Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 4, 1–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2875>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:55:44

К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях*

© 2007. М. С. Агранович

§1. Содержание работы

В этой статье рассматриваются задачи Дирихле и Неймана в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, для сильно эллиптических систем со структурой Дуглиса–Ниренберга. Исходная постановка задач — вариационная, или слабая, т. е. классическая, с использованием L_2 -пространств Соболева–Слободенцкого $H^\sigma(\Omega) = H_2^\sigma(\Omega)$, см. §2. Но речь идет о регулярности решений в терминах их принадлежности (и принадлежности правых частей) к пространствам потенциалов $H_p^\sigma(\Omega)$ или пространствам Бесова $B_p^\sigma(\Omega)$. Предположения о гладкости коэффициентов в известной мере минимизированы. Как и в статье автора [3], рассмотрения основаны на методе исследования регулярности, предложенном Саваре в [23] для случая $p = 2$, см. §3, и на средствах теории интерполяции. Вариационная постановка при этом, как и в [3], обобщается на пространства $H_p^\sigma(\Omega)$, а также на пространства $B_p^\sigma(\Omega)$.

Для уравнений высокого порядка в липшицевой области непросто является вопрос о смысле граничных условий. В основной части нашей статьи они предполагаются однородными и легко описываются выбором пространств. В задаче Дирихле с неоднородными граничными условиями мы предполагаем наличие функции, которая является носителем данных Дирихле. Такая точка зрения общеизвестна. В п. 5.1 мы показываем, что она согласуется с заданием этих данных в пространстве так называемых наборов Уитни, ср. [28] и [1]. Кое-что мы сумеем сказать и о задаче с неоднородными условиями Неймана в п. 5.2.

В [3] рассмотрены сильно эллиптические системы 2-го порядка в предположении их формальной самосопряженности. В настоящей статье рассматриваются системы Дуглиса–Ниренберга произвольных порядков, и в задаче Дирихле требуется положительная определенность действительной части главного символа, а в задаче Неймана — коэрцитивность соответствующей интегральной формы на простейшем пространстве, в котором можно искать вариационное решение. При этом на структуру формы накладывается дополнительное ограничение, см. ниже (2.11). Оно на самом деле необходимо для использования метода Саваре и в рассмотренном в [3] случае. Наиболее существенное продвижение по сравнению с [3] состоит в том, что на плоскости параметров s и $t = 1/p$ однозначная разрешимость получена в прямоугольнике, боковые стороны которого находятся на сторонах единичного квадрата Q (см. обозначения в [3] и ниже в §4). Это показано в §4 при помощи оценки из [25]. В [3] результаты были получены в

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №07-01-00287-а.

пространствах $H_p^\sigma(\Omega)$ для прямоугольника, лежащего строго внутри Q . Усилиев их, мы в известной мере, в рамках рассматриваемых здесь задач, «догоняем» работы «невариационного» направления, см. следующий абзац, и получаем новые результаты для систем в случае задачи Неймана. В п. 5.5 мы указываем аналоги наших результатов для тех же задач в пространствах Бесова $B_p^\sigma(\Omega)$ вместо пространства потенциалов $H_p^\sigma(\Omega)$, ср. [11], [10], [15] и [1].

Рассмотрения в [23], [2], [3], более ранней работе Костабеля [6] и в настоящей статье являются альтернативой к глубокому «невариационному» подходу к исследованию граничных задач в липшицевых областях. Соответствующая литература чрезвычайно обширна в случае уравнений и систем 2-го порядка, см., в частности, ссылки в [3] и в названных там работах. Но и уравнениям и системам высоких порядков посвящено немало работ, назовем статьи [8], [28], [20], [29], [7], [1], [30], [24], [14], в которых можно найти дальнейшие ссылки. Мы кратко сравним наши результаты с результатами этих работ в §6. Пока отметим только, что при наших предположениях и нашем подходе задача Неймана не сложнее, чем задача Дирихле.

Автор искренне благодарен Р. В. Дудучаве, просмотревшему рукопись и сделавшему полезные замечания.

§2. Постановка вариационных задач

Система Дуглиса–Ниренберга — довольно громоздкий объект, но мы введем обозначения так, чтобы читатель мог при желании проследить все построения на случае скалярного уравнения.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей Γ . Предположим, что в Ω задана система уравнений в частных производных

$$Lu(x) = L_0u(x) + \dots + \tau u(x) = f(x). \quad (2.1)$$

Здесь $u(x) = (u_1(x), \dots, u_l(x))'$ и $f(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x))'$ — вектор-функции, столбцы высоты l . Соответственно L и старшая часть L_0 этого оператора — матричные операторы с размерами матриц $l \times l$. Мы предположим, что задана система целых положительных чисел $m_1, \dots, m_l$ и что элементы с индексами j, k этих матриц имеют порядки не выше $m_j + m_k$. Старшие части $L_{j,k}$ этих скалярных операторов записываются в дивергентной форме:

$$L_{j,k}(x, D) = \sum_{\substack{|\alpha|=m_j, \\ |\beta|=m_k}} D^\alpha [a_{\alpha,\beta}^{j,k}(x) D^\beta \cdot]. \quad (2.2)$$

Коэффициенты $a_{\alpha,\beta}^{j,k}(x)$, вообще говоря, комплекснозначны, и формальная самосопряженность оператора (2.2) не предполагается. Минимальное предположение о регулярности коэффициентов состоит в том, что они непрерывны в $\bar{\Omega}$. Этого достаточно при выводе неравенства Гординга [18]. *Начиная с §3, мы предполагаем их удовлетворяющими равномерному условию Липшица.* Как обычно, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = -i\partial/\partial x_j$. Порядок дифференцирования в этих смешанных производных безразличен, так как они применяются к функциям из пространств, в которых плотны гладкие функции. Числовой параметр τ имеет неотрицательную действительную часть. Мы не выписываем обозначенные многоточием остальные младшие члены и до п. 5.3 предполагаем, что они отсутствуют. Главный символ системы есть матрица $L_0(x, \xi)$ с элементами $L_{j,k}(x, \xi)$.

Он подчиняется условию сильной эллиптичности — условию равномерной положительной определенности его действительной части при вещественных ξ :

$$\operatorname{Re} L_0(x, \xi) \geq C_1 E(\xi), \quad (2.3)$$

где $E(\xi)$ — диагональная матрица с элементами $|\xi|^{2m_j}$ на главной диагонали ($j = 1, \dots, l$) и C_1 — положительная постоянная. Как обычно, под действительной частью матрицы понимается ее полусумма с эрмитово сопряженной матрицей. Определение сильной эллиптичности было введено в работе Вишика [31] в случае совпадения чисел m_j . Общий случай рассмотрен в работе Ниренберга [18]. Сильно эллиптические системы со структурой Дуглиса–Ниренберга (т. е. с не одинаковыми m_j) встречаются в задачах для тонких упругих оболочек и пластин. См., например, [9], приложение 2, §2, и [16], §4. Там, правда, старшая часть системы распадается на матричный оператор Ламе с $m = 1$ и скалярный бигармонический оператор с $m = 2$.

Пусть $(u, v)_\Omega$ — стандартное скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ вектор-функций размерности l . Предположив на минуту u и v финитными бесконечно гладкими функциями с носителями, лежащими внутри Ω , интегрированием по частям выражения $(L_0(x, D)u, v)_\Omega$ получим полуторалинейную форму

$$\Phi_0(u, v) = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^l \sum_{\substack{|\alpha|=m_j, \\ |\beta|=m_k}} a_{\alpha,\beta}^{j,k}(x) D^\beta u_k(x) \overline{D^\alpha v_j(x)} dx. \quad (2.4)$$

Положим

$$\Phi_\tau(u, v) = \Phi_0(u, v) + \tau(u, v)_\Omega, \quad \Phi_\tau(u) = \Phi_\tau(u, u) \quad (\tau \geq 0). \quad (2.5)$$

До §5 *граничные условия в задачах Дирихле и Неймана предполагаются однородными*. Вариационные постановки этих задач состоят в том, что решение u должно удовлетворять вариационному тождеству

$$(f, v)_\Omega = \Phi_\tau(u, v) \quad (2.6)$$

при произвольной пробной функции v . Это просто формула Грина без граничных членов. Но здесь нужно указать функциональные пространства для u , v и f .

Сначала нам будут нужны простейшие пространства скалярных функций. Пусть σ — вещественное число. Через $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ обозначается L_2 -пространство Соболева–Слободецкого порядка σ в $\mathbb{R}^n$ (см. начало §4 при $p = 2$). Через $H^\sigma(\Omega)$ — пространство сужений функций из $H^\sigma = H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ (обобщенных функций при $\sigma < 0$) на Ω с нормой, равной нижней грани норм в H^σ всех функций с данным сужением. Через $\tilde{H}^\sigma(\Omega)$ — подпространство функций в H^σ с носителями в $\bar{\Omega}$ и нормой, которая берется из H^σ . В $H^\sigma(\Omega)$ плотны функции, гладкие в $\bar{\Omega}$, а в $\tilde{H}^\sigma(\Omega)$ — гладкие функции с носителями в Ω , продолженные нулем вне Ω .

При $\sigma > -1/2$, $\sigma - [\sigma] \neq 1/2$ ($[\sigma]$ — целая часть числа σ) пространство $\tilde{H}^\sigma(\Omega)$ можно отождествить с пополнением $\mathring{H}^\sigma(\Omega)$ линейала $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^\sigma(\Omega)$, нормы эквивалентны.

Пространства $H^\sigma(\Omega)$ и $\tilde{H}^{-\sigma}(\Omega)$ взаимно сопряжены относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ с плотных в них гладких функций на

прямое произведение этих пространств. См. ниже формулу (4.3) при $p = p' = 2$, а также пояснения в [3], §3, и [4].

Теперь введем пространства вектор-функций

$$\mathcal{H}^{\pm \mathbf{m}}(\Omega) = H^{\pm m_1}(\Omega) \times \dots \times H^{\pm m_l}(\Omega), \quad \widetilde{\mathcal{H}}^{\pm \mathbf{m}}(\Omega) = \widetilde{H}^{\pm m_1}(\Omega) \times \dots \times \widetilde{H}^{\pm m_l}(\Omega).$$

Нормы вектор-функций в этих пространствах определяются как квадратные корни из суммы квадратов норм их компонент. В задаче Дирихле

$$u, v \in \widetilde{\mathcal{H}}^{\mathbf{m}}(\Omega), \quad f \in \mathcal{H}^{-\mathbf{m}}(\Omega), \quad (2.7)$$

и здесь заложено равенство нулю данных Дирихле у u и v . В задаче Неймана

$$u, v \in \mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega), \quad f \in \widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}}(\Omega). \quad (2.8)$$

В обоих случаях пространства для v и для f взаимно сопряжены относительно продолжения на их прямое произведение скалярного произведения в

$$\mathcal{L}_2(\Omega) = L_2(\Omega) \times \dots \times L_2(\Omega)$$

с гладких вектор-функций.

Напомним неравенство Гординга в следующей форме: если система сильно эллиптическая и $\operatorname{Re} \tau$ достаточно велико, то для функций v из $\widetilde{\mathcal{H}}^{\mathbf{m}}(\Omega)$

$$\operatorname{Re} \Phi_{\tau}(v) \geq C_2 \|v\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\mathbf{m}}(\Omega)}^2 \quad (2.9)$$

с положительной постоянной C_2 (см. [18]). Неравенство в обратную сторону очевидно, так что квадратный корень из $\operatorname{Re} \Phi_{\tau}(v)$ оказывается нормой, эквивалентной обычной норме в этом пространстве. Из (2.9) следует однозначная разрешимость задачи Дирихле: единственность сразу получается из равенства нулю формы $\Phi_{\tau}(u)$ при $f = 0$, а существование проверяется при помощи известной леммы Вишика [31]–Лакса–Мильграма [13].

В случае задачи Неймана мы, как это принято, предположим выполненным аналогичное неравенство для функций из $\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)$ при достаточно большом $\operatorname{Re} \tau$:

$$\operatorname{Re} \Phi_{\tau}(v) \geq C_2 \|v\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)}^2. \quad (2.10)$$

Будем говорить, что это *условие коэрцитивности формы* $\operatorname{Re} \Phi_{\tau}(v)$ *на пространстве* $\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)$. Известны достаточные условия; см., в частности, [17], гл. 3, §7, а также [2], §1, и приведенные там ссылки. См. также примеры немного ниже. При условии коэрцитивности (2.10) квадратный корень из $\operatorname{Re} \Phi_{\tau}(v)$ — норма в $\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)$, эквивалентная обычной, и задача Неймана оказывается однозначно разрешимой.

Метод Саваре не является всеобъемлющим. Для исследования регулярности решений задач Дирихле и Неймана этим методом нам нужно наложить на систему дополнительное условие:

$$F(x, \zeta) := \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^l \sum_{\substack{|\alpha|=m_j, \\ |\beta|=m_k}} a_{\alpha,\beta}^{j,k}(x) \zeta_{\beta}^k \bar{\zeta}_{\alpha}^j \geq 0 \quad (2.11)$$

для любых чисел ζ_{α}^j во всех точках $x \in \Omega$. Это условие равносильно неотрицательности выражения под знаком интеграла в формуле для $\Phi_0(u)$ в каждой точке на всех рассматриваемых функциях $u(x)$.

Приведем *примеры* систем, для которых выполнены условие коэрцитивности и условие (2.11).

1. Скалярное сильно эллиптическое уравнение 2-го порядка.
2. Системы 2-го порядка с такой старшей частью $\sum D_j A_{j,k} D_k$, что действительная часть клеточной матрицы размеров $nl \times nl$ с клетками $A_{j,k}(x)$ равномерно положительно определена.
3. Системы в теории упругости, как изотропной (система Ламе), так и анизотропной, и более общие системы 2-го порядка, указанные в [2], §1, см. там условие II.
4. Уравнение с полигармоническим оператором $(-1)^m \Delta^m u$ в старшей части. Здесь мы имеем в виду возможность записать соответствующую форму $\Phi_0(v)$ в виде

$$\Phi_0(v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} C_{\alpha} |D^{\alpha} v|^2 dx,$$

где C_{α} — положительные коэффициенты.

5. Система со старшей частью $\sum_{|\alpha|=m} D^{\alpha} A_{\alpha}(x) D^{\alpha} u(x)$, где действительные части матриц $A_{\alpha}(x)$ равномерно положительно определены в слагаемых с несмешанными производными D^{α} и неотрицательно определены в остальных слагаемых.

Здесь автор должен отметить, что в [3] сделана ссылка на вариант теоремы Саваре, изложенный в обзоре [2]. Но в [2] предполагалось выполненным уже упомянутое условие II, из которого (2.11) вытекает. В [3] следовало предположить выполненным условие (2.11); это не было сделано по недосмотру автора.

Всюду дальше оператор $L(x, D) = L_0(x, D) + \tau$ предполагается равномерно сильно эллиптическим и в случае задачи Неймана удовлетворяющим условию коэрцитивности формы $\operatorname{Re} \Phi_{\tau}(v)$ на $\mathcal{H}^m(\Omega)$. Предполагается также выполненным условие (2.11). Всюду, кроме п. 5.3, в каждой из задач, Дирихле и Неймана, число τ считается зафиксированным так, что имеет место однозначная разрешимость.

§3. Обобщение результатов Саваре

Пусть s — число из интервала $(-1/2, 1/2)$. Через $\mathcal{H}^{\pm m+s}(\Omega)$ и $\widetilde{\mathcal{H}}^{\pm m+s}(\Omega)$ обозначим пространства, определяемые аналогично $\mathcal{H}^{\pm m}(\Omega)$ и $\widetilde{\mathcal{H}}^{\pm m}(\Omega)$, но с добавлением ко всем индексам $\pm m_j$ числа s . В следующей теореме речь идет о вариационном решении, первоначально определенном при $s = 0$.

Теорема 1. Пусть $s \in (0, 1/2)$.

1. Если $f \in \mathcal{H}^{-m+s}(\Omega)$, то решение задачи Дирихле принадлежит $\widetilde{\mathcal{H}}^{m+s}(\Omega)$.
2. Если $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^{-m+s}(\Omega)$, то решение задачи Неймана принадлежит $\mathcal{H}^{m+s}(\Omega)$.

Метод получения подобных результатов, основанный на модификации метода разностных отношений Ниренберга [18], разработан в [23]. Рассмотренные там уравнения, вообще говоря, нелинейны. Из линейных задач подробно рассмотрены задачи Дирихле и Неймана для скалярного уравнения 2-го порядка в дивергентной форме $\operatorname{div} a(x) \operatorname{grad} u(x) = f(x)$ с симметричной вещественной

положительно определенной матрицей $a(x)$ и кратко — задача Дирихле для бигармонического уравнения. В обзоре [2] теорема 1 проверена для систем 2-го порядка с самосопряженной главной частью фактически при условии (2.11). Мы сейчас должны доказать эту теорему в полной общности. При этом будут использованы некоторые добавочные соображения. Кроме того, мы несколько уточним рассуждения, изложенные в [2].

Вводимые дальше обозначения похожи на обозначения в [23] и [2], но приспособлены к общему случаю. Мы, однако, не будем повторять некоторые очевидные детали, если будет удобно сослаться на [23] или [2]. Сначала мы подробно рассмотрим задачу Неймана. В конце доказательства будут кратко указаны изменения, нужные в случае задачи Дирихле.

В доказательстве понадобится пространство Бесова $B_{2,\infty}^s(\Omega)$ с нецелым $s > 0$, пока это пространство скалярных функций. Пусть d — малое положительное число. Обозначим через Ω_d множество точек области Ω , отстоящих от ее границы больше чем на d . Пусть $\sigma \in (0, 1)$ и D — множество векторов, порождающее $\mathbb{R}^n$ и звездное относительно начала координат. Например, это может быть конус с вершиной в начале. Для функций v в Ω определим полунорму $[v]_{\sigma,\Omega}$ равенством

$$[v]_{\sigma,\Omega}^2 = \sup_{h \in D \setminus \{0\}, |h| < d} |h|^{-2\sigma} \int_{\Omega_{|h|}} |v(x+h) - v(x)|^2 dx. \quad (3.1)$$

Норму в $B_{2,\infty}^s(\Omega)$ при нецелом $s > 0$ можно определить равенством

$$\|v\|_{B_{2,\infty}^s(\Omega)} = \|v\|_{H^{[s]}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} [D^\alpha v]_{s-[s],\Omega}. \quad (3.2)$$

Пространство $B_{2,\infty}^s(\Omega)$ определяется как пополнение линеала $C^\infty(\bar{\Omega})$ по этой норме. Ср. [23], стр. 13.

В этом пространстве возможна следующая локализация. Пусть замыкание $\bar{\Omega}$ покрыто конечной системой открытых шаров O_j ($j = 0, \dots, N$), и пусть $\sum_j \phi_j \equiv 1$ — разбиение единицы в окрестности множества $\bar{\Omega}$, состоящее из гладких функций ϕ_j с носителями в O_j . Тогда

$$\|u\|_{B_{2,\infty}^s(\Omega)} \leq C' \sum \|\phi_j v\|_{B_{2,\infty}^s(O_j \cap \Omega)} \leq C'' \|u\|_{B_{2,\infty}^s(\Omega)}, \quad (3.3)$$

где C' , C'' — постоянные. Это позволяет по-разному выбирать множества D для разных шаров O_j , имеющих общие точки с границей.

Пространство $\mathcal{B}_{2,\infty}^{m+1/2}(\Omega)$ вектор-функций $v = (v_1, \dots, v_l)'$ определим как прямое произведение пространств $B_{2,\infty}^{m_j+1/2}(\Omega)$ ($j = 1, \dots, l$) с нормой, равной сумме норм компонент в этих пространствах.

Пусть $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$ — решение задачи Неймана, см. (2.6) и (2.8).

Лемма (ср. [23], стр. 22, в случае Δ^2). Пусть правая часть f системы принадлежит пространству $\widetilde{\mathcal{H}}^{-m+1}(\Omega)$. Тогда решение $u(x)$ принадлежит пространству Бесова $\mathcal{B}_{2,\infty}^{m+1/2}(\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{2,\infty}^{m+1/2}(\Omega)}^2 \leq C_3 \|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{-m+1}(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} \quad (3.4)$$

с не зависящей от $u(x)$ постоянной C_3 .

Из этой леммы теорема будет выведена при помощи интерполяции.

Начнем с некоторой подготовки к доказательству леммы.

Положим

$$\Psi(u) = \operatorname{Re}(\Phi_\tau(u) - 2(f, u)_\Omega). \quad (3.5)$$

Эта форма принимает на решении наименьшее значение. Действительно, пусть v тоже принадлежит $\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)$; тогда

$$\Psi(u + v) - \Psi(u) = \operatorname{Re} \Phi_\tau(v) + 2 \operatorname{Re}[\Phi_\tau(u, v) - (f, v)_\Omega]. \quad (3.6)$$

Здесь выражение в квадратных скобках равно нулю, так что правая часть неотрицательна.

Более того, в силу неравенства (2.10) на функциях из $\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)$

$$C_2 \|v\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)}^2 \leq \Psi(u + v) - \Psi(u). \quad (3.7)$$

В частности, здесь оценивается квадрат L_2 -нормы всех старших производных от v .

Липшицева поверхность, как известно, обладает равномерным свойством конуса. Каждая точка x_0 на Γ является вершиной двух прямых круговых конусов $C^+(x_0)$ и $C^-(x_0)$, конгруэнтных фиксированному конусу и лежащих соответственно внутри Ω и внутри дополнения к Ω , кроме вершины x_0 . Локально оси этих конусов можно выбирать параллельными. При рассмотрении задачи Неймана понадобятся конусы C^+ . Пусть r — высота этих конусов.

Через $D = D(x_0)$ обозначим множество таких векторов $h \in \mathbb{R}^n$, выходящих из начала, что $x_0 + h \in C^+(x_0)$. Через $\Omega_\rho(x)$ обозначим пересечение области Ω с шаром $O_\rho(x)$ радиуса ρ с центром в x . Далее понадобятся также $O_{2\rho}(x_0)$ и $O_{3\rho}(x_0)$. Направление оси конуса $C^+(x_0)$ и числа $\rho \in (0, r)$ и $d(x_0) \in (0, \rho)$ зафиксируем так, что

$$x \in O_{2\rho}(x_0), \quad h \in D(x_0), \quad |h| \leq d(x_0) \implies x + h \in O_{3\rho}(x_0). \quad (3.8)$$

Эти числа, ρ и d , можно считать не зависящими от x_0 .

Пусть $\varphi(x)$ — бесконечно гладкая вещественная скалярная функция со значениями на $[0, 1]$, равная 1 в $O_\rho(x_0)$ и нулю вне $O_{2\rho}(x_0)$. Эти функции можно предположить сдвигами $\psi(x - x_0)$ фиксированной функции $\psi(x)$.

Теперь положим

$$\mathcal{T}_h v(x) = \varphi(x)v(x + h) + [1 - \varphi(x)]v(x). \quad (3.9)$$

Эта вектор-функция определена в Ω и принадлежит пространству $\mathcal{H}^{\mathbf{m}+s}(\Omega)$ вместе с v . Через $\zeta(x)$ обозначим вектор-функцию с компонентами $\zeta_j^\alpha(x)$, $|\alpha| = m_j$, $j = 1, \dots, l$. Если, в частности, это $D^\alpha v_j(x)$, то будем писать $\zeta(x) = \nabla^{\mathbf{m}} v(x)$. Положим также

$$\mathcal{T}_h \zeta(x) = \varphi(x)\zeta(x + h) + [1 - \varphi(x)]\zeta(x). \quad (3.10)$$

Здесь везде $h \in D(x_0)$ и $|h| \leq d$.

Квадратичная форма $F(x, \zeta)$ (см. (2.11)) при фиксированном x отвечает эрмитовой полуторалинейной форме

$$G(\zeta, \varsigma) = \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^l \sum_{\substack{|\alpha|=m_j, \\ |\beta|=m_k}} a_{\alpha,\beta}^{j,k}(x) \zeta_k^\beta \bar{\varsigma}_j^\alpha. \quad (3.11)$$

Квадратичная форма $G(\zeta) = G(\zeta, \zeta) = F(x, \zeta)$ выпукла: при любом числе $\varphi \in (0, 1)$

$$G(\varphi\zeta + (1 - \varphi)\zeta) \leq \varphi G(\zeta) + (1 - \varphi)G(\zeta). \quad (3.12)$$

Действительно, выпуклость квадратичной формы равносильна ее неотрицательности (см. [21], §4), а у нас последняя предположена в (2.11).

Доказательство леммы. Докажем следующую оценку:

$$\Psi(\mathcal{T}_h v) - \Psi(v) \leq C_4 \|h\| \|v\|_{\mathcal{H}^m(\Omega_{3\rho})} (\|v\|_{\mathcal{H}^m(\Omega_{3\rho})} + \|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{-m+1}(\Omega_{3\rho})}). \quad (3.13)$$

Поясним, что если $v = u$ — решение, то левая часть неотрицательна и мажорирует величину $\operatorname{Re} \Phi_\tau(\varphi(x)(u(x+h) - u(x)))$ (см. (3.6) и (3.9)), а значит, и квадрат нормы $\|\varphi(x)(u(x+h) - u(x))\|_{\mathcal{H}^m(\Omega_{2\rho})}$ — см. (2.10).

Оценку вида (3.13) достаточно получить для слагаемых, из которых состоит форма $\Psi(v)$. Рассмотрим форму $\operatorname{Re} \Phi_0(v)$.

Сначала отметим, что если $\operatorname{supp} \zeta(x), \operatorname{supp} \varsigma(x) \subset \Omega_{2\rho}$, то

$$\int_{\Omega} [F(x, \varsigma(x) + \zeta(x)) - F(x, \varsigma(x))] dx \leq C_5 \|\zeta\|_{L_2(\Omega_{2\rho})} (\|\zeta\|_{L_2(\Omega_{2\rho})} + \|\varsigma\|_{L_2(\Omega_{2\rho})}) \quad (3.14)$$

в силу неравенства Шварца. Здесь мы воспользовались тем, что $F(x, \zeta)$ — квадратичная форма по ζ .

Далее, в силу только что отмеченной выпуклости формы F

$$\begin{aligned} F(x, \mathcal{T}_h \zeta(x)) - F(x, \zeta(x)) &\leq \varphi(x) F(x, \zeta(x+h)) + (1 - \varphi(x)) F(x, \zeta(x)) - F(x, \zeta(x)) \\ &= \varphi(x) [F(x, \zeta(x+h)) - F(x, \zeta(x))]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [F(x, \mathcal{T}_h \zeta(x)) - F(x, \zeta(x))] dx \\ &\leq \int_{\Omega_{2\rho}} \varphi(x) [F(x, \zeta(x+h)) - F(x, \zeta(x))] dx \\ &= \int_{\Omega_{2\rho}+h} \varphi(x-h) [F(x-h, \zeta(x)) - F(x, \zeta(x))] dx \\ &\quad + \int_{\Omega_{2\rho}+h} \varphi(x-h) F(x, \zeta(x)) dx - \int_{\Omega_{2\rho}} \varphi(x) F(x, \zeta(x)) dx \\ &= \int_{\Omega_{3\rho}} \varphi(x-h) [F(x-h, \zeta(x)) - F(x, \zeta(x))] dx \\ &\quad + \int_{\Omega_{3\rho}} [\varphi(x-h) - \varphi(x)] F(x, \zeta(x)) dx \\ &\leq C_6 |h| \|\zeta\|_{L_2(\Omega_{3\rho})}^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

с учетом того, что коэффициенты в $F(x, \zeta)$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяют условию Липшица. В силу формулы Лейбница

$$D^\alpha \mathcal{T}_h v_j = \mathcal{T}_h D^\alpha v_j + \Sigma, \quad (3.17)$$

где

$$\Sigma = \sum_{\gamma+\delta=\alpha, \gamma \neq 0} C_{\gamma, \delta} D^\gamma \varphi(x) D^\delta [v_j(x+h) - v_j(x)]. \quad (3.18)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi_0(\mathcal{T}_h v) - \operatorname{Re} \Phi_0(v) &= \int_{\Omega} [F(x, \mathcal{T}_h \nabla^{\mathbf{m}} v + \Sigma) - F(x, \mathcal{T}_h \nabla^{\mathbf{m}} v)] dx \\ &\quad + \int_{\Omega} [F(x, \mathcal{T}_h \nabla^{\mathbf{m}} v) - F(x, \nabla^{\mathbf{m}} v)] dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь второе слагаемое справа оценивается при помощи (3.16). Первое — при помощи (3.14) и неравенств типа

$$\|D^{\delta} v_j(x+h) - D^{\delta} v_j(x)\|_{L_2(\Omega_{2\rho})} \leq |h| \|D^{\delta} v_j\|_{H^1(\Omega_{3\rho})}, \quad (3.20)$$

вытекающих из формулы Адамара для приращения функции, ср. [2], п. 2.4, стр. 27. Здесь $|\delta| < m_j$. Поэтому получаем

$$\Phi_0(\mathcal{T}_h v) - \Phi_0(v) \leq C_7 |h| \|v\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega_{3\rho})}^2. \quad (3.21)$$

Для функционала $(v, v)_{\Omega}$ без труда получается оценка

$$(\mathcal{T}_h v, \mathcal{T}_h v)_{\Omega} - (v, v)_{\Omega} \leq C_8 |h| \|\nabla v\|_{\mathcal{L}_2(\Omega_{3\rho})}^2. \quad (3.22)$$

См. [2], там же. Для функционала $(f, v)_{\Omega}$

$$(f, \mathcal{T}_h v - v)_{\Omega} \leq C_9 |h| \|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}+1}(\Omega_{2\rho})} \|\nabla v\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{m}-1}(\Omega_{3\rho})}. \quad (3.23)$$

Из (3.21)–(3.23) получаем (3.13).

Отсюда следует, что

$$[\nabla^{\mathbf{m}} u]_{1/2, \Omega_{\rho}}^2 \leq C_{10} \|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}+1}(\Omega_{3\rho})} \|u\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega_{3\rho})}. \quad (3.24)$$

Конструкция операторов $\mathcal{T}_h$ и результат распространяются на внутренние точки области. Из покрытия ее замыкания окрестностями O_{ρ} выбираем конечное подпокрытие. Используя (3.24) и оценки

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)} \leq C_{11} \|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}}(\Omega)} \leq C_{12} \|f\|_{\mathcal{H}^{-\mathbf{m}+1}(\Omega)}, \quad (3.25)$$

в итоге приходим к (3.4). $\square$

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\mathcal{L}$ отвечающий задаче оператор, переводящий u в функционал f по формуле (2.6). Из (3.4) и левого неравенства в (3.25) следует, что

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{2,\infty}^{\mathbf{m}+1/2}(\Omega)} \leq C_{12} \|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}+1}(\Omega)} \|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}}(\Omega)}. \quad (3.26)$$

Отсюда в силу предложения 4.2 из [23] (его формулировка повторена в [2], п. 2.3, утверждение 1) следует, что оператор $\mathcal{L}^{-1}$ действует ограниченным образом как оператор

$$(\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}}(\Omega), \widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}+1}(\Omega))_{1/2,1} \mapsto \mathcal{B}_{2,\infty}^{\mathbf{m}+1/2}(\Omega). \quad (3.27)$$

Здесь слева имеется в виду вещественная интерполяция, см. определения, например, в [5], гл. 3. Кроме того, $\mathcal{L}^{-1}$ — ограниченный оператор из $\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}}(\Omega)$ в $\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega)$. Значит, это ограниченный оператор

$$(\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}}(\Omega), (\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}}(\Omega), \widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}+1}(\Omega))_{1/2,1})_{t,2} \mapsto (\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega), \mathcal{B}_{2,\infty}^{\mathbf{m}+1/2}(\Omega))_{t,2} \quad (3.28)$$

при $t \in (0, 1)$. Заметим теперь, что

$$\mathcal{B}_{2,\infty}^{\mathbf{m}+1/2}(\Omega) = (\mathcal{H}^{\mathbf{m}}(\Omega), \mathcal{H}^{\mathbf{m}+1}(\Omega))_{1/2,\infty} \quad (3.29)$$

(вещественная интерполяция, ср. [5], п. 6.4). По теоремам о реитерации и дуальности получается, что пространство справа в (3.28) есть $\mathcal{H}^{m+t/2}(\Omega)$, а слева $\widetilde{\mathcal{H}}^{-m+t/2}(\Omega)$. Ср. [23], стр. 13–14. Заменяя $t/2$ на s , получаем утверждение теоремы для задачи Неймана.

В случае задачи Дирихле нужно сделать очевидную замену пространств $\mathcal{H}^{m+s}(\Omega)$ на $\widetilde{\mathcal{H}}^{m+s}(\Omega)$ и $\widetilde{\mathcal{H}}^{-m+s}(\Omega)$ на $\mathcal{H}^{-m+s}(\Omega)$. Функция $v(x)$ считается равной нулю вне Ω . Сдвиги h делаются не внутрь области Ω , а внутрь ее дополнения, т. е. в конусы C^- . Делается это для того, чтобы функция $\mathcal{I}_h v(x)$ принадлежала пространствам $\mathcal{H}^{m+s}(\Omega)$ вместе с v . Ср. [23], стр. 8–11. $\square$

Из теоремы 1 выводится

Теорема 2. 1. При $|s| < 1/2$ задача Дирихле с правой частью $f \in \mathcal{H}^{-m+s}(\Omega)$ имеет одно и только одно решение в $\mathcal{H}^{m+s}(\Omega)$.

2. При $|s| < 1/2$ задача Неймана с правой частью $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^{-m+s}(\Omega)$ имеет одно и только одно решение в $\mathcal{H}^{m+s}(\Omega)$.

Поясним, что задачи снова определяются тождеством (2.6); но при этом в задаче Дирихле

$$u \in \widetilde{\mathcal{H}}^{m+s}(\Omega), \quad v \in \widetilde{\mathcal{H}}^{m-s}(\Omega), \quad f \in \mathcal{H}^{-m+s}(\Omega), \quad (3.30)$$

а в задаче Неймана

$$u \in \mathcal{H}^{m+s}(\Omega), \quad v \in \mathcal{H}^{m-s}(\Omega), \quad f \in \widetilde{\mathcal{H}}^{-m+s}(\Omega). \quad (3.31)$$

Таким образом, u и v теперь находятся, вообще говоря, в разных пространствах, а v и f остаются в сопряженных пространствах. При $s \in (0, 1/2)$ утверждение получается сразу из теоремы 1, а при $s \in (-1/2, 0)$ — с использованием сопряженности вариационных задач (для формально сопряженных систем), отвечающих числам s и $-s$, ср. [3].

Отметим, что соответствие между f и u в теореме 2 является изоморфизмом, а в лемме — нет.

§ 4. Те же задачи в H_p^σ -пространствах

Напомним определение пространства потенциалов $H_p^\sigma = H_p^\sigma(\mathbb{R}^n)$ (его называют также пространством бесселевых потенциалов, или пространством Лебега, или пространством Лиувилля). Будем предполагать, что

$$\sigma \in \mathbb{R}, \quad p \in (1, \infty), \quad pp' = p + p'. \quad (4.1)$$

Норма в пространстве H_p^σ определяется равенством

$$\|u\|_{H_p^\sigma} = \|\Lambda_\sigma u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.2)$$

где $\Lambda_\sigma = F^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}F$, F — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций. Это пространство определяется как пополнение линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме (4.2).

Пространство $H_p^\sigma(\Omega)$ определяется как состоящее из сужений u на Ω функций w из H_p^σ (обобщенных при $\sigma < 0$) с нормой $\|u\|_{H_p^\sigma(\Omega)} = \inf \|w\|_{H_p^\sigma} : w|_\Omega = u$.

Через $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ обозначается подпространство функций в H_p^σ (обобщенных при $\sigma < 0$) с носителями в $\bar{\Omega}$. Норма в $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ берется из H_p^σ .

Линеал $C^\infty(\bar{\Omega})$ содержится и плотен во всех $H_p^\sigma(\Omega)$. Линеал $C_0^\infty(\Omega)$ содержится и плотен во всех $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$.¹⁾

Пространство $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ при $\sigma = k + \tau$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $-1/p' < \tau < 1/p$ можно отождествить с $\overset{\circ}{H}_p^\sigma(\Omega)$ — пополнением линеала $C_0^\infty(\Omega)$ в $H_p^\sigma(\Omega)$; нормы эквивалентны.

Пространства $\tilde{H}_p^{-\sigma}(\Omega)$ и $H_p^\sigma(\Omega)$ сопряжены относительно продолжения формы $(f, v)_{0,\Omega}$ на их прямое произведение при всех σ . Это продолжение определяется равенством

$$(f, v)_{0,\Omega} = \lim (f_k, v_k)_{0,\Omega} = (f, \mathcal{E}v)_{0,\mathbb{R}^n}, \quad (4.3)$$

где функции $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ аппроксимируют f в первом пространстве, а функции $v_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ — функцию v во втором. Через $\mathcal{E}$ мы обозначили универсальный оператор продолжения функций из пространств в области Ω в аналогичные пространства в $\mathbb{R}^n$ из [22]. См. [3] и [4].

Пространства $H_p^\sigma(\Omega)$ и $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ можно отождествить при $-1/p' < \sigma < 1/p$.

При $p = 2$ индекс p опускается и получаются использованные выше L_2 -пространства $H^\sigma(\Omega)$ и $\tilde{H}^\sigma(\Omega)$.

Введем прямые произведения и сокращенные обозначения для них. Пусть $|s| < 1/2$. Положим

$$\mathcal{H}_p^{\pm \mathbf{m} + 1/p - 1/2 + s}(\Omega) = \prod_{j=1}^l H_p^{\pm m_j + 1/p - 1/2 + s}(\Omega) = \mathcal{H}(\pm \mathbf{m}, p, s), \quad (4.4)$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_p^{\pm \mathbf{m} + 1/p - 1/2 + s}(\Omega) = \prod_{j=1}^l \tilde{H}_p^{\pm m_j + 1/p - 1/2 + s}(\Omega) = \widetilde{\mathcal{H}}(\pm \mathbf{m}, p, s). \quad (4.5)$$

Нормы в этих пространствах определяются как суммы норм в пространствах под знаком произведения.

В случае задачи Дирихле

$$u \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{m}, p, s), \quad v \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{m}, p', -s), \quad f \in \mathcal{H}(-\mathbf{m}, p, s). \quad (4.6)$$

В случае задачи Неймана

$$u \in \mathcal{H}(\mathbf{m}, p, s), \quad v \in \mathcal{H}(\mathbf{m}, p', -s), \quad f \in \widetilde{\mathcal{H}}(-\mathbf{m}, p, s). \quad (4.7)$$

Здесь снова u и v лежат, вообще говоря, в разных пространствах, v и f — в сопряженных пространствах. Определение вариационного решения остается прежним, см. (2.6), но с использованием этих пространств.

Введем следующие обозначения (ср. [3]): $t = 1/p$, $\delta \in (0, 1/2)$,

$$Q = \{(s, t) : |s| < 1/2, 0 < t < 1\}, \quad Q_\delta = \{(s, t) : |s| < 1/2, |t - 1/2| < \delta\}. \quad (4.8)$$

Под однозначной разрешимостью задачи Дирихле или Неймана в точке $(s, t) \in Q$ будем понимать ее однозначную разрешимость в вариационной постановке в указанных выше пространствах с этими s и t .

¹⁾Здесь и дальше в аналогичных местах подразумевается, что функции из $C_0^\infty(\Omega)$ продолжаются нулем вне Ω .

Теорема 3. Пусть задана липшицева область Ω . При сделанных выше предположениях найдется такое δ , что задача Неймана однозначно разрешима в точках $(s, t) \in Q_\delta$. Такое же утверждение верно для задачи Дирихле.

Здесь снова соответствия между f и u — изоморфизмы соответствующих пространств.

Доказательство теоремы 3. При комплексной интерполяции пространств $\mathcal{H}(\pm \mathbf{m}, p, s)$ вдоль любого отрезка, лежащего в Q , получаются те же пространства в соответствующих точках, и то же верно для пространств $\widetilde{\mathcal{H}}(\pm \mathbf{m}, p, s)$. См. [3] в случае $m_j \equiv 1$. Нам нужны вертикальные отрезки фиксированной длины чуть меньше 1 с серединами в точках $s, t = 1/2$, $|s| < 1/2$. В этих точках оператор $\mathcal{L}(s, t): u \mapsto f$ обратим. Отсюда следует его обратимость на вертикальных отрезках длины 2δ с некоторым $\delta > 0$ и теми же серединами в силу результата Шнейберга [25]. Более того, это δ можно считать не зависящим от абсциссы s . Это следует из ключевой для нас оценки для δ в [25] с учетом следующих двух обстоятельств. Во-первых, при рассматриваемых (s, t) норма отвечающего задаче оператора $\mathcal{L}(s, t)$ равномерно ограничена. Во-вторых, норма обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}(s, t)$ равномерно ограничена при $t = 1/2$.

Приведем пояснения.

Пусть $\{E_\alpha\}$ и $\{F_\alpha\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, — две шкалы банаховых пространств, полученные комплексной интерполяцией из интерполяционных пар (E_0, E_1) и (F_0, F_1) . Пусть пересечение $E_0 \cap E_1$ плотно в E_0 и E_1 и пересечение $F_0 \cap F_1$ плотно в F_0 и F_1 . Предположим, что имеются линейные ограниченные операторы L_j из E_j в F_j ($j = 0, 1$), причем на $E_0 \cap E_1$ они совпадают. Тогда определены единый линейный ограниченный оператор из $E_0 + E_1$ в $F_0 + F_1$ и его сужения $L_\alpha: E_\alpha \rightarrow F_\alpha$, причем последние являются линейными ограниченными операторами. См., например, [5], гл. 4.

Нужный нам результат Шнейберга можно сформулировать следующим образом. Пусть $M = \max \|L_j\|$, $j = 0, 1$, и пусть $L_{1/2}$ — изоморфизм. Тогда L_α — изоморфизм при

$$\left| \alpha - \frac{1}{2} \right| < \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{M \|L_{1/2}^{-1}\|}. \quad (4.9)$$

Равномерная ограниченность операторов $\mathcal{L}(s, t)$ видна из формулы (2.6). Например, в случае задачи Неймана

$$|\Phi_\tau(u, v)| \leq C \|u\|_{\mathcal{H}(\mathbf{m}, p, s)} \|v\|_{\mathcal{H}(\mathbf{m}, p', -s)}$$

с не зависящей от (s, t) постоянной C . Действительно, рассмотрим оператор $a(x)D^\alpha$, где $|\alpha| = m$ и $a(x)$ — липшицева функция, как действующий из $H_p^{m+\sigma}(\Omega)$ в $H_p^\sigma(\Omega)$. Здесь у нас p отделено от 1 и ∞ и поэтому $|\sigma| \leq \eta < 1$. Как легко видеть, этот оператор равномерно ограничен. Следовательно,

$$\|\mathcal{L}(x, t)u\|_{\widetilde{\mathcal{H}}(-\mathbf{m}, p, s)} = \sup \frac{|\Phi_\tau(u, v)|}{\|v\|_{\mathcal{H}(\mathbf{m}, p', -s)}} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}(\mathbf{m}, p, s)}. \quad (4.10)$$

Наконец, равномерная ограниченность операторов $\mathcal{L}^{-1}(s, 1/2)$ видна из доказательства теоремы 1. Действительно, положим $\gamma_s = \|\mathcal{L}^{-1}(s, 1/2)\|$ и обозначим через γ_1 норму этого же оператора из $[\widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}}(\Omega), \widetilde{\mathcal{H}}^{-\mathbf{m}+1}(\Omega)]_{1/2, 1}$ в

$\mathcal{B}_p^{m+1/2}(\Omega)$. Тогда при $0 < s < 1/2$

$$\gamma_s \leq C' \gamma_0^{1-2s} \gamma_1^{2s} \leq C'', \quad (4.11)$$

где постоянные C' и C'' не зависят от s (см., например, [5], пп. 2.4 и 6.4). Равномерная ограниченность оператора $\mathcal{L}^{-1}(s, 1/2)$ при $0 < s < 1/2$ получается по дуальности. $\square$

Примеры, показывающие, что в общем случае нельзя δ заменить единицей (и даже фиксированным меньшим числом), известны. См. ссылки, например, в [11], [1], [29]. Там же указаны случаи, когда область Q_δ однозначной разрешимости можно, наоборот, существенно расширить.

Из теоремы 3 вытекает утверждение о регулярности решений:

Теорема 4. Пусть точки (s_1, t_1) и (s_2, t_2) принадлежат Q_δ , причем пространства, отвечающие второй точке, содержатся в соответствующих пространствах, отвечающих первой точке. Тогда если $\mathcal{L}u = f$ в первой точке, но f «лучше» — лежит в пространстве, отвечающем второй точке, то это же верно для решения u .

§5. Некоторые обобщения, варианты и следствия

В ближайших двух пунктах мы обсуждаем возможности рассмотрения неоднородных условий Дирихле и Неймана. В случае липшицевой области мы должны указать определения по аналогии со случаем гладкой области и предположения, при которых готовы рассматривать такие условия. Для экономии места и простоты мы рассмотрим скалярное уравнение, перенесение сказанного ниже на системы не вызывает затруднений. Вместо $\mathbf{m}$ теперь будем писать m . Эти два пункта и п. 5.5 написаны несколько конспективно из-за недостатка места; подробности см. в [4].

5.1. Неоднородные условия Дирихле и наборы Уитни. Задачу с неоднородными условиями Дирихле поставим следующим образом. Заданы функции $u_0 \in \mathcal{H}(m, p, s)$ и $f \in \mathcal{H}(-m, p, s)$; требуется найти такое решение u уравнения $Lu = f$ в первом из этих пространств, что $u - u_0 \in \widetilde{\mathcal{H}}(m, p, s)$.

Определим $f_0 = Lu_0 \in \mathcal{H}(-m, p, s)$ тождеством

$$(f_0, v)_\Omega = \Phi_\tau(u_0, v) \quad (v \in \mathcal{H}(m, p', -s)), \quad (5.1)$$

тем самым подчиняя u_0 однородным условиям Неймана. Теперь дело сводится к решению уравнения $L(u - u_0) = f - f_0$ с однородным условием Дирихле.

Здесь, однако, надо пояснить следующее. Так как $m - 1/2 + s$ нецелое, то $\widetilde{\mathcal{H}}(m, p, s)$ можно отождествить с подпространством $\mathring{H}_p^{m-1/2+1/p+s}(\Omega)$ в $\mathcal{H}(m, p, s)$. Поэтому условие $u - u_0 \in \widetilde{\mathcal{H}}(m, p, s)$ имеет смысл. Далее, из (5.1) по аналогичной причине следует это же соотношение для $v \in \widetilde{\mathcal{H}}(m, p', -s)$. Это позволяет рассматривать f_0 как элемент из $\mathcal{H}(-m, p, s)$, и тогда $f - f_0$ принадлежит этому же пространству. Поэтому корректно поставлена задача Дирихле для нахождения $u - u_0$.

Следствие 1. Если в точке (s, t) однозначно разрешима задача Дирихле с однородными граничными условиями, то это же верно для задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями.

Теперь мы сопоставим этот подход с постановкой неоднородных условий Дирихле в терминах наборов Уитни, в близкой ситуации введенных в [28].

В используемых ниже пространствах Бесова $B_p^\sigma(\Gamma) = B_{p,p}^\sigma(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$, $1 < p < \infty$, норму можно определить равенством

$$\|u\|_{B_p^\sigma(\Gamma)}^p = \|u\|_{L_p(\Gamma)}^p + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n-1+\sigma p}} dS_x dS_y. \quad (5.2)$$

Эту шкалу можно продолжить на значения $\sigma \in [-1, 1]$, но дальше нельзя: инвариантные определения пространств $B_p^\sigma(\Gamma)$ на общей липшицевой поверхности есть только при $|\sigma| \leq 1$. След функции $u \in H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$ на Γ принадлежит $B_p^\sigma(\Gamma)$, но, вообще говоря, только при $0 < \sigma < 1$ (см. [12], стр. 182, определения пространств Бесова в этой книге, [11] и указанные там ссылки). Однако при $\sigma > k + 1/p$ с натуральным k следы имеют также производные до порядка k включительно.

Пусть функция u принадлежит $H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$ с большим σ . Идея введения наборов Уитни состоит в рассмотрении (согласованного) набора граничных значений производных от u в пространствах функций на границе малой гладкости. Ниже мы в основном следуем [1] и [14], где существенны связи с концепциями в [12] и [32].

Далее в этом пункте будем предполагать, что q — целое неотрицательное число и $\sigma \in (q, q + 1)$. Связь с использованными выше обозначениями выражается равенствами $q = m - 1$, $\sigma = m - 1/2 + s = q + 1/2 + s$. В случае бигармонического уравнения $q = 1$.

Обозначим через $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$ пространство наборов $\dot{w} = \{w_\alpha\}_{|\alpha| \leq q}$ функций $w_\alpha(x)$ на Γ , принадлежащих $H_p^1(\Gamma)$ при $|\alpha| < q$ и $B_p^{\sigma-q}(\Gamma)$ при $|\alpha| = q$. Введем в $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$ норму

$$\|\dot{w}\|_{\Pi_p^\sigma(\Gamma)} = \sum_{|\alpha| < q} \|w_\alpha(x)\|_{H_p^1(\Gamma)} + \sum_{|\alpha| = q} \|w_\alpha(x)\|_{B_p^{\sigma-q}(\Gamma)}. \quad (5.3)$$

Это, конечно, банахово пространство.

Пусть сначала $u(x)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим набор $\dot{w}(x) = \{w_\alpha(x)\}$ следов $w_\alpha(x)$ на Γ всевозможных производных $\partial^\alpha u(x)$ порядка $|\alpha| \leq q$. Заметим, что элементы w_α с $|\alpha| < q$ фактически принадлежат $H_p^1(\Gamma)$, так как их касательные производные принадлежат $L_2(\Gamma)$, и что выполнены условия согласованности: для всех возможных значений индексов

$$[\nu_j(x)\partial_k - \nu_k(x)\partial_j]w_\alpha(x) = \nu_j(x)w_{\alpha+e_k}(x) - \nu_k(x)w_{\alpha+e_j}(x) \quad (5.4)$$

при $|\alpha| \leq q - 1$, где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль и e_k — мультииндекс из нулей и единиц с единицей только на k -м месте. Это следует из того, что слева и справа записаны следы одних и тех же производных.

Такие наборы образуют линейал в $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$. Замыкание этого линейала обозначим через $WA_p^\sigma(\Gamma)$, а элементы $\dot{w}$ этого замыкания назовем наборами Уитни порядка (σ, p) на Γ . Другое, эквивалентное определение будет приведено ниже.

Пусть теперь $u(x)$ — функция из $H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$. Тогда можно образовать набор $\{\partial^\alpha u(x)\}$ из значений ее производных порядка $|\alpha| \leq q$ на Γ , тоже имеющий конечную норму (5.3). Мы утверждаем, что это набор Уитни. Действительно,

функцию $u(x)$ можно продолжить до функции из $H_p^{\sigma+1/p}$ с компактным носителем [22] и там аппроксимировать бесконечно гладкими финитными функциями $u_k(x)$ в норме этого пространства. Тогда наборы Уитни $\{\partial^\alpha u_k(x)\}$ будут сходиться к набору $\{\partial^\alpha u(x)\}$ в пространстве $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$. Предельным переходом получаются условия согласованности (5.4).

Следующее утверждение известно специалистам, см. [28] и [1], но проверено в литературе, по-видимому, только для $q = 1$ — в работе [1].

Теорема 5. Пусть $\dot{w} = \{w_\alpha\} \in \Pi_p^\sigma(\Gamma)$, $q < \sigma < q + 1$, и для w_α выполнены условия согласованности (5.4). Тогда существует такая функция $u \in H_p^{\sigma+1/p}(\Gamma)$, что следы ее производных $\partial^\alpha u(x)|_\Gamma$ образуют набор $\dot{w}$. Оператор $\mathcal{E}_q: \dot{w} \rightarrow u$ линеен, ограничен в указанных пространствах и зависит только от q .

Это вытекает из нетривиальных результатов в [12] в главе VII. Но, чтобы воспользоваться ими, надо отождествить пространства только что указанных наборов с пространствами из [12]. Для $q = 1$ это сделано в [1], см. там лемму 1.7. В общем случае мы используем леммы из [14], §7. Подробности см. в [4]. В [14] вместо $H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$ рассматривается весовое пространство с целочисленным верхним индексом.

Из теоремы 5 вытекает, что определение пространства $WA_p^\sigma(\Gamma)$, данное выше, равносильно следующему: это подпространство в $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$, состоящее из наборов $\dot{w} = \{w_\alpha\}$, которые удовлетворяют условиям согласованности.

В [28] рассматривались только целочисленные σ , у нас они не возникают. В [1] $1 < \sigma \leq 2$ и главное внимание уделено случаю $\sigma = 2$, при нецелых σ использовалась интерполяция. Случай нецелых σ проще. См. [4].

Сказанное позволяет несколько углубить постановку задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями следующим образом. Задается набор Уитни $\dot{w}(x)$ в пространстве $WA_p^{m-1/2+s}(\Gamma)$, который должен быть набором из значений производных решения на границе. По нему строится функция $u_0 \in \mathcal{H}(m, p, s)$, для которой этот набор является набором из значений ее производных на границе. Далее определяем решение как в начале настоящего пункта.

Смысл сказанного состоит в совместимости вариационного подхода с использованием наборов Уитни.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу Дирихле в обычной форме (считая функции скалярными):

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad \partial_\nu^k u = g_k \quad (k = 0, \dots, m-1) \text{ на } \Gamma. \quad (5.5)$$

Здесь ∂_ν — производная по внешней нормали, $f \in \mathcal{H}(-m, p, s)$, $(s, t) \in Q_\delta$. нас интересует, когда эта задача имеет (одно и только одно) решение в $\mathcal{H}(m, p, s)$. Мы можем указать достаточные условия в следующей форме. *Предположим, что существует набор Уитни $\{w_\alpha\}$ порядка $(m - 1/2 + s, p)$, порождающий эти производные по нормали. Тогда ситуация совпадает с только что рассмотренной и однозначная разрешимость имеет место.* Поясним слово «порождающий».

Производные по нормали определяются через элементы набора Уитни (производных некоторой функции) следующей известной формулой (см. [28]):

$$\partial_\nu^k u(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \nu^\alpha w_\alpha, \quad (5.6)$$

где $\nu^\alpha = \nu_1^{\alpha_1} \cdots \nu_n^{\alpha_n}$. Функции ν_j в общем случае только ограничены и измеримы. Поэтому относительно функций g_k можно утверждать лишь, что они принадлежат $L_p(\Gamma)$.

Имеются также формулы для восстановления набора $\{w_\alpha\}$ по этим нормальным производным (см. в [14] теорему 7.8). Таким образом, в том и только в том случае, если эти формулы приводят к набору Уитни порядка $(m - 1/2 + s, p)$, задача (5.5) удовлетворяет нашим предположениям, гарантирующим однозначную разрешимость. Ср. [28] и [14].

5.2. Неоднородные условия Неймана. Предположим сначала, что граница области является гладкой. Тогда можно написать полную формулу Грина с граничными членами. Пусть она имеет вид

$$(f, u)_\Omega = \Phi_\sigma(u, v) + \sum_{j=0}^{m-1} (B_{m-1-j} u, \partial_\nu^j v)_\Gamma. \quad (5.7)$$

Данными Неймана будем считать выражения $B_{m-1-j} u|_\Gamma$. Таким образом, мы хотим рассмотреть задачу

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad B_{m-1-j} u = h_{m-j-1} \quad (j = 0, \dots, m-1) \text{ на } \Gamma \quad (5.8)$$

уже в липшицевой области, снова считая, что $f \in \widetilde{\mathcal{H}}(-m, p, s)$ и $(s, t) \in Q_\delta$.

Подставим в (5.7) выражения (5.6) и перебросим негладкие коэффициенты на функции до запятой. Правая часть в (5.7) примет вид $\sum (\tilde{h}_\alpha, \partial^\alpha v)_\Gamma$. Мы можем гарантировать однозначную разрешимость задачи (5.8), если получится линейный непрерывный функционал над $W_{p'}^{m-1/2-s}(\Gamma)$ (см. [4]). Действительно, это тогда линейный непрерывный функционал над $\mathcal{H}(m, p', -s)$, а это позволяет изменить правую часть уравнения $Lu = f$ так, что граничные условия Неймана станут однородными. Ср. [30].

Конечно, значительно прозрачнее все это выглядит в случае уравнений и систем 2-го порядка. В этом случае легко указывается пространство для данных Неймана и всегда можно предполагать условия Неймана однородными, не ограничивая общности. См. [3].

5.3. Уравнения с младшими членами. Пусть L содержит младшие члены. Если они записаны в дивергентной форме, то при выводе неравенства Гординга коэффициенты в них считают измеримыми ограниченными функциями, а в теоремах о регулярности достаточно подчинить их равномерному условию Липшица.

Следствие 2. Утверждение об однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана при наличии младших членов в L сохраняется, если $\text{Re } \tau$ достаточно велико. При остальных τ задача фредгольмова в тех же самых пространствах с нулевым индексом. Сохраняется утверждение о гладкости.

Поясним, что результат о гладкости в случае фредгольмовости получается перенесением младших членов в правую часть уравнения с учетом специфики определения вариационного решения.

5.4. Спектральные задачи. Мы можем рассмотреть спектральное уравнение $Lu = \lambda u$ с однородными условиями Дирихле или Неймана. Сохраним те же предположения об операторе L , что и в неспектральных задачах. Предположим, что нуль не является собственным значением. Тогда из тех же соображений, что и в [3], получается

Следствие 3. *Собственные и присоединенные функции $u(x)$ спектральных задач Дирихле и Неймана принадлежат пересечению пространств, отвечающих точкам $(s, t) \in Q_\delta$.*

В случае систем 2-го порядка получается аналогичный результат и для задачи со спектральным параметром в граничном условии, т. е. для собственных и корневых функций оператора, при $f = 0$ переводящего данные Неймана в данные Дирихле.

5.5. Аналоги результатов для пространств Бесова. Все сказанное в §4 и предыдущих пунктах настоящего параграфа переносится на пространства Бесова вместо пространств потенциалов. Пусть снова выполнены условия (4.1). Одно из простейших определений пространства $B_p^\sigma = B_p^\sigma(\mathbb{R}^n)$, ср. [11], состоит в том, что при нецелом $\sigma > 0$ оно совпадает с пространством Слободецкого $W_p^\sigma = W_p^\sigma(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|u\|_{B_p^\sigma} = \|u\|_{W_p^\sigma} = \sum_{|\alpha| \leq [q]} \|u\|_{L_p} + \sum_{|\alpha|=[q]} \left(\iint \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{n+(\sigma-[q])p}} dx dy \right)^{1/p}, \quad (5.9)$$

а при остальных σ это лежащее в пространстве Шварца $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ пространство с нормой

$$\|u\|_{B_p^\sigma} = \|\Lambda^{\sigma-\sigma_1} u\|_{B_p^{\sigma_1}}, \quad (5.10)$$

где σ_1 нецелое положительное; при его изменении норма переходит в эквивалентную. Относительно других возможных определений этих пространств см., например, [19] или [26]. Для простоты и экономии места мы не будем рассматривать пространства Бесова с тремя индексами. Известно, что пространства B_p^σ и $B_{p'}^{-\sigma}$ взаимно сопряжены относительно продолжения скалярного произведения в L_2 на их прямое произведение. Пространство $B_p^\sigma(\Omega)$ вводится аналогично H_p^σ , т. е. как состоящее из сужений функций из B_p^σ (обобщенных при $\sigma < 0$) на Ω . Универсальный оператор продолжения $\mathcal{E}$ из [22] обслуживает и эти пространства. Пространство $\tilde{B}_p^\sigma(\Omega)$ вводится как подпространство в B_p^σ , состоящее из функций (обобщенных при $\sigma < 0$) с носителями в $\bar{\Omega}$. При $\sigma_1 < \sigma_2$ имеют место непрерывные вложения

$$H_p^{\sigma_2} \subset B_p^{\sigma_1}, \quad B_p^{\sigma_2} \subset H_p^{\sigma_1}, \quad (5.11)$$

а при $p = 2$

$$H_2^\sigma = B_2^\sigma (= H^\sigma = W_2^\sigma). \quad (5.12)$$

Соотношения (5.11)–(5.12) наследуются пространствами $H_p^\sigma(\Omega)$ и $B_p^\sigma(\Omega)$, $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ и $\tilde{B}_p^\sigma(\Omega)$. Пространства $B_p^\sigma(\Omega)$ и $\tilde{B}_{p'}^{-\sigma}(\Omega)$ оказываются взаимно сопряженными относительно формы (4.2). Короче говоря, картина для пространств Бесова

аналогична картине для пространств потенциалов. Точно так же обстоит дело с комплексной интерполяцией (ср. [5], п. 6.4.5).

Далее для задач Дирихле и Неймана с однородными граничными условиями вводятся аналогичные пространства (4.4) и (4.5) пространства $\mathcal{B}(\pm \mathbf{m}, s, p)$ и $\tilde{\mathcal{B}}(\pm \mathbf{m}, s, p)$. В задаче Дирихле можно считать, что

$$u \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbf{m}, p, s), \quad v \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbf{m}, p', -s), \quad f \in \mathcal{B}(-\mathbf{m}, p, s), \quad (5.13)$$

а в задаче Неймана — что

$$u \in \mathcal{B}(\mathbf{m}, p, s), \quad v \in \mathcal{B}(\mathbf{m}, p', -s), \quad f \in \tilde{\mathcal{B}}(-\mathbf{m}, p, s). \quad (5.14)$$

Наши основные результаты в §4 дословно переносятся на пространства $\mathcal{B}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$ вместо $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ вместе с доказательствами:

Теорема 3'. *Теорема 3 остается в силе, если заменить пространства $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ пространствами $\mathcal{B}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$.*

Теорема 4'. *Теорема 4 остается в силе, если заменить пространства $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ пространствами $\mathcal{B}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$.*

В силу теоремы 1 из главы V в [12], при $0 < \sigma < 1$ оператор перехода к следу функции из $B_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$ действует ограниченным образом из этого пространства в то же, что и в случае пространства $H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$, пространство $B_p^\sigma(\Gamma)$, а правый обратный оператор действует ограниченным образом из последнего пространства и в $B_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$, так что он фактически приводит в пересечение $B_p^{\sigma+1/p}(\Omega) \cap H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$.

Переходя к задачам Дирихле и Неймана с неоднородными граничными условиями, можно повторить сказанное в пп. 5.1 и 5.2 с пространствами Бесова вместо пространств потенциалов. При этом наше рассмотрение этих задач снова совместимо с использованием наборов Уитни. Их определения остаются теми же, что и в п. 5.1. В частности, верна

Теорема 5'. *Пусть $\dot{w} = \{w_\alpha\} \in \Pi_p^\sigma(\Gamma)$, $\sigma \in (q, q+1)$, и пусть выполнены условия согласованности (5.4). Тогда существует такая функция $u \in B_p^{\sigma+1/p}(\Gamma)$, что следы ее производных $\partial^\alpha u(x)|_\Gamma$ образуют набор $\dot{w}$. Оператор $\mathcal{E}_q: \dot{w} \rightarrow u$ линеен, ограничен в указанных пространствах и зависит только от q .*

Более того, этот оператор совпадает с оператором $\mathcal{E}_q$ из теоремы 5, так что он фактически действует из $WA_p^\sigma(\Gamma)$ в пересечение $B_p^{\sigma+1/p}(\Omega) \cap H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$.

Все это снова выводится из результатов в [12] (главы VI–VII), а при $q = 1$ проверено в [1].

Рассмотрим задачу Дирихле для системы $Lu = f$, где $f \in \mathcal{H}(-m, p, s) \cap \mathcal{B}(-m, p, s)$. Предположим, что $(s, t) \in Q_\delta$, где δ в формулировках теорем 3 и 3' будем считать общим, и пусть наборы Уитни для данных Дирихле содержатся в $WA_p^{m_j-1/2+s}(\Gamma)$. Вектор-функция u_0 , которая строится по этим наборам Уитни, согласно теореме 5' принадлежит пересечению $\mathcal{H}(\mathbf{m}, p, s) \cap \mathcal{B}(\mathbf{m}, p, s)$.

Следствие 4. *При этих предположениях для решения задачи Дирихле имеем $u - u_0 \in \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{m}, p, s) \cap \tilde{\mathcal{B}}(\mathbf{m}, p, s)$.*

§6. Замечания о литературе

Начало «невариационному направлению» положили работы Кальдерона и Дальберга (1977). Этот подход теперь кратко можно охарактеризовать как основанный на использовании поверхностных потенциалов и исследовании их сходимости в некасательных конусах при приближении к Γ , контролируемой в терминах максимальных функций (максимумов модуля по этим конусам). Используются глубокая теорема Койфмана–Макинтоша–Мейера об ограниченности сингулярных интегральных операторов в $L_2(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$ (1988) и многие другие тонкие средства из анализа. Мы привели довольно большую литературу по работам этого направления об уравнениях и системах 2-го порядка в [3], и ее нет смысла здесь повторять. Добавим только, что решения в двух шкалах пространств, потенциалов и Бесова, в случае задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона рассмотрены в [11]; развитие этих результатов см. в [10], [33] и [15].

Остановимся кратко на работах по уравнениям и системам высших порядков. Здесь исследования главным образом были направлены на изучение задачи Дирихле. Скрупулезное исследование этой задачи в двух шкалах для бигармонического уравнения $\Delta^2 u = 0$ проведено в [1], см. также [8]. Задача Дирихле для полигармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ рассмотрена в [28]. Задача Неймана для бигармонического уравнения исследована в [30].

Задача Дирихле для однородных относительно дифференцирования сильно эллиптических систем высокого порядка с постоянными вещественными коэффициентами и симметричной главной частью рассматривалась в [29], [24], [7]. Наконец, задача Дирихле для общей сильно эллиптической системы с переменными коэффициентами и старшей частью, однородной относительно дифференцирования, обстоятельно изучена в препринте [14] в весовых пространствах потенциалов. Решения и правые части принадлежат пространствам с целочисленными верхними индексами и произвольным нижним индексом $p \in (1, \infty)$. Вес $\rho(x)$ равен некоторой степени регуляризованного расстояния от точки $x \in \Omega$ до границы и характеризует гладкость функции. На липшицеву постоянную наложено некоторое ограничение сверху интегрального характера.

Без сомнения, в этих работах трактовка граничных условий является более глубокой, чем при нашем подходе. Нам удалось обойтись без сделанных в [29], [7], [24] дополнительных предположений о коэффициентах и без дополнительных предположений о нормали к Γ , сделанных в [14], при этом для задачи Неймана удалось получить не менее общие результаты, чем для задачи Дирихле. Однако нам пришлось предположить выполненным условие (2.11).

В отличие от только что упомянутых работ у нас совсем не используются поверхностные потенциалы. По-видимому, наоборот, из наших результатов могут быть получены некоторые следствия для уравнений с этими потенциалами.

Мы не затрагивали здесь многочисленные исследования граничных задач в областях с особенностями границы специального вида (В. А. Кондратьев, В. А. Козлов, В. Г. Мазья, Ю. Россман, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский и др.), а также более специальные результаты для задач в липшицевых областях. См. ссылки в [14].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Adolfsson, J. Pipher, *The inhomogeneous Dirichlet problem for Δ^2 in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **159** (1998), 137–190.
- [2] М. С. Агранович, *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей*, УМН, **57:5** (2002), 3–79.
- [3] М. С. Агранович, *Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **40:4** (2006), 83–103.
- [4] M. S. Agranovich, *Remarks on spaces of potentials and Besov spaces in a Lipschitz domain and of Whitney arrays on its boundary*, Russian J. Math. Phys., **16:2** (2008) (в печати).
- [5] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.
- [6] M. Costabel, *Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results*, SIAM J. Math. Anal., **19:3** (1988), 613–626.
- [7] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, J. Pipher, G. C. Verchota, *Area integral estimates for higher order elliptic equations and systems*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **47** (1997), 1425–1461.
- [8] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, G. C. Verchota, *The Dirichlet problem for the bi-harmonic equation in a Lipschitz domain*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **36:3** (1986), 109–135.
- [9] А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик, *Свободные колебания тонких упругих оболочек*, Наука, 1979.
- [10] E. Fabes, O. Mendes, M. Mitrea, *Boundary layers on Sobolev–Besov spaces and Poisson’s equation for the Laplacian in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **159** (1998), 323–368.
- [11] D. Jerison, C. E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130** (1995), 164–219.
- [12] A. Jonsson, H. Wallin, *Function Spaces on Subsets of $\mathbb{R}^n$* , Math. Rep., vol. 2, Harwood Academic Publ., 1984.
- [13] P. D. Lax, N. Milgram, *Parabolic equations*, in: Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. Math. Stud., vol. 33, 1954, 167–190.
- [14] V. Maz’ya, M. Mitrea, T. Shaposhnikova, *The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficients*, <http://arxiv.org/abs/math/0701898>, Jan. 2007.
- [15] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov space results and the Poisson problem*, J. Funct. Anal., **176** (2000), 1–79.
- [16] С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*, УМН, **54:5** (1999), 77–142.
- [17] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Academia, Paris–Prague, 1967.
- [18] L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955), 649–675.
- [19] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces*, Duke Univ. Math. Series, vol. 1, Durham, N.C., 1976.
- [20] J. Pipher, G. Verchota, *Dilation invariant estimates and the boundary Gårding inequality for higher order elliptic operators*, Ann. of Math., **142** (1995), 1–38.
- [21] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.
- [22] V. S. Rychkov, *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. (2), **60** (1999), 237–257.

- [23] J. Savaré, *Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains.*, J. Funct. Anal., **152** (1998), 176–201.
- [24] Z. Shen, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of the L_p Dirichlet problem on Lipschitz domains*, Math. Ann., **336** (2006), 697–795.
- [25] И. Я. Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах базисовых пространств*, Матем. исслед., **9:2** (1974), 214–227.
- [26] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [27] H. Triebel, *Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers*, Rev. Mat. Comput., **15** (2002), 475–524.
- [28] G. Verchota, *The Dirichlet problem for polyharmonic equation in Lipschitz domains*, Indiana Univ. Math. J., **39** (1990), 671–702.
- [29] G. Verchota, *Potentials for the Dirichlet problem in Lipschitz domains.*, in: Potential Theory–ICPT 94, Valter de Gruyter, Berlin, 1996, 168–187.
- [30] G. Verchota, *The biharmonic Neumann problem in Lipschitz domains*, Acta Math., **194** (2005), 217–279.
- [31] М. И. Вишик, *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Матем. сб., **29 (71)** (1951), 615–676.
- [32] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc., **36** (1934), 63–69.
- [33] D. Zanger, *The inhomogeneous Neumann problem in Lipschitz domains*, Comm. Partial Differential Equations, **25:9–10** (2000), 1171–1808.