Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Тихонов, О сходимости функций нормальных операторов в сильной операторной топологии, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 3, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2871>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:33:08

[11] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во МГУ, М., 1978. [12] L. H. Loomis, *Ann. Math.* (2), **72** (1960), 362–368. [13] Ю. И. Любич, *Введение в теорию банаховых представлений групп*, Высшая школа, Харьков, 1985. [14] H. S. Mustafayev, *Bull. Polish. Acad. Sci. Math.*, **52**:4 (2004), 395–403. [15] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1968. [16] C. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

Факультет естественных и гуманитарных наук
Университета Йузунджу Йыл, Турция
e-mail: hsmustafayev@yahoo.com

Поступило в редакцию
28 июня 2005 г.

УДК 517.983.243, 517.984.4

О сходимости функций нормальных операторов в сильной операторной топологии*

© 2007. О. Е. Тихонов

Всюду ниже $\mathcal{N}(H)$ обозначает множество всех ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве H , а $\text{Sp}(A)$ — спектр оператора A . Для числовой функции f соответствующая ей по спектральной теореме операторная функция обозначается той же буквой. Символ $\xrightarrow{s}$ используется для обозначения сходимости в сильной операторной топологии (далее — в s -топологии).

В работе Дэвиса [1] доказана следующая

Теорема. Пусть $A, A_n \in \mathcal{N}(H)$, и пусть $A_n \xrightarrow{s} A$. Пусть f — ограниченная борелевская функция, определенная на $\mathbb{C}$, и Γ — замкнутое подмножество в $\text{Sp}(A)$, спектральный проектор которого относительно A равен нулю. Пусть f непрерывна в каждой точке из $\text{Sp}(A) \setminus \Gamma$. Тогда $f(A_n) \xrightarrow{s} f(A)$.

Цель настоящей заметки — обобщить эту теорему таким образом, чтобы получить уточнение теоремы Кэдисона [2] о сильной непрерывности операторных функций на подмножествах нормальных операторов. При доказательстве применяются результаты и конструкции работ [1], [2]. Существенно новый момент — использование следующей топологической леммы.

Лемма 1. Пусть (X, d) — такое метрическое пространство, что все его замкнутые и ограниченные подмножества компактны. Пусть $\Omega \subset X$ и функция $f: \Omega \rightarrow [a, b]$ непрерывна на Ω . Тогда существует функция $g: X \rightarrow [a, b]$, совпадающая с f на Ω , непрерывная во всех точках из Ω и полунепрерывная сверху на X .

Доказательство. Для произвольной точки x' из замыкания $\bar{\Omega}$ множества Ω положим $g_1(x') = \limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow x'} f(x)$. Через $\text{dist}(x, \Delta)$ обозначим расстояние между точкой $x \in X$ и множеством $\Delta \subset X$. Для произвольного $x \in X$ рассмотрим непустое компактное множество $\Omega_x = \{x' \in \bar{\Omega} \mid d(x, x') = \text{dist}(x, \bar{\Omega})\}$ и положим $g(x) = \sup\{g_1(x') \mid x' \in \Omega_x\}$. Стандартным образом проверяется, что функция g удовлетворяет всем требуемым условиям.

*Работа поддержана РФФИ, проект 05-01-00799.

Лемма 2. Пусть Δ — замкнутое подмножество метрического пространства (X, d) . Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, равна 0 на Δ и непрерывна в каждой точке из Δ . Тогда существует ограниченная непрерывная функция h на X , такая, что $h = 0$ на Δ и $|f| \leq h$ на X .

Доказательство. Будем считать, что $|f(x)| \leq 1$ для всех $x \in X$. Следуя [1], рассмотрим множества $X_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq 2^{-n}\}$ и положим $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \text{dist}(x, \Delta) / (\text{dist}(x, \Delta) + \text{dist}(x, \overline{X_n}))$. Тогда функция h обладает всеми требуемыми свойствами.

Далее, для $\Omega \subset \mathbb{C}$ положим $\mathcal{N}(H)_{\Omega} = \{A \in \mathcal{N}(H) \mid \text{Sp}(A) \subset \Omega\}$. При доказательстве основного результата мы будем использовать следующий ослабленный вариант теоремы 4.2 из [2].

Предложение 3. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, такая, что $\sup\{|f(z)|/(1+|z|) \mid z \in \mathbb{C}\} < +\infty$. Тогда операторная функция $f: \mathcal{N}(H) \rightarrow \mathcal{N}(H)$ непрерывна на $\mathcal{N}(H)$ в s -топологии.

Теорема 4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{N}(H)_{\Omega}$ и Γ — замкнутое подмножество в $\text{Sp}(A)$, спектральный проектор которого относительно A равен нулю. Пусть функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что ее ограничение на любое ограниченное замкнутое в $\mathbb{C}$ подмножество множества Ω измеримо по Борелю, $\sup\{|f(z)|/(1+|z|) \mid z \in \Omega\} < +\infty$ и f непрерывна в каждой точке из $\text{Sp}(A) \setminus \Gamma$. Тогда, если сеть $\{A_{\alpha}\}$ операторов из $\mathcal{N}(H)_{\Omega}$ сходится к A в s -топологии, то $f(A_{\alpha}) \xrightarrow{s} f(A)$.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для вещественнозначной функции f , что мы и сделаем ниже в три этапа.

1. Предположим, что f ограничена на Ω , скажем $|f| \leq 1$, и непрерывна во всех точках из $\text{Sp}(A)$. По теореме Титце–Урысона существует непрерывная функция $g: \mathbb{C} \rightarrow [-1, 1]$, совпадающая с f на $\text{Sp}(A)$. По предложению 3 $g(A_{\alpha}) \xrightarrow{s} g(A) = f(A)$. По лемме 2 существует ограниченная непрерывная функция h на Ω , такая, что $h = 0$ на $\text{Sp}(A)$ и $|f - g| \leq h$ на Ω .

1а. Теперь предположим дополнительно, что $\Omega = \mathbb{C}$. Тогда $h(A_{\alpha}) \xrightarrow{s} h(A) = 0$ по предложению 3. Так как $0 \leq (f - g + h)(A_{\alpha}) \leq 2h(A_{\alpha})$, то $(f - g + h)(A_{\alpha}) \xrightarrow{s} 0$. Следовательно, $f(A_{\alpha}) = (f - g + h)(A_{\alpha}) + g(A_{\alpha}) - h(A_{\alpha}) \xrightarrow{s} f(A)$.

1б. Если $\Omega \neq \mathbb{C}$, то, согласно лемме 1, существует ограниченная функция $k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, которая продолжает h , непрерывна во всех точках из Ω и полунепрерывна сверху на $\mathbb{C}$, а следовательно, измерима по Борелю. Воспользовавшись случаем 1а, получаем, что $h(A_{\alpha}) = k(A_{\alpha}) \xrightarrow{s} k(A) = h(A) = 0$, и остается дословно повторить два последних предложения предыдущего абзаца.

2. Переход от ограниченных функций, непрерывных во всех точках из $\text{Sp}(A)$, к ограниченным функциям, которые на $\text{Sp}(A)$ могут иметь точки разрыва, осуществляется точно так же, как в [1].

3. В общем случае положим $g(z) = f(z)/(1+|z|)$. Тогда $g(A_{\alpha}) \xrightarrow{s} g(A)$ по предыдущему и $1+|A_{\alpha}| \xrightarrow{s} 1+|A|$ по предложению 3. Отсюда выводим, что $f(A_{\alpha}) = g(A_{\alpha})(1+|A_{\alpha}|) \xrightarrow{s} g(A)(1+|A|) = f(A)$.

Следствие 5. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$, функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на Ω и $\sup\{|f(z)|/(1+|z|) \mid z \in \Omega\} < +\infty$. Тогда операторная функция $f: \mathcal{N}(H)_{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}(H)$ непрерывна на $\mathcal{N}(H)_{\Omega}$ в s -топологии.

Следствие 5 уточняет теорему 4.2 из [2], в которой на множество Ω налагалось ограничение $\overline{(\Omega \setminus \Omega)} \cap \Omega = \emptyset$. С этим или более сильным ограничением упомянутая теорема приводится в ряде монографий по теории операторных алгебр (например, [3, теорема II.4.7], [4, A.2]). Заметим еще, что для самосопряженных операторов результат, аналогичный следствию 5, был приведен в [5, теорема 2.7].

Автор выражает признательность А. Н. Шерстневу, привлечшему в свое время его внимание к задачам непрерывности операторных функций.

Список литературы

- [1] E. B. Davies, J. London Math. Soc. (2), **4** (1972), 435–436. [2] R. V. Kadison, Pacific J. Math., **26** (1968), 121–129. [3] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979. [4] S. Strătilă, *Modular theory in operator algebras*, Editura Academiei, Bucuresti; Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, 1981. [5] О. Е. Тихонов, Изв. ВУЗов, матем., 1987, № 1, 77–79.

НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного университета
e-mail: Oleg.Tikhonov@ksu.ru

Поступило в редакцию
3 февраля 2006 г.