Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Косяк, Гауссовские меры на группе верхнетреугольных матриц бесконечного порядка, квазиинвариантные относительно обратного преобразования, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 1, 86–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:52:26

вершине находится точка минимума, если наружу — точка максимума, и если линия уровня проходит через вершину симплекса, рассекая угол, то в данной вершине расположена седловая точка. Случай прохождения линии уровня через вершину и одновременной перпендикулярности градиента одной из сторон симплекса является вырожденным (параметр принадлежит каустике).

Исходя из указанных правил, а также геометрических свойств касания прямой с окружностями и гиперболами (линиями уровня функций U_0 , U_2 и U_1 соответственно) строятся характерные сечения каустики [7, 8]. В случае каждого сечения $\mathbb{R}^2$ будет разбиваться на области, каждой из которых соответствует свой биф-расклад. Перебирая связные компоненты дополнений к этим сечениям и пользуясь описанными выше правилами, легко перечислить все возможные биф-расклады функций U_0 , U_1 , U_2 на всех допустимых симплексах, что дает в итоге полное описание возможных биф-раскладов для W в виде указанных в теореме списков матриц.

ЗАМЕЧАНИЕ. Назовем $l = \langle M\vec{\alpha}, \vec{\pi} \rangle + (-1)^\nu$, где $\vec{\alpha} = (1, -1, 1)$, $\vec{\pi} = (2, 4, 8)$, а M — матрица биф-расклада, обобщенным эйлеровым числом. Тогда для всех рассматриваемых случаев $l = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Струков Б. А., Леванюк А. П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. Наука, М., 1995.
2. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Изв. ВУЗ, Матем., **41**, № 2, 35–46 (1997).
3. Сапронов Ю. И. УМН, **51**, вып. 1, 101–132 (1996).
4. Siersma D. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **32**, No. 125, 119–127 (1981).
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. Наука, М., 1982.
6. Сапронов Ю. И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций. Матем. сб., **180**, № 10, 1299–1310 (1989).
7. Гнездилов А. В. Понtryгинские чтения-VIII, Тез. докл. Воронеж, ВГУ, 1997, с. 36.
8. Гнездилов А. В. Труды математического факультета ВГУ (новая серия), **2** (18), 19–26 (1997).

Воронежский государственный университет

Поступило в редакцию

30 марта 1998 г.

В переработанном виде

26 марта 1999 г.

УДК 519.46

Гауссовские меры на группе верхнетреугольных матриц бесконечного порядка, квазиинвариантные относительно обратного преобразования

© 2000. А. В. Косяк

Для локально компактных групп G известна [1] теорема о коммутанте:

Коммутант правого регулярного представления ρ локально компактной группы G порожден операторами левого регулярного представления λ , причем существует сплетающий оператор J , $(Jf)(x) = (dh(x^{-1})/dh(x))^{1/2} f(x^{-1})$, такой, что $J\rho_t J = \lambda_t$, $t \in G$, где dh — левая мера Хаара.

Впервые аналог регулярного представления бесконечномерных групп (групп токов) появился, по-видимому, в [2, 3]. В [4] доказана теорема о коммутанте для аналога регулярного представления группы токов, отвечающего мере Винера. Аналог регулярного представления для произвольной бесконечномерной топологической группы $\tilde{G}$, использующий G -квазиинвариантные меры μ на подходящих пополнениях $\tilde{G}$ такой группы, определен в [5, 6].

Рассмотрим группу B^∞ верхнетреугольных вещественных матриц бесконечного порядка, $B^\infty = \{x = I + x' = I + \sum_{n=2}^\infty \sum_{k=1}^{n-1} x_{kn} E_{kn}\}$, и ее подгруппу «финитных» матриц $B_0^\infty = \{I + x' \in B^\infty \mid x' \text{ финитна}\}$. Определим на группе B^∞ гауссову меру μ_b следующим образом:

$$d\mu_b(x) = \bigotimes_{k < n} (b_{kn}/\pi)^{1/2} \exp(-b_{kn} x_{kn}^2) dx_{kn} = \bigotimes_{k < n} d\mu_{b_{kn}}(x_{kn}),$$

где $b = (b_{kn})_{k < n}$ — двойная последовательность положительных чисел. Обозначим через $R_t(x) = xt$ правое действие, а через $L_s(x) = s^{-1}x$ левое действие группы B^∞ на себе, и пусть $\Phi(x) = x^{-1}$ — преобразование перехода к обратной матрице. В [5, 7] доказаны такие леммы:

ЛЕММА 1. $\mu_b^{R_t} \sim \mu_b \quad \forall t \in B_0^\infty$.

ЛЕММА 2. $\mu_b^{L_t} \sim \mu_b \quad \forall t \in B_0^\infty \iff S_{kn}^L(b) = \sum_{m=n+1}^\infty b_{km} b_{nm}^{-1} < \infty \quad \forall k < n$.

Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Если $E(b) = \frac{1}{8} \sum_{k < n} S_{kn}^L(b) b_{kn}^{-1} < \infty$, то $\mu_b^\Phi \sim \mu_b$. В этом случае определено правое регулярное представление T^{R, μ_b} и левое регулярное представление T^{L, μ_b} группы B_0^∞ и справедлива теорема о коммутанте, причем оператор J_{μ_b} является сплетающим: $T_t^{L, \mu_b} = J_{\mu_b} T_t^{R, \mu_b} J_{\mu_b}$, $t \in B_0^\infty$, где $(J_{\mu_b} f)(x) = (d\mu_b(x^{-1})/d\mu_b(x))^{1/2} \overline{f(x^{-1})}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $E(b) < \infty$ является, видимо, также и необходимым условием эквивалентности $\mu_b^\Phi \sim \mu_b$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Определим подгруппы B_n , $n = 2, 3, \dots$, группы B^∞ формулой $B_n = \{x \in B^\infty \mid x = I + \sum_{r < k, r \leq n} x_{rk} E_{rk}\}$. Пусть μ_n — проекция меры μ_b на подгруппу B_n . Имеем $d\mu_n(x) = \bigotimes_{r < k, r \leq n} d\mu_{b_{rk}}(x_{rk})$. Заменим отображение Φ отображением $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \theta$, где $\theta(I + x') = I - x'$, $I + x' \in B^\infty$. Так как меры $\mu_{b_{kn}}$ центрированы, то $\mu_b^\Phi \sim \mu_b \iff \mu_b^\Phi \sim \mu_b$. Определим однопараметрические группы преобразований $\tilde{\Phi}^t$, $\tilde{\Phi}_n^t$, $\tilde{\phi}_n^t$, $t \in \mathbb{R}$, группы B^∞ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^t(I + x') &= I + (I - tx')^{-1}x', & \tilde{\Phi}_n^t(I + x') &= I + (I - tx'e_n)^{-1}x', \\ \tilde{\phi}_n^t(I + x') &= I + (I - tx'e(n))^{-1}x', \end{aligned} \quad (1)$$

где $e_n = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots)$, $e(n) = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Тогда $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^1$, $\tilde{\Phi}^t = \dots \circ \tilde{\phi}_{n+1}^t \circ \tilde{\phi}_n^t \circ \tilde{\phi}_{n-1}^t \circ \dots \circ \tilde{\phi}_2^t$ и $\tilde{\Phi}_n^t = \tilde{\phi}_n^t \circ \tilde{\phi}_{n-1}^t \circ \dots \circ \tilde{\phi}_2^t$. По группам $\tilde{\phi}_n^t$ построим однопараметрические группы унитарных операторов $U_n(t)$: $(U_n(t)f)(x)$

$= (d\mu_b(\tilde{\phi}_n^t(x))/d\mu_b(x))^{1/2} f(\tilde{\phi}_n^t(x))$, с генераторами A_n , определенные в пространстве $L_2(B^\infty, d\mu_b)$ при условии, что $\mu_n^{\tilde{\phi}_n^t} \sim \mu_n$ (см. лемму 3). Имеем

$$iA_n = \sum_{r=1}^{n-1} x_{rn} \sum_{m=n+1}^{\infty} x_{nm} D_{rm} = \sum_{r=1}^{n-1} x_{rn} (-iA_{rn}^L - D_{rn}),$$

где $D_{rn} = \partial/\partial x_{rn} - b_{rn}x_{rn}$, а A_{rn}^L — генераторы однопараметрических групп, отвечающих левому регулярному представлению, $iA_{rn}^L = dT_{I+tE_{rn}}^{L, \mu_b}/dt|_{t=0}$. Оказывается, что группы $U_n(t)$ коммутируют, $[U_n(t), U_m(s)] = 0$; поэтому $V_n(t) = U_n(t)U_{n-1}(t) \cdots U_2(t)$ тоже является однопараметрической группой с генератором $\mathcal{A}_n = A_n + A_{n-1} + \cdots + A_2$ и действием

$$(V_n(t)f)(x) = \left(\frac{d\mu_b(\tilde{\Phi}_n^t(x))}{d\mu_b(x)} \right)^{1/2} f(\tilde{\Phi}_n^t(x)).$$

Пусть $U(t)$ — произвольная группа унитарных операторов, $A = A^*$ — ее генератор, т.е. $U(t) = \exp(itA)$, $f \in D(A)$ и $\|f\| = 1$. Положим $F_A(t) = (U(t)f, f)$. Тогда

$$|F_A(t) - 1|^2 \leq t^2 \|Af\|^2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Обозначим через $H(\mu, \nu)$ интеграл Хеллингера для мер μ и ν (см. [8, с. 99]).

ЛЕММА 3. $\mu_n^{\tilde{\phi}_n^t} \sim \mu_n \iff H(\mu_n^{\tilde{\phi}_n^t}, \mu_n) > 0, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \iff \|A_n \mathbf{1}\|^2 = \frac{1}{8} \sum_{r=1}^{n-1} S_{rn}^L(b) b_{rn}^{-1} < \infty$.

ЛЕММА 4. Если $E(b) < \infty$, то существует сильный предел $V(t) = \text{s-lim}_n V_n(t) = \prod_{n=2}^{\infty} U_n(t)$, являющийся однопараметрической группой унитарных операторов. В этом случае $\mu_{\tilde{\Phi}} \sim \mu_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. В силу теоремы 1 §18 из [9] и представлений

$$\begin{aligned} \mu_n^{\tilde{\phi}_n^t}(\Delta) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \bigotimes_{m=n+1}^{\infty} \mu_{(n,m)}^{\tilde{\phi}_n^t, x} \otimes \mu_{(n-1)}(\Delta_x) d\mu_{(n-1,n)}(x), \\ \mu_n(\Delta) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \bigotimes_{m=n+1}^{\infty} \mu_{(n,m)} \otimes \mu_{(n-1)}(\Delta_x) d\mu_{(n-1,n)}(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{(n,m)} &= \bigotimes_{r=1}^n \mu_{b_{rm}}, & \mu_{(n-1)} &= \bigotimes_{r < k < n} \mu_{b_{rk}}, \\ \mu_{(n,m)}^{\tilde{\phi}_n^t, x}(x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}) &= \bigotimes_{r=1}^{n-1} \mu_{b_{rm}}(x_{rm} + tx_{rn}x_{nm}) \otimes \mu_{b_{nm}}(x_{nm}), \\ x &= (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{n-1,n}), & \Delta &= \bigcup_{x \in \mathbb{R}^{n-1}} \Delta_x, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \mu_n^{\tilde{\phi}_n^t} \sim \mu_n &\iff \bigotimes_{m=n+1}^{\infty} \mu_{(n,m)}^{\tilde{\phi}_{n,m}^t} \sim \bigotimes_{m=n+1}^{\infty} \mu_{(n,m)} \quad \text{для п.в. } x \pmod{\mu_{(n-1,n)}} \\ &\iff H\left(\bigotimes_{m=n+1}^{\infty} \mu_{(nm)}^{\tilde{\phi}_{n,m}^t}, \bigotimes_{m=n+1}^{\infty} \mu_{(nm)}\right) > 0 \quad \text{для п.в. } x \pmod{\mu_{(n-1,n)}}. \end{aligned}$$

Окончательно, для п.в. $x \pmod{\mu_{(n-1,n)}}$ имеем при $\sum_{r=1}^{n-1} S_{rn}^L(b) b_{rn}^{-1} < \infty$

$$H\left(\bigotimes_{m=n+1}^{\infty} \mu_{(nm)}^{\tilde{\phi}_{n,m}^t}, \bigotimes_{m=n+1}^{\infty} \mu_{(nm)}\right) = \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{b_{rm}}{b_{nm}} x_{rn}^2\right)^{-1/2} > 0.$$

Для доказательства леммы 4 покажем, что на плотном подмножестве $D = \{\text{пространство многочленов от переменных } (x_{kn})_{k \leq n}\}$ в пространстве $H = L^2(B^\infty, d\mu_b)$ имеется сходимостъ (где $f \in D$) $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_{n+m}(t) - V_n(t))f = 0$. В силу финитности функции $f \in D$ при некотором p имеем $f = \mathbf{1} \otimes f_{(p)} \in H^{(p)} \otimes H_{(p)} = H$, где

$$\begin{aligned} H_{(p)} &= L^2(B_{(p)}, \mu_{(p)}), \quad H^{(p)} = L^2(B^{(p)}, \mu^{(p)}), \\ B_{(p)} &= \left\{x \in B^\infty \mid x = I + \sum_{r < k \leq p} x_{rk} E_{rk}\right\}, \\ B^{(p)} &= \left\{x \in B^\infty \mid x = I + \sum_{r < k, p < k} x_{rk} E_{rk}\right\}, \\ \mu_{(p)} &= \bigotimes_{r < k \leq p} \mu_{b_{rk}}, \quad \mu^{(p)} = \bigotimes_{r < k, p < k} \mu_{b_{rk}}. \end{aligned}$$

Так как при $n \geq p$ имеем $(V_n(t))^{-1} V_{n+m}(t) = [V_n(t)^{-1} V_{n+m}(t)]^{(p)} \otimes I_{(p)}$, где $[V]^{(p)}$ — проекция оператора $V \in L(H)$ на подпространство $H^{(p)} \otimes \mathbf{1}$ пространства $H = H^{(p)} \otimes H_{(p)}$, то в силу (2)

$$\begin{aligned} \|(V_{n+m}(t) - V_n(t))f\|^2 &= \|([V_n(t)^{-1} V_{n+m}(t)]^{(p)} \otimes I_{(p)} - I^{(p)} \otimes I_{(p)})\mathbf{1} \otimes f_{(p)}\|^2 \\ &= \|([V_n(t)^{-1} V_{n+m}(t)]^{(p)} - I^{(p)})\mathbf{1}\|_{H^{(p)}}^2 \|f_{(p)}\|_{H_{(p)}}^2 \\ &\leq \|f_{(p)}\|_{H_{(p)}}^2 t^2 \|\mathcal{A}_{n,n+m}\mathbf{1}\|^2 = \|f_{(p)}\|_{H_{(p)}}^2 t^2 \sum_{k=n+1}^{n+m} \|A_k \mathbf{1}\|^2 \\ &= \|f_{(p)}\|_{H_{(p)}}^2 \frac{t^2}{8} \sum_{k=n+1}^{n+m} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{S_{rk}^L(b)}{b_{rk}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}_{n,n+m}$ — генератор однопараметрической группы унитарных операторов $(V_n(t))^{-1} V_{n+m}(t)$. Таким образом,

$$V(t) = \text{s-lim}_n V_n(t), \quad (V(t)f)(x) = \left(\frac{d\mu_b(\tilde{\Phi}^t(x))}{d\mu_b(x)}\right)^{1/2} f(\tilde{\Phi}^t(x))$$

— унитарный оператор; поэтому $\int (d\mu_b(\tilde{\Phi}^t(x))/d\mu_b(x)) d\mu_b(x) = \|V(t)\mathbf{1}\|^2 = \|\mathbf{1}\|^2 = 1$. Следовательно (см. теорему 4 §15 и замечание к теореме 1 §16 из [9]), $\mu_b^{\tilde{\Phi}^t} \sim \mu_b$ и $\mu_b^{\tilde{\Phi}} \sim \mu_b$.

Автор выражает благодарность Ю. М. Березанскому за большое внимание к работе и рецензенту за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dixmier J. Les C^* -algebras et leur representations, Gautiers-Villars, Paris, 1969.
2. Исмаилов Р. С. Функци. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 73–74 (1981).
3. Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Testard D. J. Funct. Anal., **41**, 378–396 (1981).
4. Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Testard D., Vershik A. J. Funct. Anal., **51**, 115–131 (1983).
5. Kosyak A. V. Selecta. Math. Soviet., **11**, 241–291 (1992).
6. Kosyak A. V. J. Funct. Anal., **125**, 493–547 (1994).
7. Косьяк А. В. Функци. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 82–83 (1990).
8. Го Х.-С. Гауссовы меры в банаховых пространствах. Мир, М., 1976.
9. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1975.

Институт математики
Академии наук Украины

Поступило в редакцию
21 января 1998 г.

УДК 517.9

Проблема Рохлина о кратном перемешивании в классе действий положительного локального ранга*

© 2000. В. В. Рыжиков

1. В. А. Рохлин [1] ввел в рассмотрение свойство кратного перемешивания и поставил вопрос, влечет ли за собой свойство перемешивания кратности 1 свойства перемешивания кратности $k > 1$. Напомним, что автоморфизм T пространства Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mu(X) = 1$, обладает свойством *перемешивания кратности k* , если для любых множеств $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ при $|z_p - z_q| \rightarrow \infty$, $0 \leq p < q \leq k$,

$$\mu(T^{z_0}A_0 \cap T^{z_1}A_1 \cap \dots \cap T^{z_k}A_k) \longrightarrow \mu(A_0)\mu(A_1) \dots \mu(A_k).$$

Говорят, что автоморфизм T обладает *локальным рангом $\beta > 0$* , если для некоторой последовательности $U_j = \bigsqcup_{k \in Q_j} T^z B_j$ башен Рохлина–Халмоша, где $Q_j = \{0, 1, \dots, h_j\}$, выполнены следующие условия: $\mu(U_j) \rightarrow \beta$ и для каждого $A \in \mathcal{B}$ пересечение $U_j \cap A$ асимптотически близко к объединению некоторого набора этажей в башне. Это означает, что $\mu((U_j \cap A) \Delta \bigsqcup_{z \in S_j} T^z B_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности множеств $S_j \subset \{0, 1, \dots, h(j) - 1\}$ (зависящих от A). Для $\mathbb{Z}^n$ -действий и $\mathbb{R}^n$ -действий (поток) определение аналогично, причем конфигурации Q_j имеют вид

$$Q_j = \{0, 1, \dots, h_1(j)\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, h_n(j)\}, \quad h_m(j) \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty, 1 \leq m \leq n.$$

*Работа поддержана грантами РФФИ 96-01-00713 и INTAS 00418i96.