Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Буслаев, В. Ю. Страздин, Одномерный оператор Шрёдингера на полуоси: дифференциальное уравнение для собственных функций относительно спектрального параметра и аналог уравнения Фройда, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 3, 84–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2869>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 12:51:08

Одномерный оператор Шрёдингера на полуоси: дифференциальное уравнение для собственных функций относительно спектрального параметра и аналог уравнения Фройда*

© 2007. В. С. БУСЛАЕВ, В. Ю. СТРАЗДИН

Об ортогональных многочленах. В спектральной теории матриц Якоби существуют два соотношения (см., например, [1], [2]), аналоги которых для оператора Шрёдингера, по-видимому, не известны. Кратко опишем эти соотношения. Удобно начать с рассмотрения системы собственных векторов, т. е. многочленов $P_n(\lambda)$, ортогональных на оси $\mathbb{R}$ относительно веса $w = \exp(-q)$, где $q = q(\lambda)$ — некоторая четная непрерывно дифференцируемая функция, которая при $|\lambda| \rightarrow \infty$ стремится к $+\infty$ степенным образом (последнее условие принято ради простоты изложения). Нормируем многочлены так, что $P_n(\lambda) \sim \lambda^n$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(\lambda) P_m(\lambda) w(\lambda) d\lambda = h_n \delta_{nm}, \quad (1)$$

где h_n — некоторые положительные коэффициенты. Перенормируем эти многочлены, положив $p_n(\lambda) = (h_n)^{-1/2} P_n(\lambda)$.

Соответствующая матрица Якоби A действует на комплекснозначные последовательности $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ по правилу $(A\mathbf{x})_n = r_n x_{n-1} + r_{n+1} x_{n+1}$, $n > 0$, и $(A\mathbf{x})_0 = r_1 x_1$. Здесь $r_n = (h_n/h_{n-1})^{1/2}$. Векторы $\mathbf{p}(\lambda)$, $(\mathbf{p}(\lambda))_n = p_n(\lambda)$, введенного выше пространства последовательностей образуют полную систему (обобщенных) собственных функций матрицы A , которая определяет самосопряженный оператор в $l_2(\mathbb{N})$, $\mathbb{N} = \{0, \dots\}$, $A\mathbf{p}(\lambda) = \lambda \mathbf{p}(\lambda)$. Спектр матрицы A однократен, непрерывен и совпадает с осью $\mathbb{R}$. При этом $\sum_{n \geq 0} p_n(\lambda) p_n(\mu) w(\mu) = \delta(\lambda - \mu)$.

Первое из упомянутых соотношений имеет вид

$$\frac{d}{d\lambda} p_n(\lambda) = r_n B_{n,n} p_{n-1}(\lambda) - r_n B_{n,n-1} p_n(\lambda), \quad (2)$$

где $B(\lambda) = \frac{W(A)}{A - \lambda - i0}$, $W = -\frac{d}{d\lambda} \ln w(\lambda)$.

Второе соотношение — это классическое уравнение Фройда $r_n(W(A))_{n,n-1} = n$.

Некоторые факты спектральной теории оператора Шрёдингера. В настоящем разделе мы напоминаем свойства двух характерных решений уравнения Шрёдингера

$$-y'' + v(x)y = k^2 y, \quad x > 0, \quad (3)$$

*Работа была поддержана грантами РФФИ 05-01-01076 и 05-01-02944.

которые входят в ядро резольвенты $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$, $\lambda = k^2$, оператора Шрёдингера $L\psi = -\psi'' + v\psi$, $\psi(0) = 0$. Можно считать, что потенциал $v(x)$, определяющий оператор и уравнение, веществен и суммируем на полуоси $(0, \infty)$ с весом $1 + x^2$. Два характерных решения $\varphi(x, k)$ и $f(x, k)$ уравнения Шрёдингера определяются условиями $\varphi(0, k) = 0$, $\varphi'(0, k) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ikx} f(x, k) = 1$; см. по поводу этих решений, например, [3].

Здесь и в дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения для производных: $\varphi'(x, k) = (\varphi(x, k))_x = \partial\varphi(x, k)/\partial x$, $\dot{\varphi}(x, k) = \partial\varphi(x, k)/\partial k$.

Перечислим некоторые свойства решений $\varphi(x, k)$ и $f(x, k)$, на которые мы будем ссылаться ниже.

Решение $\varphi(x, k)$ при каждом $x \geq 0$ является целой четной функцией параметра k , которая подчиняется оценкам

$$\left| \varphi(x, k) - \frac{\sin kx}{k} \right| \leq K \frac{e^{|\operatorname{Im}(k)|x}}{1 + |k|^2}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial k} \left(\varphi(x, k) - \frac{\sin kx}{k} \right) \right| \leq K \frac{e^{|\operatorname{Im}(k)|x}}{1 + |k|^2}. \quad (4)$$

Решение $f(x, k)$ при каждом $x \geq 0$ аналитично по k в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(k) > 0$, непрерывно дифференцируемо по k вплоть до вещественной оси и удовлетворяет оценкам

$$|f(x, k)e^{-ikx} - 1| \leq K \frac{1}{1 + |k|}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial k} (f(x, k)e^{-ikx}) \right| \leq K \frac{1}{1 + |k|}, \quad \operatorname{Im}(k) \geq 0. \quad (5)$$

При вещественных k выполняется соотношение $\varphi(x, k) = (2ik)^{-1}(f(x, k)\overline{M(k)} - \overline{f(x, k)}M(k))$, где $M(k) = f(0, k)$. Мы будем предполагать, что $M(0) \neq 0$, иначе говоря, $k = 0$ не является *виртуальным уровнем*.

Спектр $\{\lambda\}$ оператора L состоит из конечного числа отрицательных собственных значений и компоненты простого непрерывного спектра, заполняющей полуось $\lambda > 0$. Чтобы изложение было короче, мы будем предполагать, что для рассматриваемого потенциала собственные значения отсутствуют. При сделанных предположениях функция $M(k)$ не имеет корней в замкнутой верхней полуплоскости. Функции $\varphi(x, k)$, $\lambda = k^2$, являются *обобщенными* собственными функциями непрерывного спектра. Они удовлетворяют условиям *ортонормированности и полноты*:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(y, k) \varphi(y, l) l \sigma(l) dy &= \delta(k - l), \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(x, k) \varphi(y, k) \sigma(k) d\lambda &= \delta(x - y), \quad \sigma(k) = \frac{k}{|M(k)|^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Как следствие, ядро $H(x, y)$ оператора $H = f(L)$ дается формулой

$$H(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\lambda) \varphi(x, k) \varphi(y, k) \sigma(k) d\lambda. \quad (7)$$

Спектральное разложение функции $\frac{1}{2k}\dot{\varphi}(x, k)$. Умножим обе стороны соотношения ортонормированности на функцию $\frac{1}{2l}\dot{\varphi}(x, l)$ и проинтегрируем полученное соотношение по l по полуоси $l \geq 0$. Воспользуемся четностью подынтегральной функции относительно l и распространим интеграл на всю ось:

$$\frac{1}{2k}\dot{\varphi}(x, k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty C(x, y)\varphi(y, k) dy, \quad (8)$$

где

$$C(x, y) = \int_0^\infty \varphi(y, l)\dot{\varphi}(x, l) \frac{l}{|M(l)|^2} dl = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, l)\dot{\varphi}(x, l) \frac{l}{|M(l)|^2} dl. \quad (9)$$

Чтобы убедиться в том, что $C(x, y)$ является функцией точки (т. е. не имеет компонент, которые были бы сингулярными обобщенными функциями), подставим в последний интеграл вместо подынтегральной функции ее асимптотическое выражение при $l \rightarrow \infty$:

$$C(x, y) \sim \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \sin(l y) \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\sin(l x)}{l} \right) dl. \quad (10)$$

Сингулярная компонента последнего интеграла совпадает с сингулярной компонентой функции $C(x, y)$; нетрудно убедиться, что выписанный интеграл есть непрерывная функция переменных x, y .

Следующее наблюдение состоит в том, что $C(x, y) = 0$ при $y > x$. Чтобы увидеть это, выразим функцию $\varphi(y, l)$ в интеграле, определяющем $C(x, y)$, через решение $f(y, l)$:

$$C(x, y) = \frac{1}{4i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y, l)}{M(l)} \dot{\varphi}(x, l) dl - \frac{1}{4i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y, -l)}{M(-l)} \dot{\varphi}(x, l) dl. \quad (11)$$

Напомним, что функция $\varphi(y, l)$ — целая четная функция от l , а $f(y, l)/M(l)$ аналитична в верхней полуплоскости и непрерывна вплоть до вещественной оси, соответственно $f(y, -l)/M(-l)$ аналитична в нижней полуплоскости. Деформируя контуры интегрирования в выписанных интегралах в соответствующие полуплоскости, мы видим, с учетом асимптотических свойств подынтегральных функций, что при $y > x$ оба интеграла обращаются в нуль. Таким образом,

$$\frac{1}{2k}\dot{\varphi}(x, k) = \frac{1}{\pi} \int_0^x C(x, y)\varphi(y, k) dy, \quad C(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, l)\dot{\varphi}(x, l) \frac{l}{|M(l)|^2} dl. \quad (12)$$

При $y < x$ функция $C(x, y)$ допускает дальнейшие преобразования. Выполним в последнем интеграле интегрирование по частям, переноса производную с $\dot{\varphi}(x, l)$ на два других множителя:

$$C(x, y) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \dot{\varphi}(y, l)\varphi(x, l) \frac{l}{|M(l)|^2} dl - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, l)\varphi(x, l)\tau(l) dl, \quad \tau(l) = \frac{d}{dl}\sigma(l). \quad (13)$$

В силу доказанного выше первый интеграл в правой части при $y < x$ равен нулю; поэтому

$$C(x, y) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, l)\varphi(x, l)\tau(l) dl = -\int_0^\infty \varphi(y, l)\varphi(x, l)\tau(l) dl. \quad (14)$$

Дифференциальное уравнение относительно переменной λ . Вернемся к спектральному представлению функции $\frac{1}{2k}\dot{\varphi}(x, k)$:

$$\frac{1}{2k}\dot{\varphi}(x, k) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(x, l)\tau(l) dl \int_0^x \varphi(y, k)\varphi(y, l) dy. \quad (15)$$

Из дифференциального уравнения для $\varphi(x, k)$ относительно x стандартным образом выводится соотношение

$$\int_0^x \varphi(y, k)\varphi(y, l) dy = \frac{\varphi(x, k)\varphi'(x, l) - \varphi(x, l)\varphi'(x, k)}{k^2 - l^2}. \quad (16)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2k}\dot{\varphi}(x, k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(x, l)\varphi(x, l)\varphi'(x, k) - \varphi(x, l)\varphi'(x, l)\varphi(x, k)}{k^2 - l^2} \tau(l) dl. \quad (17)$$

Два появившихся здесь интеграла можно расчленить, если подходящим и одинаковым образом интерпретировать в обоих слагаемых, которые должны при этом возникнуть, сингулярный знаменатель $(k^2 - l^2)^{-1}$. Как он будет интерпретирован — неважно. Важно, что он должен быть интерпретирован как одна и та же обобщенная функция в обоих слагаемых. Это может быть *главное значение* или *предельное значение с определенной стороны*, или что-либо другое. Просто для того, чтобы подчеркнуть, что какая-то регуляризация необходима, мы будем в дальнейшем использовать конкретную регуляризацию $(k^2 - l^2)^{-1} = (k^2 - l^2 + i0)^{-1}$.

С этой договоренностью

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, k) = M(x, x, \lambda)\varphi'(x, k) - M_y(x, y, \lambda)|_{y=x} \varphi(x, k), \quad (18)$$

где

$$M(x, y, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(x, l)\varphi(y, l)}{k^2 - l^2 + i0} \tau(l) dl = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(x, l)\varphi(y, l)}{\mu - \lambda - i0} \sigma(l) W(\mu) d\mu, \quad (19)$$

$$W(\mu) = -\frac{d}{d\mu} \ln \sigma(l), \quad \mu = l^2.$$

Коэффициенты уравнения можно переписать несколько иначе:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, k) = N(x, \lambda)\varphi'(x, k) - \frac{1}{2}N_x(x, \lambda)\varphi(x, k), \quad N(x, \lambda) = M(x, x, \lambda). \quad (20)$$

Ясно, что $M(x, y, \lambda)$ можно записать как ядро оператора M , $M = W(L)(L - \lambda - i0)^{-1}$.

Чтобы получить замкнутую систему для вектора $\Phi(x, \lambda) = (\varphi(x, k), \varphi'(x, k))^t$, продифференцируем уравнение (20) по x и исключим из полученного соотношения производную $\varphi''(x, k)$, используя уравнение Шрёдингера. В результате приходим к следующей теореме:

Теорема 1. При сделанных выше предположениях относительно потенциала v и спектральных свойств оператора L вектор-функция $\Phi(x, \lambda) = (\varphi(x, k),$

$\varphi'(x, k))^t$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi(x, \lambda) = U(x, \lambda) \Phi(x, \lambda), \quad (21)$$

$$U(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}N_x(x, \lambda) & N(x, \lambda) \\ N(x, \lambda)(v(x) - \lambda) - \frac{1}{2}N_{xx}(x, \lambda) & \frac{1}{2}N_x(x, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Выполняется также соотношение $-2(W(L)(x, x))_x = 1$. Определения функции N и оператора W даны выше.

Для доказательства последнего утверждения теоремы необходимы дополнительные вычисления. Обратимся к ним.

Струнное уравнение. В виде системы, аналогичной предыдущему уравнению, можно записать и само уравнение Шрёдингера:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \lambda) = V(x, \lambda) \Phi(x, \lambda), \quad \text{где } V(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Условие совместности двух последних уравнений имеет вид $\partial U / \partial x = \partial V / \partial \lambda + [V, U]$. Только элемент $(2, 1)$ этого условия ведет к содержательному соотношению: $\frac{1}{2}N_{xxx} - 2(v(x) - \lambda)N_x - v'(x)N = 1$.

Заметим, что соответствующему однородному уравнению третьего порядка удовлетворяет произведение двух произвольных решений уравнения Шрёдингера. Отсюда немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N_{xxx} - 2(v(x) - \lambda)N_x - v'(x)N &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty 2(\lambda - \mu) \frac{(\varphi(x, l)\varphi(x, l))_x}{\mu - \lambda - i0} \sigma(l)W(\mu) d\mu \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\varphi(x, l)\varphi(x, l))_x \sigma(l)W(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad (23)$$

и, таким образом, $-2(W(L)(x, x))_x = 1$.

Это и есть аналог уравнения Фройда для ортогональных многочленов. Есть много оснований считать, что это уравнение связано с иерархией Пенлеве-I интегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений, возникшей в теории двумерной квантовой гравитации (см., например, [4]).

Первый автор благодарит А. Р. Итса за полезные обсуждения. Он указал нам, в частности, на возможную связь аналога уравнения Фройда с уравнениями иерархии Пенлеве-I.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. S. Fokas, A. R. Its, A. V. Kitaev, *Comm. Math. Phys.*, **147**:2 (1992), 395–430.
 [2] Yang Chen, Mourad E. H. Ismail, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30** (1997), 7817–7829.
 [3] Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **14**:4 (1959), 57–119. [4] G. Moore, *Comm. Math. Phys.*, **133**:2 (1990), 261–304.

Санкт-Петербургский государственный университет
 e-mail: buslaev@mph.phys.spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
 e-mail: strazdin81@mail.ru

Поступило в редакцию
 5 февраля 2007 г.