ветвь функции $\ln D(z)$ в полуплоскостях $\pm \text{Im } z > 0$ условием $\arg D(z) \rightarrow 0$ при $|\text{Im } z| \rightarrow \infty$.

Теорема 2.1. При $V \in \mathfrak{S}_1$ имеет место представление

$$\ln D(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)(\lambda - z)^{-1} d\lambda, \quad \text{Im } z \neq 0, \quad (2.4)$$

где

$$\xi(\lambda) = \pi^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arg D(\lambda + i\varepsilon). \quad (2.5)$$

При почти всех (п.в.) $\lambda \in \mathbb{R}$ предел в (2.5) существует и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq \|V\|_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda = \text{Tr } V.$$

Кроме того, $\pm \xi(\lambda) \geq 0$, если $\pm V \geq 0$.

В лакунах непрерывного спектра $\xi(\lambda)$ связана со сдвигом собственных значений оператора H относительно собственных значений оператора H_0 .

Предложение 2.2. На составляющих интервалах множества $\varrho_0 \cap \varrho$ ФСС $\xi(\lambda)$ принимает постоянные целочисленные значения. Если λ — изолированное собственное значение кратности k_0 оператора H_0 и кратности k оператора H , то $\xi(\lambda + 0) - \xi(\lambda - 0) = k_0 - k$.

Формула следа (1.1) была обоснована М. Г. Крейном для достаточно широкого класса функций f .

Теорема 2.3. Пусть $V \in \mathfrak{S}_1$, а функция f непрерывно дифференцируема и ее производная допускает представление

$$f'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\lambda) dm(t), \quad |m|(\mathbb{R}) < \infty, \quad (2.6)$$

с конечной (комплексной) мерой m . Тогда

$$f(H) - f(H_0) \in \mathfrak{S}_1 \quad (2.7)$$

и выполняется формула (1.1).

Замечание 2.4. Условие (2.6) может быть слегка модифицировано и ослаблено (см. [4], [25]). Например, в случае ограниченных операторов H_0, H достаточно потребовать, чтобы f' была гельдеровски непрерывной функцией.

2. Напомним кратко основные положения теории рассеяния (детали см., например, в [33]). Обозначим через $E(\cdot)$ спектральный проектор оператора H , через $\mathcal{H}^{(a)}$ — его абсолютно непрерывное подпространство, а через P — ортогональный проектор на $\mathcal{H}^{(a)}$; аналогичные объекты для оператора H_0 снабжаются индексом 0. Волновой оператор для пары самосопряженных операторов H_0 и H определяется соотношением

$$W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(iHt) \exp(-iH_0t) P_0 \quad (2.8)$$

при условии, что этот сильный предел существует. Волновой оператор изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и обладает сплетающим свойством: $W_{\pm}E_0(\Lambda) = E(\Lambda)W_{\pm}$, где $\Lambda \subset \mathbb{R}$ — произвольное борелевское множество. В частности, его область значений $\text{Ran } W_{\pm}$ лежит в $\mathcal{H}^{(a)}$. Оператор рассеяния

$$S = S(H, H_0) := W_+^*(H, H_0)W_-(H, H_0)$$

коммутирует с H_0 . Оператор $W_{\pm}$ называется полным, если $\text{Ran } W_{\pm} = \mathcal{H}^{(a)}$. Таким образом, если волновые операторы $W_{\pm}$ существуют и полны, то абсолютно непрерывные части операторов H_0 и H унитарно эквивалентны. В этом случае оператор рассеяния унитарен на пространстве $\mathcal{H}_0^{(a)}$.

При определении МР $S(\lambda; H, H_0)$ предположим для простоты, что спектр $\sigma_0 = \mathbb{C} \setminus \varrho_0$ оператора H_0 абсолютно непрерывен, состоит из конечного (или локально конечного) объединения замкнутых интервалов и имеет постоянную кратность. Пусть $\mathfrak{h}$ — вспомогательное гильбертово пространство, такое, что $\dim \mathfrak{h}$ равняется этой кратности. Тогда существует унитарное отображение $\mathcal{F}: \mathcal{H} \rightarrow L_2(\sigma_0; \mathfrak{h})$, для которого оператор $\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^*$ действует как умножение на независимую переменную (λ) в пространстве $L_2(\sigma_0; \mathfrak{h})$. Из соотношения $S H_0 = H_0 S$ следует, что оператор $\mathcal{F}S\mathcal{F}^*$ действует в пространстве $L_2(\sigma_0; \mathfrak{h})$ как умножение на унитарную операторную функцию $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0): \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$, определенную для п.в. $\lambda \in \sigma_0$. Конечно, это определение фиксирует МР $S(\lambda)$ с точностью до унитарной эквивалентности в пространстве $\mathfrak{h}$.

Теорема Като–Розенблюма (см., например, [33]) утверждает, что волновые операторы $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны, если $V \in \mathfrak{S}_1$. Связь между ФСС и МР была найдена в [3].

Теорема 2.5. *Если $V \in \mathfrak{S}_1$, то $S(\lambda) - I \in \mathfrak{S}_1$ и формула (1.2) выполняется для п.в. $\lambda \in \sigma_0$.*

Соотношение (1.2) часто используется для определения (с точностью до целого числа) ФСС на абсолютно непрерывной части спектра. Формально дифференцируя (1.2), получим, что

$$\text{Tr}(S^*(\lambda)S'(\lambda)) = -2\pi i \xi'(\lambda). \quad (2.9)$$

Это соотношение иногда удобнее в применениях, чем (1.2), поскольку существует простое выражение для следа интегрального оператора с гладким ядром.

3. Ввиду наших приложений к оператору Шрёдингера обсудим обобщения теорем 2.1, 2.3 и 2.5, приспособленные к полуограниченному случаю. За счет сдвига на константу можно считать, что операторы $H_0 + cI$ и $H + cI$ положительно определены. Будем предполагать, что

$$R^m(z) - R_0^m(z) \in \mathfrak{S}_1 \quad (2.10)$$

для $z = -c$ и некоторого $m > 0$. Из теоремы 2.1 следует, что ФСС $\xi(\mu; h, h_0)$ для пары $h_0 = (H_0 + cI)^{-m}$, $h = (H + cI)^{-m}$ существует и принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$. Кроме того, согласно предложению 2.2, она равняется нулю на $\mathbb{R}_-$ и для достаточно больших $\mu > 0$. Для исходной пары H_0, H ФСС определяется соотношениями

$$\xi(\lambda; H, H_0) = -\xi((\lambda + c)^{-m}; (H + cI)^{-m}, (H_0 + cI)^{-m}) \quad (2.11)$$

для $\lambda > -c$ и $\xi(\lambda; H, H_0) = 0$ для $\lambda \leq -c$. В терминах ОВ $D_{h/h_0}(\zeta)$ для пары h_0, h ФСС строится по формуле

$$\xi(\lambda; H, H_0) = \pi^{-1} \arg D_{h/h_0}((\lambda + c + i0)^{-m}). \quad (2.12)$$

Класс допустимых функций получается из теоремы 2.3 (см. также замечание 2.4) заменой переменных $\mu = (\lambda + c)^{-m}$. Из принципа инвариантности Бирмана (см., например, [33]) вытекает, что при условии (2.10), где $z = -c$, волновые операторы $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны. В этом случае МР связаны соотношением $S(\lambda; H, H_0) = S^*(\mu; h, h_0)$. Таким образом, следующий результат является прямым следствием теорем 2.1, 2.3 и 2.5.

Теорема 2.6. Пусть условие (2.10) выполняется для $z = -c$. Определим ФСС $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; H, H_0)$ равенствами (2.11) для $\lambda > -c$ и $\xi(\lambda) = 0$ для $\lambda \leq -c$. Она удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| (1 + |\lambda|)^{-m-1} d\lambda < \infty \quad (2.13)$$

и связана с МР равенством (1.2). Предположим, что функция f имеет две локально ограниченные производные и

$$(\lambda^{m+1} f'(\lambda))' = O(\lambda^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Тогда выполняются включение (2.7) и формула следа (1.1).

Следствие 2.7. Формула следа (1.1) справедлива для всех функций $f(\lambda) = (\lambda - z)^{-k}$, где $k \geq m$ и $z \in \varrho_0 \cap \varrho$. В частности,

$$\text{Tr}(R^m(z) - R_0^m(z)) = -m \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) (\lambda - z)^{-m-1} d\lambda. \quad (2.15)$$

Замечание 2.8. Если условие (2.10) верно для $m = 1$, то обобщенный ОВ

$$\tilde{D}_{-c}(z) := \text{Det}(I + (z + c)R(-c)VR_0(z)) = D_{h/h_0}((z + c)^{-1}) \quad (2.16)$$

корректно определен и удовлетворяет уравнению (2.3). Зафиксируем непрерывную ветвь $\arg \tilde{D}_{-c}(z)$ условием $\arg \tilde{D}_{-c}(-c) = 0$. Тогда из формулы (2.12) следует, что

$$\xi(\lambda; H, H_0) = \pi^{-1} \arg \tilde{D}_{-c}(\lambda + i0). \quad (2.17)$$

ФСС имеет определенный знак для знакоопределенных возмущений оператора H_0 . Мы понимаем знак возмущения в смысле квадратичных форм. Следующий результат получен в [17] (см. также теорему 8.10.3 в [33]).

Теорема 2.9. Пусть выполняется условие (2.10). Тогда $\xi(\lambda) \geq 0$, если $H \geq H_0$, и $\xi(\lambda) \leq 0$, если $H \leq H_0$.

4. В приложениях к дифференциальным операторам удобно использовать понятие регуляризованного определителя и ввести регуляризованный ОВ

$$D_p(z) = \text{Det}_p(I + VR_0(z)), \quad p = 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

Это определение корректно при $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_p$. В этом случае функция $D_p(z)$ голоморфна на множестве ϱ_0 . Многие свойства обычных ОВ переносятся на

регуляризованные ОВ. Так, тождество (2.2) остается верным, а обобщение (2.3) имеет вид

$$D_p^{-1}(z)D'_p(z) = -\text{Tr} \left(R(z) - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k R_0(z)(VR_0(z))^k \right). \quad (2.19)$$

§3. Регуляризованный ОВ и ФСС для оператора Шрёдингера

1. Ниже мы рассматриваем пару самосопряженных операторов $H_0 = -\Delta$,

$$H = -\Delta + v(x), \quad v(x) = \overline{v(x)}, \quad (3.1)$$

в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$. Предполагается, что потенциал $v(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, т. е.

$$|v(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\rho}, \quad (3.2)$$

где по крайней мере $\rho > 1$. Тогда положительный спектр оператора H абсолютно непрерывен, а его отрицательный спектр состоит из собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, перенумерованных со своими кратностями (см, например, [27]); точка $\lambda = 0$ также может быть собственным значением оператора H . Волновые операторы (2.8) существуют и полны, так что $\text{Ran } W_{\pm} = E(\mathbb{R}_{+})\mathcal{H}$ (см., например, [22]).

Каноническая диагонализация оператора H_0 осуществляется оператором $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{R}_{+}; L_2(\mathbb{S}^{d-1}))$, определяемым соотношением $(\mathcal{F}u)(\lambda; \omega) = (\Gamma_0(\lambda)u)(\omega)$, где

$$(\Gamma_0(\lambda)u)(\omega) = 2^{-1/2} \lambda^{(d-2)/4} \hat{u}(\lambda^{1/2}\omega), \quad \lambda > 0, \omega \in \mathbb{S}^{d-1},$$

а $\hat{u}$ — преобразование Фурье функции u . МР $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ корректно определена и является унитарным оператором в пространстве $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}_{+}$. Кроме того, она допускает представление

$$S(\lambda) = I - 2\pi i(\mathcal{A}_0(\lambda) + \widetilde{\mathcal{A}}(\lambda)), \quad (3.3)$$

где

$$\mathcal{A}_0(\lambda) = \Gamma_0(\lambda)V\Gamma_0^*(\lambda), \quad \widetilde{\mathcal{A}}(\lambda) = -\Gamma_0(\lambda)VR(\lambda + i0)V\Gamma_0^*(\lambda). \quad (3.4)$$

Эти операторы корректно определены. Действительно, положим $\langle x \rangle^{-r} = (1 + |x|^2)^{-r/2}$ (мы пользуемся общим обозначением для функции и оператора умножения на нее) и выберем некоторое $r > 1/2$. Тогда, согласно теореме Соболева, оператор $\Gamma_0(\lambda)\langle x \rangle^{-r} : \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ компактен и непрерывно зависит от $\lambda > 0$. Принцип предельного поглощения утверждает, что операторная функция $\langle x \rangle^{-r} R_0(z) \langle x \rangle^{-r}$ непрерывна в комплексной плоскости вплоть до разреза по $[0, \infty)$ за возможным исключением точки $z = 0$. Таким образом, при $\rho > 1$ операторы (3.4) могут быть представлены в виде произведения ограниченных операторов, непрерывно зависящих от $\lambda > 0$. Отсюда следует, что МР $S(\lambda)$ — непрерывная (в операторной топологии) функция при $\lambda > 0$.

Если оценка (3.2) выполнена при $\rho > d$, то включение (2.10) выполняется для всех $z \in \varrho$ и любого положительного целого числа $m > d/2 - 1$. Этот результат — непосредственное следствие резольвентного тождества и включения $\langle x \rangle^{-\rho/2} R_0(z) \in \mathfrak{S}_2$, если $m = 1$, но требует некоторых ухищрений, если $m > 1$ (см. [32] или [27]). Таким образом, следующее утверждение вытекает из теорем 2.6 и 2.9.

Теорема 3.1. *Предположим, что условие (3.2) выполняется при $\rho > d$. Пусть $c > -\lambda_1$, m — положительное целое число и $2(m+1) > d$. Определим ФСС равенством (2.11) для $\lambda > -c$ и положим $\xi(\lambda; H, H_0) = 0$ для $\lambda \leq -c$. Тогда выполняется условие (2.13),*

$$\xi(\lambda) = 0 \quad \text{для } \lambda < \lambda_1, \quad \xi(\lambda) = -n \quad \text{для } \lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1}), \quad \lambda_n < \lambda_{n+1}, \quad (3.5)$$

и ФСС связана с МР равенством (1.2) при $\lambda > 0$. Если функция f имеет две локально ограниченные производные и удовлетворяет условию (2.14), то справедливы включения (2.7) и формула следа (1.1) (в частности, (2.15)). Кроме того, если $v(x) \geq 0$ ($v(x) \leq 0$), то $\xi(\lambda) \geq 0$ (соответственно $\xi(\lambda) \leq 0$).

Следствие 3.2. *Пусть $d \leq 3$ и $\rho > d$. Тогда включение (2.10) и формула (2.15) справедливы для $m = 1$, а ФСС может быть выражена через обобщенный ОВ (2.16) соотношением (2.17).*

2. Теперь мы изложим прямой подход к построению ФСС для многомерно-го оператора Шрёдингера (3.1). Это позволяет изучить некоторые конкретные свойства функции $\xi(\lambda)$, такие, как непрерывность при $\lambda > 0$ и поведение при $\lambda \rightarrow +\infty$ и $\lambda \rightarrow 0$. Мы предполагаем здесь, что условие (3.2) выполняется по крайней мере для $\rho > 1$, но не обязательно для $\rho > d$, как в ядерном методе. На самом деле ρ зависит от размерности d задачи и различно в различных утверждениях. Для основных результатов мы предполагаем, что $\rho > 2$. В этом случае оператор H может иметь только конечное число N отрицательных собственных значений. Таким образом, прямой подход позволяет построить ФСС вне рамок ядерного метода.

В предыдущем параграфе ФСС определялась соотношением (2.12), которое не всегда удобно. В одномерном случае $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$, так что ФСС может быть выражена по формуле (2.5) через ОВ $D(z) = D_1(z)$ для исходной пары H_0, H . При $d > 1$ аналогичное представление получается в терминах регуляризованного ОВ $D_p(z)$, определяемого формулой (2.18). Структура ОВ $D_p(z)$ усложняется с ростом p , и обычно из какого-либо свойства $D_p(z)$ вытекает аналогичное свойство ОВ для больших p . Поэтому естественно выбирать наименьшее p , такое, что $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_p$.

Следующее элементарное утверждение показывает, что свойства регуляризованных ОВ в существенном те же, что и в ядерном случае.

Предложение 3.3. *Предположим, что $\rho > 1$, если $d = 1, 2$, $\rho > 3/2$, если $d = 3$, и $\rho \geq 2$, если $d \geq 4$. Пусть $p = 1$ при $d = 1$, $p = 2$ при $d = 2, 3$ и $p > d/2$ при $d \geq 4$. Тогда функция $D_p(z)$ аналитична в комплексной плоскости с разрезом по положительной полуоси $[0, \infty)$ и удовлетворяет тождествам (2.2) и (2.19). Эта функция может иметь нули только на отрицательной полуоси, где они совпадают с собственными значениями оператора H ; порядок ее нуля равняется кратности соответствующего собственного значения.*

Пусть $r = \rho/2$, $G = \langle x \rangle^{-r}$, и пусть $\mathcal{V}$ — оператор умножения на ограниченную функцию $\langle x \rangle^{\rho} v(x)$. Поскольку ненулевые собственные числа операторов $VR_0(z)$ и $GR_0(z)G\mathcal{V}$ совпадают, то

$$D_p(z) = \text{Det}_p(I + GR_0(z)G\mathcal{V}).$$

Это представление более удобно, чем (2.18), поскольку операторная функция $GR_0(z)G$ непрерывна вплоть до разреза в классах $\mathfrak{S}_p$ для достаточно больших p . В следующем утверждении используется тот факт, что если $D_p(\lambda \pm i0) = 0$ при $\lambda > 0$, то -1 является собственным числом компактного оператора $GR_0(\lambda \pm i0)G\mathcal{V}$ и, следовательно, λ — собственное значение оператора H . Однако в силу теоремы Като (см., например, [27]) этот оператор не имеет положительных собственных значений.

Предложение 3.4. Пусть $\rho > 1$, если $d = 1$, $\rho > 3/2$, если $d = 2$, и $\rho > 2$, если $d \geq 3$. Положим $p = 1$ для $d = 1$, $p = 2$ для $d = 2, 3$ и $p = d$ для $d \geq 4$. Тогда функция $D_p(z)$ непрерывна вплоть до разреза $[0, \infty)$ за возможным исключением точки $z = 0$. Функция $D_p(\lambda \pm i0)$ не имеет нулей при $\lambda > 0$.

Что касается высокоэнергетической асимптотики ОВ, то имеет место следующее

Предложение 3.5. В условиях предложения 3.4

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} D_p(z) = 1 \quad (3.6)$$

равномерно по $\arg z \in [0, 2\pi]$.

При доказательстве ограничимся случаем $d = 3$. Воспользуемся тождеством

$$\text{Det}_2(I + GR_0(z)G\mathcal{V}) = \text{Det}_3(I + GR_0(z)G\mathcal{V}) \exp(-2^{-1} \text{Tr}(VR_0(z))^2). \quad (3.7)$$

Заметим, что

$$\|GR_0(z)G\|_3^3 \leq \|GR_0(z)G\| \|GR_0(z)G\|_2^2.$$

Первый сомножитель в правой части стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, а из явной формулы для интегрального ядра оператора $R_0(z)$ следует, что второй сомножитель равномерно ограничен. Поэтому первый сомножитель в правой части равенства (3.7) стремится к 1 при $|z| \rightarrow \infty$. То же самое верно для второго сомножителя, потому что

$$\text{Tr}(VR_0(z))^2 = (4\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} v(x)v(y)|x - y|^{-2} e^{2i\sqrt{z}|x-y|} dx dy,$$

и интеграл стремится к нулю в силу леммы Римана–Лебега.

ОВ $D_p(z)$ сингулярен в точке $z = 0$ только при $d = 1$ и $d = 2$.

Предложение 3.6. Пусть $d \geq 3$ и $\rho > 2$. Положим $p = 2$ при $d = 3$ и $p = d$ при $d \geq 4$. Тогда ОВ $D_p(0)$ корректно определен и $D_p(z) \rightarrow D_p(0)$, когда $|z| \rightarrow 0$.

Ясно, что $D_p(0) = 0$ тогда и только тогда, когда -1 является собственным числом компактного оператора $GR_0(0)G\mathcal{V}$. В этом случае говорят, что оператор H имеет резонанс при нулевой энергии (в частности, H может иметь нулевое собственное значение).

Мы избегаем изучения ОВ $D_p(z)$ при $|z| \rightarrow 0$, налагая слабое априорное предположение

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} |z|^\alpha \ln D_p(z) = 0 \quad (3.8)$$

для подходящего $\alpha > 0$. Конечно, в случае $d \geq 3$ условие (3.8) выполняется для всех $\alpha > 0$, если $D_p(0) \neq 0$. Впрочем, условие (3.8) может быть выведено из низкоэнергетического (при $z \rightarrow 0$) разложения резольвенты $R(z)$ (см. [15] для $d = 3$), что требует, однако, более сильного условия, чем $\rho > 2$.

3. Мы считаем функцию $\arg D_p(z)$ непрерывной в комплексной плоскости с разрезом по $[\lambda_1, \infty)$, что возможно, поскольку там $D_p(z) \neq 0$. Согласно (3.6), ветвь этой функции фиксируется условием $\arg D_p(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Построим теперь регуляризованную ФСС ξ_p .

Теорема 3.7. Пусть условие (3.2) выполняется при $\rho > 2$, и пусть $p = 1$ для $d = 1$, $p = 2$ для $d = 2, 3$ и $p = d$ для $d \geq 4$. Предположим, что (3.8) справедливо при $\alpha = 1$. Определим регуляризованную ФСС ξ_p равенством (2.5) в терминах регуляризованного ОВ $D_p(z)$. Тогда представление (2.4) для $\ln D_p(z)$ выполняется с функцией $\xi_p(\lambda)$. Функция ξ_p удовлетворяет равенствам (3.5) при $\lambda < 0$. Она непрерывна при $\lambda > 0$, $\xi_p(\lambda) = o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\xi_p(\lambda) = o(\lambda^{-1})$ при $\lambda \rightarrow 0$, а интегралы от $\xi_p(\lambda)\lambda^{-1}$ и $\xi_p(\lambda)$ сходятся (но не обязательно абсолютно) соответственно на бесконечности и в точке $\lambda = 0$.

Действительно, функция $\ln D_p(z)$ аналитична в комплексной плоскости с разрезом по $[\lambda_1, \infty)$ и непрерывна вплоть до разреза за исключением точек $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и, возможно, нуля. Рассмотрим в комплексной плоскости замкнутый контур $\Gamma_{R,\varepsilon}$, состоящий из интервалов $(\lambda_1, R + i0)$ и $(R - i0, \lambda_1)$, лежащих на верхнем и нижнем берегах разреза, и окружности C_R радиуса R , проходимой против часовой стрелки. Кроме того, мы обходим каждую точку λ_j , $j = 1, \dots, N$, и точку 0 по полуокружностям $C_\varepsilon^\pm(\lambda_j)$ и $C_\varepsilon^\pm(0)$ радиуса ε . В силу теоремы Коши для произвольного комплексного z при достаточно малом ε и достаточно большом R

$$\ln D_p(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \ln D_p(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta. \quad (3.9)$$

Согласно (3.6), интеграл по C_R стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Поскольку функция $D(z)$ имеет только нули конечного порядка в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, интегралы по $C_\varepsilon^\pm(\lambda_j)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Интегралы по $C_\varepsilon^\pm(0)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу условия (3.8), где $\alpha = 1$. Таким образом, представление (2.4) для $D_p(z)$ с функцией $\xi_p(\lambda)$, определяемой формулой (2.5), следует из уравнений (2.2) и (3.9).

Получим теперь формулу следа.

Теорема 3.8. Пусть f — ограниченная рациональная функция с не вещественными полюсами. Тогда в условиях теоремы 3.7

$$\mathrm{Tr} \left(f(H) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k f(H_0 + \varepsilon V)}{d\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_p(\lambda) f'(\lambda) d\lambda \quad (3.10)$$

и, в частности,

$$\mathrm{Tr} \left(R(z) - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k R_0(z) (V R_0(z))^k \right) = - \int_{-\infty}^{\infty} \xi_p(\lambda) (\lambda - z)^{-2} d\lambda. \quad (3.11)$$

Действительно, продифференцируем представление вида (2.4) для $D_p(z)$. Учитывая формулу (2.19), мы получим сначала (3.11), что дает (3.10) для $f(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$, $\mathrm{Im} z \neq 0$. Затем, дифференцируя (3.11), распространим формулу (3.10) на функции $f(\lambda) = (\lambda - z)^{-m}$, где $m = 2, 3, \dots$. Ясно, что формула (3.10) остается верной для линейных комбинаций этих функций.

Формула следа (1.1), конечно, не имеет смысла, если $\rho \leq d$, так что представление (3.10) может рассматриваться как ее регуляризация. Если $d = 1$, то $\xi = \xi_1$ и теорема 3.8 содержится в теореме 2.6.

Применяя принцип аргумента к функции $D_p(z)$, получим тождество следа нулевого порядка.

Теорема 3.9. *В условиях предложения 3.6 предположим, что $D_p(0) \neq 0$. Тогда*

$$\arg D_p(\infty) - \arg D_p(0) = \pi N, \quad (3.12)$$

где N — общее число отрицательных собственных значений оператора H .

Подчеркнем, что, согласно определению (2.5), при условии $D_p(0) \neq 0$ предел $\xi_p(+0)$ существует. Формула (3.12) (называемая формулой Левинсона) означает, что регуляризованная ФСС $\xi_p(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda = 0$. В случаях $d = 1$ и $d = 2$ нужно учитывать сингулярность ОВ $D_p(z)$ в точке $z = 0$.

При положительных λ регуляризованная ФСС связана с МР $S(\lambda)$. Относительно обозримое соотношение получается только при $p = 2$. Пусть оператор $\mathcal{A}_0(\lambda)$ (называемый первым борновским приближением к МР) определяется формулой (3.4). Он самосопряжен, не зависит от резольвенты оператора H и строится непосредственно в терминах преобразования Фурье потенциала v . Положим

$$\nu(\lambda) = \text{Tr}(S(\lambda) - I + 2\pi i \mathcal{A}_0(\lambda)) = -2\pi i \text{Tr} \widetilde{\mathcal{A}}(\lambda).$$

Следующий результат может рассматриваться как модификация формулы Бирмана–Крейна (1.2). Его доказательство основано на тождестве

$$\begin{aligned} \text{Det}_2(I - (V - VR(z)V)(R_0(z) - R_0(\bar{z}))) \\ = D_2(\bar{z})D_2(z)^{-1} \exp(-\text{Tr}(VR(z)V(R_0(z) - R_0(\bar{z})))), \end{aligned}$$

где мы переходим к пределу при $z \rightarrow \lambda + i0$.

Теорема 3.10. *Пусть условие (3.2) выполнено при $\rho > 3/2$, если $d = 2$, и при $\rho > 2$, если $d = 3$. Тогда функция $\xi_2(\lambda)$ связана с МР $S(\lambda)$ формулой*

$$\text{Det}_2 S(\lambda) = e^{-2\pi i \xi_2(\lambda) - \nu(\lambda)}, \quad \lambda > 0.$$

4. Предположим, что v удовлетворяет условию (3.2) при $\rho > d$. Тогда включение (2.10) выполняется при $2(m+1) > d$, и обычная ФСС $\xi(\lambda)$ определяется соотношением (2.11). Найдем связь между ξ и регуляризованной ФСС ξ_p , что позволит получить новую информацию о ФСС ξ , дополняющую результаты разд. 1.

Пусть сначала $d \leq 3$, так что $m = 1$. Соотношение между обобщенным ОВ $\tilde{D}(z) = \tilde{D}_{-c}(z)$, $-c < \lambda_1$, определенным равенством (2.16), и регуляризованным ОВ $D_2(z)$ легко получается сопоставлением уравнений (2.3) для $\tilde{D}(z)$ и (2.19) для $D_2(z)$.

Предложение 3.11. *Если $d = 2$ или $d = 3$ и условие (3.2) выполняется для $\rho > d$, то*

$$\tilde{D}(z) = D_2^{-1}(-c)D_2(z) \exp\left((4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} v(x) dx b_d(z)\right), \quad (3.13)$$

где $b_2(z) = -\ln(-z/c)$, $b_3(z) = c^{1/2} - (-z)^{1/2}$ и $\arg(-z) \in (-\pi, \pi)$.

Сравнивая аргументы обеих частей формулы (3.13) и переходя к пределу при $z \rightarrow \lambda + i0$, получим соотношение между ФСС $\xi(\lambda)$, которая может быть определена формулой (2.17), и $\xi_2(\lambda)$. Затем мы используем теоремы 3.7 и 3.9.

Теорема 3.12. Пусть выполняются условия предложения 3.11. Тогда при $\lambda > 0$ ФСС $\xi(\lambda)$ допускает представление

$$\xi(\lambda) = \xi_2(\lambda) + 2^{-1}(2\pi)^{-d}|\mathbb{S}^{d-1}| \int_{\mathbb{R}^d} v(x) dx \lambda^{(d-2)/2}.$$

Функция $\xi(\lambda)$ непрерывна при $\lambda > 0$ и

$$\xi(\lambda) = 2^{-1}(2\pi)^{-d}|\mathbb{S}^{d-1}| \int_{\mathbb{R}^d} v(x) dx \lambda^{(d-2)/2} + o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Если $d = 3$ и оператор H не имеет резонанса при нулевой энергии, то существует предел $\xi(+0) = -\pi N$, так что ФСС непрерывна в точке $\lambda = 0$.

Если $d = 1$, то $D_2(z)$ связан с обычным ОВ $D(z)$ формулой, аналогичной формуле (3.13). Отсюда следует, что ФСС $\xi(\lambda)$ непрерывна при $\lambda > 0$ и удовлетворяет соотношению (3.14) с остатком $o(\lambda^{-1/2})$.

Случай $d \geq 4$ существенно труднее, поскольку ФСС $\xi(\lambda)$ выражается только через ОВ для пары $(H_0 + cI)^{-m}$, $(H + cI)^{-m}$, не связанный при $m > d/2 - 1 \geq 1$ прямо с $D_p(z)$. Для проверки того, что ξ — непрерывная функция при $\lambda > 0$, сравним формулы (2.15) и (3.11) и воспользуемся тем, что функция $\text{Tr}(d^{m-2}(R_0(z)(VR_0(z))^k/dz^{m-2}))$, $k \geq 2$, непрерывна вплоть до разреза $(0, \infty)$. Отсюда вытекает, что интеграл от $(\xi(\lambda) - \xi_p(\lambda))(\lambda - z)^{-m}$ по λ также является непрерывной функцией от z вплоть до этого разреза. Тогда стандартные результаты об интегралах типа Коши показывают, что функция $\xi(\lambda) - \xi_p(\lambda)$ принадлежит классу C^{m-1} для $\lambda > 0$. Теперь непрерывность функции $\xi(\lambda)$ следует из теоремы 3.7. Сформулируем этот результат.

Теорема 3.13. Пусть условие (3.2) выполняется при $\rho > d$. Тогда ФСС $\xi(\lambda)$ непрерывна при $\lambda > 0$.

Используя представление (3.3), легко показать, что в предположении, что $\rho > d$, МР $S(\lambda)$ зависит непрерывно от $\lambda > 0$ в ядерной топологии, а потому $\text{Det } S(\lambda)$ также является непрерывной функцией от $\lambda > 0$. Тем не менее непрерывность ФСС $\xi(\lambda)$ не следует из формулы (1.2), так как ее целочисленные скачки заранее не исключены.

Главный член высокоэнергетической асимптотики ФСС дается первым членом в правой части формулы (3.14) для всех $d \geq 4$. Этот результат доказывается в §6 одновременно с полным АР функции $\xi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$; при этом требуются более ограничительные предположения относительно $v(x)$.

§4. Функция Грина при больших значениях спектрального параметра

В разд. 1 мы построим АР интегрального ядра $R(x, x'; z)$ резольвенты (функции Грина) при $|z| \rightarrow \infty$ при условии, что $z \in \Pi_\theta$, где $\arg z \in [\theta, 2\pi - \theta]$ при каком-либо $\theta > 0$. Этот метод не работает при $\theta = 0$, но зато дает явные выражения для коэффициентов этого разложения и не требует убывания функции $v(x)$ на бесконечности. При некоторых предположениях убывания этот метод дает также АР для $\text{Tr}(R^m(z) - R_0^m(z))$. В разд. 2 мы получаем АР параболической

функции Грина (ядра уравнения теплопроводности) $G(x, x'; t)$ при $t \rightarrow 0$, что не требует почти никаких предположений о $v(x)$ на бесконечности. Преобразование Лапласа связывает это разложение с АР функции $R(x, x'; z)$ при $|z| \rightarrow \infty$. В разд. 3 результаты о $G(x, x'; t)$ используются для усиления результатов о локальном АР функции $R(x, x'; z)$. Напротив, АР функции $\text{Tr}(R^m(z) - R_0^m(z))$ при $|z| \rightarrow \infty$ используется для вывода АР функции $\text{Tr}(e^{-Ht} - e^{-H_0 t})$ при $t \rightarrow 0$.

1. Мы исходим из модификации (см. [13]) проитерированного резольвентного тождества. Ее можно рассматривать как частный случай некоммутативной формулы Тейлора из [16]. Мы приведем это тождество для оператора Шрёдингера, хотя на самом деле оно имеет общий характер.

Предложение 4.1. *Предположим, что $v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ и что v , а также все ее производные являются ограниченными функциями. Определим дифференциальные выражения X_n рекуррентными формулами*

$$X_0 = I \quad \text{и} \quad X_{n+1} = X_n H_0 - H X_n, \quad (4.1)$$

так что

$$X_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} H^k H_0^{n-k}.$$

Тогда для всех $N \geq 0$

$$R(z) = \sum_{n=0}^N X_n R_0^{n+1}(z) + R(z) X_{N+1} R_0^{N+1}(z). \quad (4.2)$$

Операторы X_n можно легко сосчитать. (Ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.) Например, $X_1 = -v$, $X_2 = -2\langle (\nabla v), \nabla \rangle - (\Delta v) + v^2$ и

$$X_3 = -4\langle \text{Hess } v \nabla, \nabla \rangle + 6v\langle (\nabla v), \nabla \rangle - (\Delta^2 v) + 2|\nabla v|^2 + 3v(\Delta v) - v^3.$$

Предложение 4.2. *Оператор X_n является дифференциальным оператором порядка $n-1$, так что*

$$X_n = \sum_{|\alpha| \leq n-1} p_{\alpha,n} \partial^\alpha, \quad p_{\alpha,n}(x) = \overline{p_{\alpha,n}(x)}, \quad \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}. \quad (4.3)$$

В условиях предложения 4.1 все коэффициенты $p_{\alpha,n}$, а также все их производные суть ограниченные функции. Кроме того, если v удовлетворяет оценкам

$$\|\partial^\kappa v(x)\| \leq C_\kappa (1 + \|x\|)^{-\rho - \|\kappa\|}, \quad \rho > 0, \quad (4.4)$$

для всех мультииндексов κ , то $(\partial^\kappa p_{\alpha,n})(x) = O(|x|^{-\rho - |\kappa| - (n-1)\epsilon})$, $\epsilon = \min\{\rho, 1\}$, для всех n , α и κ при $|x| \rightarrow \infty$.

Оба предложения 4.1 и 4.2 непосредственно проверяются индукцией по n (см. [13]).

Воспользуемся тождеством (4.2) для нахождения АР интегрального ядра $R(x, x'; z)$ резольвенты $R(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in P_\theta$. Согласно (4.3), оператор $T_n(z) = X_n R_0^{n+1}(z)$ для $n \geq 1$ имеет интегральное ядро

$$T_n(x, x'; z) = (2\pi)^{-d} \sum_{|\alpha| \leq n-1} i^{|\alpha|} p_{\alpha,n}(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x-x', \xi \rangle} \xi^\alpha (|\xi|^2 - z)^{-n-1} d\xi. \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что

$$|T_n(x, x'; z)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq n-1} |p_{\alpha, n}(x)| |z|^{-(n+3-d)/2},$$

если $n + 3 > d$. Конечно, формула (4.5) может быть переписана в виде

$$T_n(x, x'; z) = n!^{-1} \sum_{|\alpha| \leq n-1} p_{\alpha, n}(x) \partial_x^\alpha R_0^{(n)}(x - x'; z), \quad (4.6)$$

где $R_0^{(n)}(x - x'; z) = \partial_z^n R_0(x - x'; z)$ и $R_0(x - x'; z)$ — интегральное ядро резольвенты $R_0(z)$. Оценка остатка $R(z)X_{N+1}R_0^{N+1}(z)$ в (4.2) основана на очевидном соотношении $\|R(z)\| = O(|z|^{-1})$ и явной формуле (4.5). Таким образом, тождество (4.2) дает следующий результат.

Теорема 4.3. *Предположим, что $v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ и что v , а также все ее производные являются ограниченными функциями. Тогда при всех достаточно больших N ($N \geq d - 3$) асимптотическое соотношение*

$$R(x, x'; z) = \sum_{n=0}^N T_n(x, x'; z) + O(|z|^{-(N-d)/2-2}) \quad (4.7)$$

справедливо при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Pi_\theta$. Оценка остатка здесь равномерна по $x, x' \in \mathbb{R}^d$. Кроме того, соотношение (4.7) бесконечно дифференцируемо по x, x' (при этом N возрастает) и z .

Из равенства (4.6) следует, что функции $T_n(x, x'; z)$ убывают экспоненциально при $|x - x'| |z|^{1/2} \rightarrow \infty$, $z \in \Pi_\theta$. Поэтому, хотя AP (4.7) и справедливо для всех $x, x' \in \mathbb{R}^d$, оно представляет интерес только в области $|x - x'| = O(|z|^{-1/2})$. Заметим, что функции $T_n(x, x'; z)$ сингулярны на диагонали $x = x'$, но становятся более гладкими при возрастании n . В частности, эти функции непрерывны, если $n > d - 3$ и $n \geq 1$ (функция $T_0(x, x'; z)$ непрерывна только при $d = 1$). Таким образом, (4.7) дает разложение функции Грина одновременно при больших $|z|$ и по гладкости по переменной $x - x'$. Отметим также, что диагональные сингулярности функций $T_n(x, x'; z)$ ослабевают после дифференцирований по z .

Обсудим характер разложения (4.7) при $x \rightarrow x'$. Если $d = 1$, то можно прямо положить $x = x'$ в (4.7). В случае $d \geq 2$ мы предварительно продифференцируем (4.5) и (4.7) $m-1$ раз по z . Если $2(m+1) > d$, то интегральное ядро оператора $R^{(m-1)}(z) - R_0^{(m-1)}(z)$ непрерывно. Поэтому, полагая $x = x'$ и собирая вместе члены одной степени по z , получим

Следствие 4.4. *Пусть $2(m+1) > d$. Положим $c_{\alpha, k} = \int_{\mathbb{R}^d} \xi^{2\alpha} (|\xi|^2 + 1)^{-k} d\xi$, где $k > |\alpha| + d/2$. Тогда справедливо AP*

$$(R^{(m-1)}(x, x'; z) - R_0^{(m-1)}(x, x'; z))|_{x=x'} = (m-1)! \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(m)}(x) (-z)^{d/2-m-n-1}, \quad (4.8)$$

где (это определение имеет смысл при $n + m + 1 > d/2$)

$$r_n^{(m)}(x) = (2\pi)^{-d} \sum_{|\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} \binom{|\alpha| + n + m}{m-1} c_{\alpha, |\alpha| + n + m + 1} p_{2\alpha, n+|\alpha|+1}(x). \quad (4.9)$$

Для потенциалов v , убывающих на бесконечности, АР (4.8) может быть проинтегрировано по $x \in \mathbb{R}^d$, потому что производная порядка $m - 1$ остатка в (4.2) оценивается в ядерной норме. Это дает следующий результат.

Теорема 4.5. Пусть предположение (4.4) выполняется при $\rho > d$, и пусть $2(m + 1) > d$. Тогда при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Pi_\theta$, справедливо АР

$$\mathrm{Tr}(R^m(z) - R_0^m(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{r}_n^{(m)}(-z)^{d/2-m-n-1}. \quad (4.10)$$

Вещественные коэффициенты $\mathbf{r}_n^{(m)}$ определяются формулой

$$\mathbf{r}_n^{(m)} = \int_{\mathbb{R}^d} r_n^{(m)}(x) dx. \quad (4.11)$$

Замечание 4.6. Вместо дифференцирований можно вычитать из $R(z)$ несколько (а не один, как в (4.10)) членов разложения (4.2). Это позволяет ослабить условие $\rho > d$. Например, если $d < 6$ и (4.4) справедливо для $\rho > d/2$, то

$$\mathrm{Tr}(R(z) - R_0(z) + R_0(z)VR_0(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{r}_n^{(1)}(-z)^{d/2-n-2}. \quad (4.12)$$

2. Параболическая функция Грина $G(x, x'; t)$ определяется как интегральное ядро оператора $\exp(-Ht)$, $t > 0$. Она удовлетворяет параболическому уравнению

$$\partial G(x, x'; t)/\partial t = \Delta G(x, x'; t) - v(x)G(x, x'; t), \quad \Delta = \Delta_x. \quad (4.13)$$

Мы ищем (ср. с [2]) его приближенное решение в виде

$$G_N(x, x'; t) = G_0(x, x'; t) \sum_{n=0}^N g_n(x, x') t^n, \quad (4.14)$$

где $G_0(x, x'; t) = G_0(x - x'; t)$ — интегральное ядро оператора $\exp(-H_0 t)$ и $g_0(x, x') = 1$. Подставим выражение (4.14) в (4.13), воспользуемся уравнением $\partial G_0/\partial t = \Delta G_0$ и разделим на общий множитель G_0 . Равенство нулю коэффициентов при t^n , $n = 0, 1, \dots, N - 1$, приводит к рекуррентным уравнениям для функций $g_{n+1}(x, x')$. Для фиксированного x' это дает обыкновенное дифференциальное уравнение $(n + 1)g_{n+1} + r \partial g_{n+1}/\partial r = \Delta g_n - v g_n$ по переменной $r = |x - x'|$. Решая его при условии, что величина $g_{n+1}(x, x)$ конечна, получим формулу

$$g_{n+1}(x, x') = \int_0^1 \sigma^n (\Delta g_n - v g_n)(x' + \sigma(x - x'), x') d\sigma. \quad (4.15)$$

Приведенная конструкция не требует никаких предположений о поведении $v(x)$ на бесконечности. Обоснование локального АР функции $G(x, x'; t)$ при $t \rightarrow 0$ проходит при очень слабых предположениях. Вначале, пользуясь равенством (4.15), проверяем по индукции следующее утверждение.

Лемма 4.7. Предположим, что $v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $(\partial^\kappa v)(x) = O(e^{\gamma|x|^2})$ при $|x| \rightarrow \infty$ для некоторого $\gamma \geq 0$ и всех κ . Тогда $|g_n(x, x')| \leq C_n e^{(n\gamma + \varepsilon)|x - x'|^2}$ для всех $\varepsilon > 0$ равномерно по x' из компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. Кроме того, эти оценки бесконечно дифференцируемы по переменным x и x' .

Положим $Q_N = G_0(-\Delta g_N + v g_N)t^N$. Из (4.13) и аналогичного уравнения для функции G_N следует, что разность $F_N = G - G_N$ допускает представление

$$F_N(x, x'; t) = - \int_0^t (e^{-(t-s)H} Q_N(\cdot, x'; s))(x) ds, \quad (4.16)$$

где x' фиксировано. В формуле (4.16), конечно, подразумевается, что оператор $e^{-(t-s)H}$ действует на функцию $Q_N(x, x'; s)$ по первой переменной, а x' и s играют роль параметров. Комбинируя оценку из леммы 4.7 для g_N с очевидным неравенством $\|e^{-tH}\| \leq e^{-\lambda_1 t}$, можно оценить функцию (4.16) для малых t через $C_N t^{N-d/4+1}$ равномерно по x, x' из компактных множеств. Это дает следующий результат.

Теорема 4.8. Пусть выполнены условия леммы 4.7. Предположим, что оператор $H = -\Delta + v(x)$ самосопряжен на области определения $\mathcal{D}(H) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и что он полуограничен снизу. Определим функции g_n рекуррентными соотношениями $g_0(x, x') = 1$ и (4.15). Тогда AP

$$G(x, x'; t) = (4\pi t)^{-d/2} \exp(-(4t)^{-1}|x - x'|^2) \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x, x') t^n \quad (4.17)$$

справедливо при $t \rightarrow 0$ равномерно по x и x' из компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. В частности,

$$G(x, x; t) = (4\pi t)^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t^n, \quad g_n(x) = g_n(x, x), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.18)$$

Кроме того, AP (4.17) и (4.18) бесконечно дифференцируемы по переменным x, x' и t .

Конечно, соотношение (4.17) содержательно только при $|x - x'| = O(t^{1/2})$.

Исходя из (4.15), можно дать явные выражения для функций $g_n(x, x')$. В частности, нетрудно сосчитать первые функции $g_n(x)$ (называемые локальными инвариантами уравнения теплопроводности для оператора H):

$$\begin{aligned} g_1 &= -v, \quad g_2 = 2^{-1}v^2 - 6^{-1}\Delta v, \quad g_3 = -6^{-1}(v^3 - v\Delta v - 2^{-1}|\nabla v|^2 + 10^{-1}\Delta^2 v), \\ g_4 &= 24^{-1}v^4 + 30^{-1}\langle \nabla v, \nabla(\Delta v) \rangle + 60^{-1}v\Delta^2 v + 72^{-1}(\Delta v)^2 - 840^{-1}\Delta^3 v \\ &\quad - 12^{-1}v^2\Delta v - 12^{-1}v|\nabla v|^2 + 90^{-1}\text{Tr}(\text{Hess } v)^2. \end{aligned}$$

Для произвольного n функции $g_n(x)$ выражаются (см. [26], а также [14], где использовались результаты из [1]) формулой

$$g_n(x) = (-1)^n \Gamma(n + d/2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\Delta_x + v(x))^{k+n} (|x - x'|^{2k})|_{x=x'}}{4^k k! (k+n)! (n-1-k)! \Gamma(k + d/2 + 1)}. \quad (4.19)$$

3. Поскольку

$$R(x, x'; z) = \int_0^{\infty} G(x, x'; t) e^{tz} dt, \quad \text{Re } z < \inf \sigma, \quad \sigma = \mathbb{C} \setminus \varrho, \quad (4.20)$$

разложение (4.17) при $t \rightarrow 0$ можно связать с асимптотическим разложением ядра резольвенты $R(x, x'; z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ и тем самым усилить результаты

разд. 1. Подчеркнем, что ограниченность функции $v(x)$ сейчас не предполагается.

Теорема 4.9. *В условиях теоремы 4.8 для достаточно больших N*

$$R(x, x'; z) = \sum_{n=0}^N g_n(x, x') R_0^{(n)}(x, x'; z) + O(|z|^{-N+d/2-2}) \quad (4.21)$$

при $|z| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} z < \inf \sigma$, равномерно по x и x' из компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. Разложение (4.21) бесконечно дифференцируемо по x , x' и z .

Теоремы 4.3 и 4.9 дают два различных разложения ядра резольвенты. Аналогично тому, как это делалось в разд. 1, после дифференцирований по z в (4.21) можно перейти к пределу при $x' \rightarrow x$. Напомним, что ядро $R_0(x, x'; z)$ сингулярно на диагонали, но его производные $R_0^{(n)}(x, x'; z)$ становятся более гладкими при возрастании n . В частности, функция $R_0^{(n)}(x, x'; z)$ непрерывна на диагонали, если $2(n+1) > d$, и

$$R_0^{(n)}(x, x; z) = (4\pi)^{-d/2} \Gamma(1+n-d/2) (-z)^{d/2-n-1}.$$

Поэтому, вычитая из (4.21) функцию $R_0(x, x'; z)$ и дифференцируя $m-1$ раз по z , можно при $2(m+1) > d$ положить $x = x'$. Это дает АР

$$(4\pi)^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+m+1-d/2) g_{n+1}(x) (-z)^{d/2-m-n-1}$$

для левой части формулы (4.8). Сравнивая его с правой частью этой формулы, получаем, что

$$r_n^{(m)}(x) = (4\pi)^{-d/2} (m-1)!^{-1} \Gamma(n+m+1-d/2) g_{n+1}(x). \quad (4.22)$$

Интегрируя (4.18) по $x \in \mathbb{R}^d$, мы формально получим АР

$$\operatorname{Tr}(e^{-Ht} - e^{-H_0 t}) = (4\pi t)^{-d/2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{g}_n t^n, \quad \text{где } \mathbf{g}_n = \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx. \quad (4.23)$$

Переход от (4.18) к (4.23) требует некоторых оценок функции $F_N(x, x; t)$ на бесконечности, что, в свою очередь, требует подходящего убывания потенциала при $|x| \rightarrow \infty$. Мы избегаем таких оценок и выводим АР (4.23) из теоремы 4.5, используя формулу (обращение преобразования Лапласа (4.20))

$$\operatorname{Tr}(e^{-Ht} - e^{-H_0 t}) = (2\pi i)^{-1} (m-1)! t^{-m+1} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \operatorname{Tr}(R^m(z) - R_0^m(z)) e^{-tz} dz,$$

где $2(m+1) > d$ и $\beta < \inf \sigma$. Сформулируем точный результат.

Теорема 4.10. *Предположим, что $v(x)$ удовлетворяет оценкам (4.4), где $\rho > d$. Тогда справедливо АР (4.23).*

Наконец, отметим, что, согласно (4.22),

$$\mathbf{r}_n^{(m)} = (4\pi)^{-d/2} (m-1)!^{-1} \Gamma(n+m+1-d/2) \mathbf{g}_{n+1}. \quad (4.24)$$

§5. Высокоэнергетическая асимптотика МР

1. Пусть выполнено условие (4.4). Вне диагонали $\omega = \omega'$ интегральное ядро $s(\omega, \omega'; \lambda)$ МР $S(\lambda)$ является C^∞ -функцией и убывает быстрее любой степени λ^{-1} при $\lambda \rightarrow \infty$. Напротив, оно сингулярно на диагонали, причем его сингулярности определяются убыванием функции $v(x)$ на бесконечности. Оказывается, что эти сингулярности и высокоэнергетический предел описываются общими формулами.

Для описания $s(\omega, \omega'; \lambda)$ в окрестности диагонали напомним стандартную конструкцию приближенных, но зато явных решений ψ_N уравнения Шрёдингера $-\Delta\psi + v(x)\psi = \lambda\psi$. Эта конструкция основана на решении итерациями соответствующего уравнения переноса. Считая $\rho > 1$, положим

$$\psi_N(x, \xi) = e^{i\langle x, \xi \rangle} b_N(x, \xi), \quad \xi = k\omega \in \mathbb{R}^d, \quad k = \sqrt{\lambda},$$

где

$$b_N(x, \xi) = \sum_{n=0}^N (2ik)^{-n} b_n(x, \omega), \quad b_0(x, \omega) = 1. \quad (5.1)$$

Подставляя эти выражения в уравнение Шрёдингера и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $(2ik)^{-1}$, получим рекуррентные уравнения

$$\langle \omega, \nabla_x b_{n+1}(x, \omega) \rangle = -\Delta b_n(x, \omega) + v(x) b_n(x, \omega),$$

откуда следует, что

$$b_{n+1}(x, \omega) = \int_{-\infty}^0 (-\Delta b_n(x + t\omega, \omega) + v(x + t\omega) b_n(x + t\omega, \omega)) dt. \quad (5.2)$$

Легко показать, что при условии (4.4) для любого $c < 1$ и $\varepsilon_0 = \min\{1, \rho - 1\}$

$$|\partial_x^\alpha b_n(x, \omega)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-\rho+1-\varepsilon_0(n-1)-|\alpha|}, \quad n \geq 1, \quad \text{если } \langle x, \omega \rangle \leq c|x|. \quad (5.3)$$

Фиксируем какую-либо точку $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\Lambda(\omega_0)$ — плоскость, ортогональная ω_0 , и $\Omega = \Omega(\omega_0, \delta) \subset \mathbb{S}^{d-1}$ определяется условием $\langle \omega, \omega_0 \rangle > \delta > 0$. Положим $x = \omega_0 z + y$, где $y \in \Lambda(\omega_0)$,

$$A_N(\omega, \omega', y; \lambda) = 2^{-1} \langle \omega + \omega', \omega_0 \rangle b_N(y, -k\omega) b_N(y, k\omega') + (2ik)^{-1} (b_N(y, -k\omega) (\partial_z b_N)(y, k\omega') - b_N(y, k\omega') (\partial_z b_N)(y, -k\omega)) \quad (5.4)$$

и

$$s_N(\omega, \omega'; \lambda) = (2\pi)^{-d+1} k^{d-1} \int_{\Lambda_{\omega_0}} e^{ik\langle y, \omega' - \omega \rangle} A_N(\omega, \omega', y; \lambda) dy \quad (5.5)$$

для $\omega, \omega' \in \Omega$. Поскольку $|\langle y, \omega \rangle| \leq c|y|$ и $|\langle y, \omega' \rangle| \leq c|y|$, где $c < 1$, для $\omega, \omega' \in \Omega$, $y \in \Lambda(\omega_0)$, оценки (5.3) гарантируют, что осциллирующий интеграл (5.5) корректно определен. Как показано в [34], функция $s_N(\omega, \omega'; \lambda)$ описывает все сингулярности функции $s(\omega, \omega'; \lambda)$ и аппроксимирует ее с произвольной точностью при $\lambda \rightarrow \infty$. А именно, справедлива

Теорема 5.1. Пусть условие (4.4) выполнено при $\rho > 1$, а функция $b_N(x, \xi)$ определяется формулами (5.1) и (5.2). При $\omega, \omega' \in \Omega$ определим функцию s_N равенствами (5.4), (5.5). Тогда при любом p и достаточно большом $N = N(p)$ остаток $s(\omega, \omega'; \lambda) - s_N(\omega, \omega'; \lambda)$ принадлежит классу $C^p(\Omega \times \Omega)$ и C^p -норма этой функции есть $O(\lambda^{-p})$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Теорема 5.1 распространяется на медленно убывающие потенциалы (см. [35]).

Отметим, что другая форма АР амплитуды рассеяния $s(\omega, \omega', \lambda)$ содержится в [31].

Формула (5.5) показывает, что по существу мы рассматриваем МР $S(\lambda)$ как псевдодифференциальный оператор на единичной сфере, задаваемый его амплитудой $A(\omega, \omega', y; \lambda)$. Подставляя выражение (5.1) в правую часть формулы (5.4), можно разложить эту амплитуду в асимптотический ряд по степеням $(2ik)^{-1}$. Кроме того, теорему 5.1 можно переформулировать, используя стандартную процедуру (см, например, [30]) перехода от амплитуды псевдодифференциального оператора к его символу. Отметим, что операторная функция S лежит в $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, и ее АР при $\lambda \rightarrow \infty$ бесконечно дифференцируемо по λ .

2. Теперь мы рассмотрим оператор $T(\lambda) = -iS^*(\lambda)S'(\lambda)$, называемый оператором временной задержки Эйзенбуда–Вигнера. Ввиду унитарности МР оператор $T(\lambda)$ самосопряжен. Заметим, что его ядро $t(\omega, \omega'; \lambda)$ имеет порядок $O(\lambda^{-\infty})$ при $\omega \neq \omega'$. Стандартные результаты псевдодифференциального исчисления (см, например, [30]) показывают, что, наряду с $S(\lambda)$ и $S'(\lambda)$, оператор $T(\lambda)$ также является псевдодифференциальным. Кроме того, из теоремы 5.1 вытекает следующий результат об операторе $T(\lambda)$, который мы сформулируем в терминах его правого символа.

Теорема 5.2. Пусть условие (4.4) выполняется при $\rho > 1$. Тогда ядро оператора $T(\lambda)$ временной задержки допускает АР

$$t(\omega, \omega'; \lambda) = (2\pi)^{-d+1} k^{d-4} \sum_{n=0}^{\infty} (2ik)^{-n} \int_{\Lambda_\omega} e^{ik\langle y, \omega' - \omega \rangle} \mathbf{t}_n(\omega', y) dy, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{t}_n = \bar{\mathbf{t}}_n$ суть гладкие функции переменных $\omega' \in \Omega(\omega, \delta)$ и $y \in \Lambda(\omega)$, а $\partial_y^\alpha \mathbf{t}_n(\omega', y) = O(|y|^{-\rho+1-\varepsilon_0 n - |\alpha|})$ при $|y| \rightarrow \infty$. Кроме того, $T \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и АР (5.6) можно бесконечно дифференцировать по λ . Если $\rho > d$, то ядро t — непрерывная функция переменных ω, ω' и

$$t(\omega, \omega; \lambda) = (2\pi)^{-d+1} \lambda^{d/2-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-4\lambda)^{-n} \tau_n(\omega), \quad (5.7)$$

где $\tau_n(\omega)$ — интегралы от $\mathbf{t}_{2n}(\omega, y)$ по $y \in \Lambda(\omega)$. АР (5.7) также бесконечно дифференцируемо по λ .

§6. Высокоэнергетическая асимптотика ФСС

Наша цель в этом параграфе состоит в получении полного асимптотического разложения ФСС $\xi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. В то же время мы распространяем АР (4.10) на всю комплексную плоскость Π_0 с разрезом по положительной полуоси (включая разрез). В разд. 1 мы устанавливаем существование полного АР $\xi(\lambda)$. Однако используемый там метод дает сложные выражения для коэффициентов ξ_n этого разложения. Этот недостаток исправляется в разд. 2 и 3, где находится связь результатов разд. 1 с результатами разд. 1 и 2 §4. Это дает выражения для ξ_n в терминах коэффициентов $\mathbf{r}_n^{(m)}$, а также инвариантов $\mathbf{g}_{n+1}$ уравнения теплопроводности.

1. Будем исходить из уравнения (2.9), которое следует из формулы Бирмана–Крейна (1.2), поскольку ФСС ξ — непрерывная функция переменной $\lambda > 0$ и

операторная функция $S(\lambda)$ дифференцируема по λ в ядерной норме. Затем мы пользуемся теоремой 5.2. Интегрируя (5.7) по $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ и учитывая формулу (2.9), получаем АР производной $\xi'(\lambda)$ ФСС ξ .

Теорема 6.1. Пусть условие (4.4) выполняется для $\rho > d$. Тогда $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и справедливо АР

$$\xi'(\lambda) = \lambda^{d/2-2} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \lambda^{-n} \quad (6.1)$$

с коэффициентами

$$\eta_0 = 4^{-1}(d-2)(2\pi)^{-d}|\mathbb{S}^{d-1}| \int_{\mathbb{R}^d} v(x) dx, \quad \eta_n = -(2\pi)^{-d}(-4)^{-n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau_n(\omega) d\omega. \quad (6.2)$$

Разложение (6.1) можно бесконечно дифференцировать.

Интегрируя (6.1) по λ , получаем следующий результат.

Следствие 6.2. Для подходящей постоянной γ ФСС $\xi(\lambda)$ допускает АР

$$\xi(\lambda) = \lambda^{d/2-1} \sum_{n=0, n \neq d/2-1}^{\infty} \xi_n \lambda^{-n} + \tilde{\xi} \ln \lambda + \gamma, \quad (6.3)$$

где $\xi_n = (d/2 - n - 1)^{-1} \eta_n$, $\tilde{\xi} = 0$ при нечетном d и $\tilde{\xi} = \eta_{d/2-1}$ при четном d .

Выражения (6.2) для коэффициентов η_n , $n \geq 1$, довольно сложны. Ниже мы найдем эффективные выражения для ξ_n . Одновременно мы покажем, что $\tilde{\xi} = 0$ для всех d и найдем постоянную γ в (6.3).

2. Ввиду представления (2.15) следующее утверждение может быть выведено из следствия 6.2 с помощью варианта теоремы Привалова.

Предложение 6.3. Пусть условие (4.4) выполняется для $\rho > d$, и пусть $2(m+1) > d$. Тогда для некоторых чисел $c_n^{(m)}$, $n \geq m+1$, при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Pi_0$, имеют место АР

$$\text{Tr}(R^m(z) - R_0^m(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{r}_n^{(m)}(-z)^{d/2-m-n-1} - \gamma(-z)^{-m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n^{(m)} z^{-n}, \quad (6.4)$$

если d нечетно, и

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R^m(z) - R_0^m(z)) &= \sum_{n=0}^{d/2-2} \mathbf{r}_n^{(m)}(-z)^{d/2-m-n-1} \\ &+ \sum_{n=d/2}^{\infty} \sigma_n^{(m)}(-z)^{d/2-m-n-1} \ln(-z) - \gamma(-z)^{-m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n^{(m)} z^{-n}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

если d четно (сумма по $n = 0, \dots, d/2 - 2$ отсутствует, если $d = 2$). Здесь γ то же самое, что в (6.3), а асимптотические коэффициенты $\mathbf{r}_n^{(m)}$ определяются формулой

$$\mathbf{r}_n^{(m)} = -m\mathbf{B}(-n + d/2, m + n + 1 - d/2) \xi_n \quad (6.6)$$

($B(p, q)$ — бета-функция) для всех n , если d нечетно, и для $n = 0, \dots, d/2 - 2$, если d четно, и $\sigma_n^{(m)} = -(-1)^{n-d/2} m \binom{n-d/2+m}{m} \xi_n$ для $n = d/2, d/2 + 1, \dots$.

Подчеркнем, что коэффициенты $c_n^{(m)}$ не определяются асимптотическим разложением ФСС $\xi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Сравним предложение 6.3 с теоремой 4.5. Разложение (4.10) должно совпадать с (6.4) или (6.5) в секторе $z \in \Pi_\theta$, где $\theta > 0$. Поэтому коэффициенты (4.11) и (6.6) также совпадают. Кроме того, $\gamma = 0$, $c_n^{(m)} = 0$ в (6.4) и $\gamma = -\mathbf{r}_{d/2-1}^{(m)}$, $\sigma_n^{(m)} = 0$, $c_n^{(m)} = \mathbf{r}_{n+d/2-1}^{(m)}$ в (6.5). Таким образом, из предложения 6.3 вытекает следующий результат.

Теорема 6.4. Пусть условие (4.4) выполняется для $\rho > d$, и пусть $2(m+1) > d$. Тогда АР (4.10) при $|z| \rightarrow \infty$ справедливо при всех $z \in \Pi_0$.

В то же время мы существенно улучшили теорему 6.1 и следствие 6.2, получив явные выражения для коэффициентов ξ_n в разложении (6.3) в терминах $\mathbf{r}_n^{(m)}$. А именно, справедлива

Теорема 6.5. Пусть условие (4.4) выполняется для $\rho > d$. Тогда ФСС $\xi(\lambda)$ допускает АР

$$\xi(\lambda) = \lambda^{d/2-1} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \lambda^{-n}, \quad (6.7)$$

где коэффициенты ξ_n определяются формулами (6.6) и (4.9), (4.11). В частности, $\xi_n = 0$ для всех $n \geq d/2$, если d четно.

3. АР (6.7) может быть также выведено из теоремы 4.10 (вместо теоремы 4.5). Поскольку

$$\mathrm{Tr}(e^{-Ht} - e^{-H_0 t}) = -t \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) e^{-t\lambda} d\lambda,$$

из АР (6.3) следует (см, например, [10]), что при $t \rightarrow 0$

$$\mathrm{Tr}(e^{-Ht} - e^{-H_0 t}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(d/2 - n) \xi_n t^{n+1-d/2} - \pi\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n t^n, \quad (6.8)$$

если d нечетно, и

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(e^{-Ht} - e^{-H_0 t}) = & - \sum_{n=0}^{d/2-1} \Gamma(d/2 - n) \xi_n t^{n+1-d/2} - \pi\gamma \\ & - \sum_{n=d/2}^{\infty} (-1)^{n-d/2} ((n-d/2)!)^{-1} \xi_n t^{n+1-d/2} \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n t^n, \end{aligned} \quad (6.9)$$

если d четно. Здесь

$$c_n = (n-1)!^{-1} \left(\int_{-\infty}^0 \xi(\lambda) \lambda^{n-1} d\lambda + \int_0^{\infty} \left(\xi(\lambda) - \sum_{j < n+d/2-1} \xi_j \lambda^{d/2-j-1} \right) \lambda^{n-1} d\lambda \right). \quad (6.10)$$

Сравнивая (6.8) и (6.9) с (4.23), мы вновь приходим к теореме 6.5. Кроме того, мы получаем явные выражения

$$\xi_n = -(4\pi)^{-d/2} \Gamma^{-1}(d/2 - n) \mathbf{g}_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.11)$$

для асимптотических коэффициентов в (6.7) в терминах инвариантов уравнения теплопроводности, определяемых формулами (4.19) и (4.23). Соотношение (6.11) может быть также получено сопоставлением формул (4.24) и (6.6).

§ 7. Тожества следов

Вклад непрерывного спектра в тождества следов, грубо говоря, определяется функцией $\text{Tr}(R(\lambda + i0) - R_0(\lambda + i0))$. В случае тождеств целого порядка рассматривается мнимая часть этой функции, а в случае тождеств полуцелого порядка — ее вещественная часть.

1. Начнем с формул целого порядка. Применяемый здесь метод не требует никакого специального исследования ОВ или ФСС в окрестности точки $\lambda = 0$. В частности, в случае $d = 1$ теорема 7.1 не исключает, что оператор H имеет бесконечное число отрицательных собственных значений.

Сравним коэффициент при t^n , $n = 1, 2, \dots$, в разложении (4.23) с тем же коэффициентом в разложениях (6.8) или (6.9). Согласно (4.23), этот коэффициент равен нулю, если d нечетно, и $(4\pi)^{-d/2} \mathbf{g}_{d/2+n}$, если d четно. С другой стороны, согласно (6.8) или (6.9), он равен $(-1)^n c_n$ и, следовательно, определяется равенством (6.10). Учтем также, что для $\lambda < 0$ ФСС дается формулой (3.5), откуда следует равенство

$$\int_{-\infty}^0 \xi(\lambda) \lambda^{n-1} d\lambda = n^{-1} \sum_{j=1}^N \lambda_j^n.$$

Таким образом, равенства $c_n = 0$ для нечетных d и $c_n = (-1)^n (4\pi)^{-d/2} \mathbf{g}_{d/2+n}$ для четных d приводят к тождествам, называемым тождествами следов.

Теорема 7.1. Пусть условие (4.4) выполняется для $\rho > d$. Тогда для всех $n = 1, 2, \dots$ справедливы следующие тождества (где коэффициенты ξ_j те же, что в теореме 6.5):

$$\int_0^\infty \left(\xi(\lambda) - \sum_{j=0}^{(d-3)/2+n} \xi_j \lambda^{d/2-j-1} \right) \lambda^{n-1} d\lambda + n^{-1} \sum_{j=1}^N \lambda_j^n = 0, \quad (7.1)$$

если d нечетно, и

$$\int_0^\infty \left(\xi(\lambda) - \sum_{j=0}^{d/2-1} \xi_j \lambda^{d/2-j-1} \right) \lambda^{n-1} d\lambda + n^{-1} \sum_{j=1}^N \lambda_j^n = (-1)^n (4\pi)^{-d/2} (n-1)! \mathbf{g}_{d/2+n}, \quad (7.2)$$

если d четно.

Формулы (7.1) были установлены в работах [9] и [8] соответственно для случаев $d = 1$ и $d = 3$. Метод этих работ существенно отличается от предлагаемого здесь, а условия на $v(x)$ значительно более ограничительны. Еще один подход к выводу тождеств типа (7.1) и (7.2) можно найти в [29].

2. Теперь мы получим тождества следов полуцелого порядка. Будем предполагать, что $d \leq 3$; это позволит сформулировать результаты в терминах регуляризованного ОВ $D_2(z)$, обсуждавшегося в §3 (при $d = 1$ результаты могут быть сформулированы в терминах $D(z)$, см. [12]).

Предложение 7.2. Пусть $d \leq 3$, и пусть условие (4.4) выполняется для $\rho > d/2$. Тогда имеет место AP

$$\ln D_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n (-z)^{d/2-1-n} \quad (7.3)$$

при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Pi_0$, где $\delta_n = -(n+1-d/2)^{-1} \mathbf{r}_n^{(1)}$, а коэффициенты $\mathbf{r}_n^{(1)}$ определяются формулами (4.9) и (4.11). В частности, при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $\ln |D_2(\lambda \pm i0)| = O(\lambda^{-\infty})$, если d нечетно, и

$$\ln |D_2(\lambda \pm i0)| = (-1)^{d/2+1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta_n \lambda^{d/2-1-n},$$

если d четно.

Действительно, воспользуемся замечанием 4.6 к теореме 4.5. Сопоставляя уравнение (2.19) для $p = 2$ с AP (4.12), мы видим, что

$$\frac{d \ln D_2(z)}{dz} = - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{r}_n^{(1)} (-z)^{d/2-2-n}.$$

Остается проинтегрировать это AP и учесть соотношение (3.6).

В силу (4.24), кроме того, $\delta_n = -(4\pi)^{-d/2} \Gamma(n+1-d/2) \mathbf{g}_{n+1}$.

Теорема 7.3. Пусть $d \leq 3$, условие (4.4) выполняется для $\rho > 2$ и $n = 0, 1, 2, \dots$. Предположим, что соотношение (3.8) справедливо при $\alpha = n + 1/2$. Пусть числа δ_n те же, что в предложении 7.2. Тогда для $d = 1, 3$

$$\pi^{-1} (-1)^n \int_0^{\infty} \ln |D_2(\lambda + i0)| \lambda^{n-1/2} d\lambda - (n+1/2)^{-1} \sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{n+1/2} = \delta_{n+1}, \quad (7.4)$$

а для $d = 2$ (сумма под знаком интеграла отсутствует при $n = 0$)

$$\begin{aligned} \pi^{-1} (-1)^n \int_0^{\infty} \left(\ln |D_2(\lambda + i0)| - \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta_j \lambda^{d/2-1-j} \right) \lambda^{n-1/2} d\lambda \\ - (n+1/2)^{-1} \sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{n+1/2} = 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Доказательство в существенном совпадает с доказательством теоремы 3.7. В силу теоремы Коши

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \ln D_2(z) (-z)^{n-1/2} dz = 0, \quad (7.6)$$

где $\Gamma_{R,\varepsilon}$ — тот же контур, что и в (3.9). Интегралы по $C_\varepsilon^\pm(\lambda_j)$ и $C_\varepsilon^\pm(0)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, из (7.6) следует, что

$$\begin{aligned} 2(-1)^n \int_0^R \ln |D_2(\lambda + i0)| \lambda^{n-1/2} d\lambda - 2\pi(n+1/2)^{-1} \sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{n+1/2} \\ = i \int_{C_R} \ln D(z) (-z)^{n-1/2} dz. \quad (7.7) \end{aligned}$$

Асимптотические разложения при $R \rightarrow \infty$ обоих интегралов могут быть легко выведены из (7.3). При этом стремящиеся к бесконечности члены взаимно сокращаются. Остается перейти в (7.7) к пределу при $R \rightarrow \infty$.

Формулы (7.4) были получены, хотя и при существенно более ограничительных предположениях относительно $v(x)$, в работах [9], [12] и [10] соответственно для случаев $d = 1$ и $d = 3$. Насколько известно автору, формулы (7.5) являются новыми.

Тождества следов целого порядка могут быть также получены методом доказательства теоремы 7.3 (при этом в (7.6) следует заменить $n - 1/2$ на $n - 1$), что требует, однако, более ограничительных предположений по сравнению с теоремой 7.1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Agmon and Y. Kannai, *On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators*, Israel J. Math., **5** (1967), 1–30.
- [2] В. М. Бабич, Ю. О. Рапопорт, *Асимптотика при малых временах фундаментального решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка*, Проблемы матем. физ., **7** (1974), 21–38.
- [3] М. Ш. Бирман, М. Г. Крейн, *К теории волновых операторов и операторов рассеяния*, Докл. АН СССР, сер. матем., **144** (1962), 475–478.
- [4] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Замечания о функции спектрального сдвига*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27** (1972), 33–46.
- [5] М. Ш. Бирман, Д. Р. Яфаев, *Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие*, Алгебра и анализ, **4:5** (1992), 1–44.
- [6] М. Ш. Бирман, Д. Р. Яфаев, *Спектральные свойства матрицы рассеяния*, Алгебра и анализ, **4:6** (1992), 1–27.
- [7] J.-M. Bouclet, *Trace formulae for relatively Hilbert–Schmidt perturbations*, Asympt. Anal., **32:3–4** (2002), 257–291.
- [8] В. С. Буслаев, *Формулы следов и некоторые асимптотические оценки ядра резольвенты для оператора Шрёдингера в трехмерном пространстве*, Проблемы матем. физ., **1** (1966), 82–101.
- [9] В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев, *О формулах следов для сингулярного дифференциального оператора Штурма–Лиувилля*, Докл. АН СССР, сер. матем., **132** (1960), 13–16.
- [10] Y. Colin de Verdière, *Une formule de traces pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$* , Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **14:1** (1981), 27–39.
- [11] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [12] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, *Уравнение Кортевега-де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система*, Функц. анализ и его прил., **5:4** (1971), 18–27.

- [13] M. Hitrik, I. Polterovich, *Resolvent expansions and trace regularizations for Schrödinger operators*, Contemp. Math., **327** (2003), 161–173.
- [14] M. Hitrik, I. Polterovich, *Regularized traces and Taylor expansions for the heat semigroup*, J. London Math. Soc., **68**:2 (2003), 402–418.
- [15] A. Jensen, T. Kato, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions*, Duke Math. J., **46**:3 (1979), 583–611.
- [16] S. Kantorovitz, $\mathbb{C}^n$ -operational calculus, noncommutative Taylor formula and perturbation of semigroups, J. Funct. Anal., **113**:1 (1993), 139–152.
- [17] Л. С. Коплиенко, *К теории функции спектрального сдвига*, Проблемы матем. физ., **5** (1971), 62–72.
- [18] Л. С. Коплиенко, *Формула следа для возмущений неядерного типа*, Сиб. матем. ж., **25**:5 (1984), 62–71.
- [19] М. Г. Крейн, *О формуле следа в теории возмущений*, Матем. сб., **33** (1953), 597–626.
- [20] М. Г. Крейн, *Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов*, Докл. АН СССР, сер. матем., **144** (1962), 268–271.
- [21] М. Г. Крейн, *О некоторых новых исследованиях по теории возмущений*, в кн.: Первая летняя матем. школа, Наукова думка, Киев, 1964, 103–187.
- [22] S. T. Kuroda, *Scattering theory for differential operators*, J. Math. Soc. Japan, **25**:1, 2 (1973), 75–104, 222–234.
- [23] И. М. Лифшиц, *Об одной задаче теории возмущений*, УМН, **7**:1 (1952), 171–180.
- [24] R. Newton, *Noncentral potentials: The generalized Levinson theorem and the structure of the spectrum*, J. Math. Phys., **18**:7 (1977), 1348–1357.
- [25] В. В. Пеллер, *Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряженных операторов*, Функц. анализ и его прил., **19**:2 (1985), 37–51.
- [26] I. Polterovich, *Heat invariants of Riemannian manifolds*, Israel J. Math., **119** (2000), 239–252.
- [27] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 3, 4, Мир, Москва, 1982.
- [28] D. Robert, *Asymptotique à grande énergie de la phase de diffusion pour un potentiel*, Asympt. Anal., **3**:4 (1991), 301–320.
- [29] D. Robert, *Semiclassical asymptotics for the spectral shift function*, in: Differential operators and spectral theory, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 189, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 187–203.
- [30] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978.
- [31] М. М. Скриганов, *Равномерные координатные и спектральные асимптотики решений задачи рассеяния для уравнения Шрёдингера*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69** (1977), 171–199.
- [32] Д. Р. Яфаев, *Замечание о теории рассеяния для возмущенного полигармонического оператора*, Матем. заметки, **15** (1974), 445–454.
- [33] Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*, Изд-во С.-Петербургского Университета, 1994.
- [34] D. R. Yafaev, *High energy asymptotics of the scattering amplitude for the Schrödinger equation*, Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci., **112**:1 (2002), 245–255.
- [35] D. R. Yafaev, *High energy and smoothness asymptotic expansion of the scattering amplitude*, J. Funct. Anal., **202**:2 (2003), 526–570.