Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Мустафаев, О радикале некоторого класса банаховых алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 3, 89–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2870>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:13:56

УДК 517.98

О радикале некоторого класса банаховых алгебр

© 2007. Г. С. МУСТАФАЕВ

Пусть A — комплексная банахова алгебра. Известно ([1, с. 50], [2], [3]), что во втором сопряженном пространстве A^{**} можно определить умножение (относительно которого A^{**} становится банаховой алгеброй), являющееся естественным продолжением исходного умножения в A . Это умножение (которое называется *умножением Аренса*), определяется следующим образом:

- (а) $\langle \varphi \cdot a, b \rangle = \langle \varphi, ab \rangle$ для всех $a, b \in A$ и $\varphi \in A^*$;
- (б) $\langle H \cdot \varphi, a \rangle = \langle H, \varphi \cdot a \rangle$ для всех $a \in A$, $\varphi \in A^*$ и $H \in A^{**}$;
- (с) $\langle F \circ H, \varphi \rangle = \langle F, H \cdot \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in A^*$ и $F, H \in A^{**}$.

Алгебру A можно считать подалгеброй алгебры A^{**} . Как обычно, $\text{Rad}(A)$ будет обозначать радикал (Джекобсона) алгебры A . Цивин и Юд [2, теорема 3.15] доказали, что если G — компактная абелева группа, то

$$\text{Rad}(L^1(G)^{**}) = C(G)^\perp = (L^\infty(G) * L^1(G))^\perp.$$

В этой заметке мы покажем, что для некоторых классов банаховых алгебр A с вполне несовершенным структурным пространством справедливы равенства $\text{Rad}(A) = {}^\perp(A^* \cdot A)$ и $\text{Rad}(A^{**}) = (A^* \cdot A)^\perp$, где

$$A^* \cdot A = \{\varphi \cdot a : \varphi \in A^*, a \in A\}.$$

Напомним, что замкнутое подмножество S хаусдорфова топологического пространства называется *вполне несовершенным*, если оно не содержит непустых совершенных подмножеств. Через $\hat{A}$ будем обозначать множество классов эквивалентности неприводимых представлений алгебры A .

Лемма 1. Пусть A — банахова алгебра, такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) если A имеет ограниченную аппроксимативную единицу (о.а.е.), то

$$\overline{\text{span}} \{(\ker \sigma)^\perp : \sigma \in \hat{A}\} \subset A^* \cdot A;$$

- (б) если $A^* \cdot A \subset \overline{\text{span}} \{(\ker \sigma)^\perp : \sigma \in \hat{A}\}$, то

$$\text{Rad}(A) = {}^\perp(A^* \cdot A) \quad \text{и} \quad \text{Rad}(A^{**}) = (A^* \cdot A)^\perp.$$

На основе этой леммы мы получаем такую теорему:

Теорема 2. Пусть A — полупростая банахова алгебра, такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Если операторы умножения слева (соответственно справа) в A на элементы из A слабо компактны, то

$$\text{Rad}(A^{**}) = (A^* \cdot A)^\perp.$$

Если G — компактная группа, то алгебра $L^1(G)$ полупроста и любое ее неприводимое представление конечномерно. С другой стороны, из теории Петера–Вейля следует, что в $L^1(G)$ полна система конечномерных левых (соответственно правых) идеалов. Отсюда вытекает, что для произвольного $f \in L^1(G)$ оператор умножения слева L_f (соответственно оператор умножения справа R_f)

аппроксимируется (по операторной норме) конечномерными операторами. Следовательно, L_f (соответственно R_f) — компактный оператор. Далее, поскольку

$$L^\infty(G) \cdot L^1(G) = L^\infty(G) * L^1(G) = C(G),$$

то из теоремы 2 получаем такое

Следствие 3. *Если G — компактная группа (не обязательно абелева), то*

$$\text{Rad}(L^1(G)^{**}) = C(G)^\perp.$$

Пусть A — банахова алгебра с о.а.е. и E есть $\sigma(A^{**}, A^*)$ -предельная точка о.а.е. в A . Нетрудно заметить, что $F \circ E = F$ при всех $F \in A^{**}$. Заметим также, что отображение $P_E: A^{**} \rightarrow A^{**}$, определенное равенством $P_E(F) = E \circ F$, является ограниченным проектором и поэтому индуцирует разложение

$$A^{**} = P_E(A^{**}) \oplus (1 - P_E)A^{**}.$$

Нетрудно заметить, что $P_E(A^{**})$ является замкнутой подалгеброй алгебры A^{**} и $(1 - P_E)A^{**} = (A^* \cdot A)^\perp$.

Говорят [1, с. 253], что банахова алгебра A допускает *сильное веддербёрновское разложение*, если существует такая замкнутая подалгебра B алгебры A , что $A = B \oplus \text{Rad}(A)$.

Следствие 4. *Пусть A — полупростая банахова алгебра, такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Предположим, что A имеет о.а.е. и операторы умножения слева (соответственно справа) в A на элементы из A слабо компактны. Тогда A^{**} допускает сильное веддербёрновское разложение.*

Пусть A — коммутативная банахова алгебра, а M_A — ее пространство максимальных идеалов. Через $\hat{a}$ будем обозначать преобразование Гельфанда элемента $a \in A$. Если A не имеет единичного элемента, то алгебру, полученную из A присоединением единицы, будем обозначать через A_1 .

Пусть A — регулярная (по Шилову) полупростая банахова алгебра и $A_{00} = \{a \in A : \text{supp } \hat{a} \text{ компактен}\}$. Хорошо известно, что $J_\phi = \overline{\{a \in A_{00} : \phi \notin \text{supp } \hat{a}\}}$ для произвольного $\phi \in M_A$ есть наименьший замкнутый идеал в A с оболочкой $\{\phi\}$, а $I_\phi = \{a \in A : \hat{a}(\phi) = \{0\}\}$ — наибольший замкнутый идеал с оболочкой $\{\phi\}$. Алгебра A называется *сильно регулярной*, если каждая точка из M_A (а в случае, когда A не имеет единичного элемента, то $\{\infty\}$) является множеством синтеза для A (для A_1). Таким образом, A сильно регулярна тогда и только тогда, когда $I_\phi = J_\phi$ для всех $\phi \in M_A$ и $\overline{A_{00}} = A$. Напомним также, что w^* -спектр $\sigma_*(\varphi)$ функционала $\varphi \in A^*$ определяется как оболочка идеала

$$I_\varphi = \{a \in A : \varphi \cdot a = 0\}.$$

Теорема 5. *Пусть A — сильно регулярная банахова алгебра, а B — коммутативная банахова алгебра, такая, что M_B дискретно. Если существует непрерывный гомоморфизм $h: A \rightarrow B$ с плотным образом, то*

$$\text{Rad}(B) = {}^\perp(B^* \cdot B) \quad \text{и} \quad \text{Rad}(B^{**}) = (B^* \cdot B)^\perp.$$

Напомним [9, с. 13], что если A — коммутативная банахова алгебра, то ${}^\perp(A^* \cdot A)$ называется ее *аннуляторным идеалом*.

Следствие 6. Пусть A — сильно регулярная банахова алгебра, а B — коммутативная банахова алгебра, такая, что M_B дискретно. Предположим, что существует непрерывный гомоморфизм $h: A \rightarrow B$ с плотным образом. Тогда B является полупростой только в том случае, когда она имеет нулевой аннуляторный идеал.

Следующий пример показывает, что без условия сильной регулярности следствие 6 перестает быть верным.

Пример 7. Пусть $A = C^1[-1, 1]$ — банахова алгебра непрерывно дифференцируемых функций на $[-1, 1]$. Тогда $I_0 = \{f \in A : f(0) = 0\}$ и $J_0 = \{f \in A : f(0) = f'(0) = 0\}$ [5, §37]. Поэтому A не является сильно регулярной. Если положить $B = A/J_0$, то можно убедиться, что B имеет нулевой аннуляторный идеал и $M_B = \{0\}$. Однако $\text{Rad}(B) = I_0/J_0 \neq \{0\}$.

Пусть X — банахово пространство, $B(X)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в X и $T \in B(X)^{-1}$. Известная теорема Гельфанда [4] утверждает, что если $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T^n\| < \infty$ и $\sigma(T) = \{1\}$, то $T = I$ — единичный оператор в X . В качестве обобщения теоремы Гельфанда в монографии Хилле и Филлипса [8, теорема 4.10.1] доказано, что если $T \in B(X)^{-1}$, причем $\|T^n\| = o(|n|)$ и $\sigma(T) = \{1\}$, то $T = I$.

Как применение теоремы 5 ниже приводится более общий результат.

Пусть G — локально компактная абелева группа, а $\hat{G}$ — группа ее характеров. Напомним, что *весовая функция* — это непрерывная функция $\omega(g)$ на G со свойствами $\omega(g) \geq 1$ и $\omega(g+s) \leq \omega(g) + \omega(s)$ для всех $g, s \in G$. Алгебра Берлинга с весом ω задается формулой

$$L_\omega^1(G) = \left\{ f \in L^1(G) : \|f\|_\omega = \int_G |f(g)| \omega(g) dg < \infty \right\}.$$

Известно [15, с. 132], что если ω — весовая функция на G , удовлетворяющая условию Шилова, то алгебра $L_\omega^1(G)$ сильно регулярна.

Пусть $g \rightarrow T(g)$ — равномерно непрерывное представление группы G в банаховом пространстве X . Заметим, что функция

$$\omega_T(g) = \max\{\|T(g)\|, \|T(-g)\|\}$$

является весовой функцией на G . Если положить $L_T(G) = \overline{\text{span}}\{T(g) : g \in G\}$, то $L_T(G)$ — коммутативная банахова алгебра с единицей I . Для произвольной функции $f \in L_{\omega_T}^1(G)$ определим $T_f \in B(X)$ равенством $T_f = \int_G f(g) T(g) dg$. Нетрудно проверить, что отображение $h: L_{\omega_T}^1(G) \rightarrow L_T(G)$, определяемое равенством $h(f) = T_f$, является непрерывным гомоморфизмом с плотным образом. В силу следствия 6 получаем, что если 1) весовая функция $\omega_T(g)$ удовлетворяет условию Шилова и 2) пространство максимальных идеалов алгебры $L_T(G)$ — конечное множество, то $L_T(G)$ — полупростая алгебра.

Теперь, применяя теорему Шилова об идемпотентах из [1, с. 109], получаем такое

Следствие 8. Предположим, что пространство максимальных идеалов алгебры $L_T(G)$ состоит из n точек и весовая функция $\omega_T(g)$ удовлетворяет следующим условиям Шилова:

(i) $\omega_T(n g) = O(|n|^\alpha)$ для некоторого $\alpha = \alpha(g) > 0$ и для каждого $g \in G$ при $|n| \rightarrow \infty$;

(ii) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \inf \frac{\omega_T(ng)}{|n|} = 0$ для каждого $g \in G$.

Тогда существуют попарно ортогональные идемпотенты $p_1, \dots, p_n$ в $L_T(G)$, такие, что $p_1 + \dots + p_n = I$ и $T(g) = \chi_1(g)p_1 + \dots + \chi_n(g)p_n$ для некоторых $\chi_1, \dots, \chi_n$ в $\hat{G}$.

Следующий результат является частным случаем одной теоремы Горина [6].

Теорема 9. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с вполне несовершенным пространством максимальных идеалов. Если существует непрерывный гомоморфизм $h: L^1(G) \rightarrow A$ с плотным образом, то A — полупростая алгебра.

Заметим, что предположений теоремы 9 недостаточно для полупростоты алгебры A^{**} . Чтобы убедиться в этом, положим $A = L^1(G)$, где G — компактная абелева группа. Так как $M_A (= \hat{G})$ дискретно, то оно вполне несовершенно. Но алгебра A^{**} не является полупростой, потому что в силу теоремы Цивина и Юда, приведенной выше, $\text{Rad}(A^{**}) = C(G)^\perp$.

Однако имеет место следующая

Теорема 10. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с вполне несовершенным пространством максимальных идеалов, и пусть существует непрерывный гомоморфизм $h: L^1(G) \rightarrow A$ с плотным образом. Если алгебра A^{**} коммутативна, то она полупростая.

Известная теорема Люмиса [12] утверждает, что если w^* -спектр функции $\varphi \in L^\infty(G)$ компактен и вполне несовершенен, то φ является почти периодической, а именно $\varphi \in \overline{\text{span}} \sigma_*(\varphi)$. С помощью теоремы Люмиса мы получаем следующее обобщение теоремы Цивина и Юда.

Теорема 11. Пусть I — замкнутый идеал в $L^1(G)$ с вполне несовершенной оболочкой и $A = L^1(G)/I$. Тогда

$$\text{Rad}(A^{**}) = (A^* \cdot A)^\perp.$$

С помощью векторного варианта теоремы Люмиса [11, §4, теорема 4] получаем такую теорему:

Теорема 12. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с вполне несовершенным пространством максимальных идеалов, и пусть существует непрерывный гомоморфизм $h: L^1(G) \rightarrow A$ с плотным образом. Если $c_0 \not\subset A^*$, то

$$\text{Rad}(A^{**}) = (A^* \cdot A)^\perp.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973. [2] P. Civin, B. Yood, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 847–870. [3] J. Duncan, S. A. R. Hosseiniun, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **84**:3–4 (1979), 309–325. [4] И. Гельфанд, *Матем. сб.*, **9** (1941), 49–50. [5] I. Gelfand, D. Raikov, G. Shilov, *Commutative Normed Rings*, Chelsea Publ. Comp., 1964 (расширенный перевод книги И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова, Г. Е. Шилова «Коммутативные нормированные кольца», Физматлит, М., 1960). [6] Е. А. Горин, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:2 (1974), 73–74. [7] Хьюитт Э., Росс К., *Абстрактный гармонический анализ*, т. 2, Наука, М., 1975. [8] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962. [9] R. Larsen, *An Introduction to the Theory of Multipliers*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971. [10] R. Larsen, *Banach Algebras*, Marcel Dekker, New York, 1973.

- [11] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во МГУ, М., 1978. [12] L. H. Loomis, *Ann. Math.* (2), **72** (1960), 362–368. [13] Ю. И. Любич, *Введение в теорию банаховых представлений групп*, Высшая школа, Харьков, 1985. [14] H. S. Mustafayev, *Bull. Polish. Acad. Sci. Math.*, **52**:4 (2004), 395–403. [15] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1968. [16] C. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

Факультет естественных и гуманитарных наук
 Университета Йузунджу Йыл, Турция
 e-mail: hsmustafayev@yahoo.com

Поступило в редакцию
 28 июня 2005 г.

УДК 517.983.243, 517.984.4

О сходимости функций нормальных операторов в сильной операторной топологии*

© 2007. О. Е. Тихонов

Всюду ниже $\mathcal{N}(H)$ обозначает множество всех ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве H , а $\text{Sp}(A)$ — спектр оператора A . Для числовой функции f соответствующая ей по спектральной теореме операторная функция обозначается той же буквой. Символ $\xrightarrow{s}$ используется для обозначения сходимости в сильной операторной топологии (далее — в s -топологии).

В работе Дэвиса [1] доказана следующая

Теорема. Пусть $A, A_n \in \mathcal{N}(H)$, и пусть $A_n \xrightarrow{s} A$. Пусть f — ограниченная борелевская функция, определенная на $\mathbb{C}$, и Γ — замкнутое подмножество в $\text{Sp}(A)$, спектральный проектор которого относительно A равен нулю. Пусть f непрерывна в каждой точке из $\text{Sp}(A) \setminus \Gamma$. Тогда $f(A_n) \xrightarrow{s} f(A)$.

Цель настоящей заметки — обобщить эту теорему таким образом, чтобы получить уточнение теоремы Кэдисона [2] о сильной непрерывности операторных функций на подмножествах нормальных операторов. При доказательстве применяются результаты и конструкции работ [1], [2]. Существенно новый момент — использование следующей топологической леммы.

Лемма 1. Пусть (X, d) — такое метрическое пространство, что все его замкнутые и ограниченные подмножества компактны. Пусть $\Omega \subset X$ и функция $f: \Omega \rightarrow [a, b]$ непрерывна на Ω . Тогда существует функция $g: X \rightarrow [a, b]$, совпадающая с f на Ω , непрерывная во всех точках из Ω и полунепрерывная сверху на X .

Доказательство. Для произвольной точки x' из замыкания $\bar{\Omega}$ множества Ω положим $g_1(x') = \limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow x'} f(x)$. Через $\text{dist}(x, \Delta)$ обозначим расстояние между точкой $x \in X$ и множеством $\Delta \subset X$. Для произвольного $x \in X$ рассмотрим непустое компактное множество $\Omega_x = \{x' \in \bar{\Omega} \mid d(x, x') = \text{dist}(x, \bar{\Omega})\}$ и положим $g(x) = \sup\{g_1(x') \mid x' \in \Omega_x\}$. Стандартным образом проверяется, что функция g удовлетворяет всем требуемым условиям.

*Работа поддержана РФФИ, проект 05-01-00799.