Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Кричевер, О. К. Шейнман, Алгебры операторов Лакса, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 4, 46–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2878>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:14:35

Алгебры операторов Лакса*

© 2007. И. М. КРИЧЕВЕР, О. К. ШЕЙНМАН

§1. Введение

Общий подход к операторам Лакса на алгебраических кривых был предложен одним из авторов в [1], где известная теория представлений Лакса и представлений нулевой кривизны с *рациональным спектральным параметром* обобщалась на случай алгебраических кривых Γ произвольного рода g . Линейное пространство таких операторов, ассоциированное с эффективным дивизором $D = \sum_k n_k P_k$, $P_k \in \Gamma$, определялось как пространство мероморфных $(n \times n)$ -матричных функций на Γ , имеющих полюсы кратности не выше n_k в точках P_k и не более чем простые полюсы еще в ng точках γ_s . Коэффициенты лорановского разложения этих матричных функций в окрестности точки γ_s должны были удовлетворять определенным линейным условиям, параметризованным точкой α_s проективного пространства (см. формулы (2.1)–(2.3) ниже).

Согласно [12], наборы (γ_s, α_s) общего положения параметризуют стабильные оснащенные голоморфные векторные расслоения B ранга n и степени ng на Γ . В [1] отмечалось, что условия на вид оператора Лакса в точках γ_s означают, что эти операторы можно рассматривать как мероморфные сечения расслоения $\text{End}(B)$ с дивизором полюсов D . Простым следствием этого замечания является то, что операторы Лакса, имеющие полюсы произвольного порядка в точках P_k , образуют алгебру относительно обычного поточечного умножения.

В простейшем случае двух отмеченных точек, $D = P_+ + P_-$, это позволяет ввести в алгебре соответствующих операторов почти градуированную структуру, обобщающую градуированную структуру классической аффинной алгебры $\mathfrak{gl}(n)$. Напомним, что алгебра Ли $\mathcal{V}$ называется *почти градуированной*, если $\mathcal{V} = \bigoplus \mathcal{V}_i$, где $\dim \mathcal{V}_i < \infty$ и $[\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j] \subseteq \bigoplus_{k=i+j-k_0}^{k=i+j+k_1} \mathcal{V}_k$, причем k_0 и k_1 не зависят от i, j .

Общее понятие почти градуированных алгебр и модулей над ними было введено в работах [3]–[5], где были введены обобщения алгебр Гейзенберга и Вирасоро. В ряде работ, обзор которых дан в [11], исследовались почти градуированные аналоги классических аффинных алгебр Ли, названные алгебрами токов Кричевера–Новикова (КН). Алгебру операторов Лакса, имеющих полюсы в двух точках, естественно рассматривать как обобщение $\mathfrak{gl}(n)$ -алгебры КН.

Центральное расширение алгебры $\mathcal{V}$ называется *локальным*, если оно само представляет собой почти градуированную алгебру Ли. Локальные централь-

*Работа первого автора частично поддержана грантом DMS-04-05519 Национального научного фонда США; работа второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 05-01-00170) и программой РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

ные расширения задаются локальными 2-коциклами. 2-коцикл γ называется локальным, если существует $K \in \mathbb{Z}$, такое, что $\gamma(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) = 0$ для $|i + j| > K$. Понятие локального коцикла введено в [3]. Там же была высказана гипотеза о его единственности и намечено ее доказательство для алгебр типа Вирасоро; полное доказательство дано в [9], [10]. Условие локальности важно при рассмотрении аналогов представлений старшего веса.

Основной целью настоящей работы является построение ортогональных и симплектических аналогов операторов Лакса. В этих случаях операторы Лакса не образуют ассоциативной алгебры. Они лишь образуют алгебру Ли. Для всех классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ соответствующие алгебры операторов Лакса можно рассматривать как «подкрученную» версию алгебр токов КН и алгебр петель.

В §2 мы доказываем мультипликативные свойства $\mathfrak{gl}(n)$ -значных операторов Лакса, вводим $\mathfrak{g}$ -значные операторы Лакса для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ и доказываем, что они замкнуты относительно поточечного коммутатора.

В §3 мы определяем почти градуированную структуру на алгебрах операторов Лакса и показываем, что $\dim \mathcal{V}_i = \dim \mathfrak{g}$, как и для алгебр КН.

В §4 для каждого типа алгебр операторов Лакса мы определяем 2-коцикл и доказываем его локальность.

Авторы благодарят М. Шлихенмайера за плодотворную критику.

§2. Операторы Лакса и их скобка Ли

2.1. Операторы Лакса для $\mathfrak{gl}(n)$ и $\mathfrak{sl}(n)$. Следуя [1], назовем *оператором Лакса* с параметрами Тюринга $\{\alpha_s, \gamma_s \mid s = 1, \dots, gn\}$ функцию L на Γ со значениями в $\mathfrak{gl}(n)$, голоморфную вне $P_\pm$ и точек $\{\gamma_s \mid s = 1, \dots, gn\}$ и имеющую в последних не более чем простые полюсы:

$$L = \frac{L_{s,-1}}{z - z_s} + L_{s0} + O(z - z_s), \quad z_s = z(\gamma_s), \quad (2.1)$$

так что

$$(i) \quad L_{s,-1} = \alpha_s \beta_s^t \text{ и}$$

$$\text{tr } L_{s,-1} = \beta_s^t \alpha_s = 0, \quad (2.2)$$

где $\alpha_s \in \mathbb{C}^n$ фиксирован, $\beta_s \in \mathbb{C}^n$ произволен и t в верхнем индексе обозначает транспонированную матрицу. В частности, $L_{s,-1}$ имеет ранг 1;

$$(ii) \quad \alpha_s \text{ является собственным вектором матрицы } L_{s0},$$

$$L_{s0} \alpha_s = k_s \alpha_s. \quad (2.3)$$

Лемма 2.1. Пусть L' и L'' удовлетворяют условиям (2.1)–(2.3). Тогда $L = L' L''$ также удовлетворяет им.

Доказательство. Из формулы (2.1) получаем

$$L = \frac{L'_{s,-1} L''_{s,-1}}{(z - z_s)^2} + \frac{L'_{s,-1} L''_{s0} + L'_{s0} L''_{s,-1}}{(z - z_s)} + L'_{s,-1} L''_{s1} + L'_{s0} L''_{s0} + L'_{s1} L''_{s,-1} + O(1). \quad (2.4)$$

Из (2.2) для L' следует, что первое слагаемое обращается в нуль:

$$L'_{s,-1} L''_{s,-1} = \alpha_s (\beta_s'^t \alpha_s) \beta_s''^t = 0.$$

Для второго слагаемого имеем $L_{s,-1} = L'_{s,-1}L''_{s0} + L'_{s0}L''_{s,-1} = \alpha_s(\beta_s'^t L''_{s0}) + (L'_{s0}\alpha_s)\beta_s''^t$. Из (2.2) для L' следует, что $L'_{s0}\alpha_s = k'_s\alpha_s$, а значит, $L_{s,-1} = \alpha_s\beta_s^t$, где $\beta_s^t = \beta_s'^t L''_{s0} + k'_s\beta_s''^t$. Далее, $\text{tr } L_{s,-1} = (\beta_s'^t L''_{s0} + k'_s\beta_s''^t)\alpha_s = k_s''\beta_s^t\alpha_s + k_s'\beta_s''^t\alpha_s = 0$.

Рассмотрим выражение $L_{s,0}\alpha_s$, где $L_{s,0} = L'_{s,-1}L''_{s1} + L'_{s0}L''_{s0} + L'_{s1}L''_{s,-1}$. Из определения операторов Лакса вытекает, что $L''_{s,-1}\alpha_s = 0$ и $L'_{s0}L''_{s0}\alpha_s = k'_s k_s''\alpha_s$. Мы также имеем $L'_{s,-1}L''_{s1}\alpha_s = \alpha_s(\beta_s'^t L''_{s1}\alpha_s)$. Следовательно, α_s — собственный вектор матрицы $L_{s,0}$ с собственным значением $k_s = \beta_s'^t L''_{s1}\alpha_s + k'_s k_s''$. $\square$

Так как условия (2.1), (2.2) линейны, операторы Лакса образуют ассоциативную алгебру, а следовательно, и ассоциированную алгебру Ли. Последняя называется *алгеброй операторов Лакса*.

Если функция L помимо (2.1)–(2.3) удовлетворяет условию $\text{tr } L = 0$, то она называется *оператором Лакса со значением в $\mathfrak{sl}(n)$* . Такие операторы Лакса образуют алгебру Ли.

2.2. Алгебра операторов Лакса для $\mathfrak{so}(n)$. Для элементов этой алгебры имеем $X^t = -X$. Мы вводим матричнозначную функцию L со значениями в $\mathfrak{so}(n)$ с помощью того же выражения, что и в разд. 2.1, изменяя, однако, условие (i) этого раздела ввиду того, что не существует кососимметрических матриц ранга 1, и соответственно видоизменяем условие (ii). Мы опускаем для краткости индекс s и записываем выражение (2.1) в виде

$$L = \frac{L_{-1}}{z} + L_0 + O(z), \quad (2.5)$$

где $L_0, L_1, \dots$ кососимметричны. Вместо условия (i) разд. 2.1 мы требуем, чтобы

$$L_{-1} = \alpha\beta^t - \beta\alpha^t, \quad (2.6)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}^n$ фиксирован, $\beta \in \mathbb{C}^n$ произволен и

$$\alpha^t\alpha = \beta^t\alpha (= \alpha^t\beta) = 0. \quad (2.7)$$

Мы также требуем выполнения аналога условия (2.3):

$$L_0\alpha = k\alpha \quad (2.8)$$

для некоторого комплексного числа k .

Докажем теперь замкнутость пространства операторов Лакса относительно взятия скобки Ли в рассматриваемом здесь случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$. Подчеркнем, что в этом случае структуры ассоциативной алгебры нет.

Лемма 2.2. *Свойства (2.5)–(2.8) инвариантны относительно скобки Ли.*

Доказательство. 1) Прежде всего докажем отсутствие члена с z^{-2} . Соответствующий коэффициент равен

$$\begin{aligned} [L_{-1}, L'_{-1}] &= [\alpha\beta^t - \beta\alpha^t, \alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t] \\ &= (\beta^t\alpha)(\alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t) - (\alpha^t\alpha)(\beta'\beta^t - \beta\beta'^t) - (\alpha^t\beta')(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t). \end{aligned}$$

Он обращается в нуль ввиду соотношения (2.7) (примененного как к β , так и к β'). Подчеркнем, что для произведения $L_{-1}L'_{-1}$ член с z^{-2} в нуль не обращается.

2) Далее вычислим коэффициент при z^{-1} в произведении LL' . Коэффициент равен

$$\begin{aligned} L_{-1}L'_0 + L_0L'_{-1} &= \alpha(\beta^t L'_0) - \beta(\alpha^t L'_0) + (L_0\alpha)\beta'^t - (L_0\beta')\alpha^t \\ &= \alpha(\beta^t L'_0) - \beta(-k'\alpha^t) + k\alpha\beta'^t - (L_0\beta')\alpha^t \\ &= \alpha(\beta^t L'_0 + k\beta'^t) - (L_0\beta' - k'\beta)\alpha^t \end{aligned}$$

(здесь мы использовали соотношение (2.8)). Мы видим, что пока он не имеет требуемого вида (2.6). Теперь рассмотрим соответствующий коэффициент в разложении коммутатора:

$$\begin{aligned} [L, L']_{-1} &= \alpha(\beta^t L'_0 - \beta'^t L_0 + k\beta'^t - k'\beta^t) - (L_0\beta' - L'_0\beta - k'\beta + k\beta')\alpha^t \\ &= \alpha\beta'^t - \beta''\alpha^t, \end{aligned}$$

где $\beta'^t = \beta^t L'_0 - \beta'^t L_0 + k\beta'^t - k'\beta^t$.

Легко проверить, что β'' удовлетворяет условию (2.7).

3) Проверим условие (2.8) на собственное значение матричного коэффициента при члене нулевой степени: $(LL')_0 = L_{-1}L'_1 + L_0L'_0 + L_1L'_{-1}$.

Ввиду (2.7) имеем $L'_{-1}\alpha = 0$; следовательно, для третьего слагаемого $L_1L'_{-1}\alpha = 0$.

Для первого слагаемого имеем

$$L_{-1}L'_1\alpha = (\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)L'_1\alpha = \alpha(\beta^t L'_1\alpha) - \beta(\alpha^t L'_1\alpha).$$

Последний член в правой части этого соотношения обращается в нуль в силу кососимметричности матрицы L'_1 .

Таким образом,

$$(LL')_0\alpha = k''\alpha, \quad \text{где } k'' = \beta^t L'_1\alpha + k k'. \quad (2.9)$$

□

2.3. Алгебры операторов Лакса для $\mathfrak{sp}(2n)$. Для элементов симплектической алгебры имеем $X^t = -\sigma X \sigma^{-1}$, где σ — невырожденная кососимметрическая матрица.

Возьмем разложение для L в виде

$$L = \frac{L_{-2}}{z^2} + \frac{L_{-1}}{z} + L_0 + L_1 z + L_2 z^2 + O(z^3) \quad (2.10)$$

(мы снова опускаем для краткости индекс s), где $L_{-2}, L_{-1}, L_0, L_1, \dots$ — симплектические матрицы и

$$L_{-2} = \nu \alpha \alpha^t, \quad L_{-1} = (\alpha \beta^t + \beta \alpha^t) \sigma \quad (\nu \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}^{2n}). \quad (2.11)$$

Потребуем выполнения условия, аналогичного одному из условий (2.7):

$$\beta^t \sigma \alpha = 0. \quad (2.12)$$

Заметим, что при этом второе, $\alpha^t \sigma \alpha = 0$, выполнено автоматически ввиду кососимметричности матрицы σ .

Далее, мы требуем, чтобы

$$L_0 \alpha = k \alpha \quad (2.13)$$

для некоторого комплексного числа k .

Мы накладываем новое соотношение

$$\alpha^t \sigma L_1 \alpha = 0. \quad (2.14)$$

Докажем теперь замкнутость пространства операторов Лакса относительно взятия скобки Ли в рассматриваемом здесь случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$. Подчеркнем, что и в этом случае структуры ассоциативной алгебры нет.

Лемма 2.3. *Свойства (2.10)–(2.14) инвариантны по отношению к скобке Ли.*

Доказательство. Пусть $L'' = [L, L']$.

1) Отсутствие членов порядка -4 и -3 по z в L'' вытекает только из соотношений $\beta^t \sigma \alpha = 0$, $\alpha^t \sigma \alpha = 0$.

2) Для члена порядка -2 имеем

$$L''_{-2} = (\nu' k - \nu k' + \beta^t \sigma \beta') \alpha \alpha^t \sigma,$$

т. е. он имеет вид, требуемый соотношением (2.11) (здесь и ниже ν' , β' , L'_i имеют тот же смысл для L' , что ν , β , L_i для L).

3) Для члена порядка -1 прямое вычисление с использованием (2.10), (2.11) дает

$$\begin{aligned} L''_{-1} = & \alpha(\nu \cdot \alpha^t \sigma L'_1 - \nu' \cdot \alpha^t \sigma L_1 + \beta^t \sigma L'_0 - \beta'^t \sigma L_0 + k \beta'^t \sigma - k' \beta^t \sigma) \\ & + (-\nu L'_1 \alpha + \nu' L_1 \alpha - L'_0 \beta + L_0 \beta' + k \beta' - k' \beta) \alpha^t \sigma. \end{aligned}$$

Обозначим вторую скобку через β'' . Тогда из соотношений $L_1^t = -\sigma L_1 \sigma^{-1}$, $L_0^t = -\sigma L_0 \sigma^{-1}$ (симплектичность матриц) вытекает, что первая скобка равна $\beta''' \sigma$. Таким образом,

$$L''_{-1} = (\alpha \beta''' + \beta'' \alpha^t) \sigma,$$

где

$$\beta'' = -\nu L'_1 \alpha + \nu' L_1 \alpha - L'_0 \beta + L_0 \beta' + k \beta' - k' \beta.$$

Покажем, что $\beta''' \sigma \alpha = 0$. Из полученного выше выражения для $\beta''' \sigma$ находим

$$\beta''' \sigma \alpha = \nu \cdot \alpha^t \sigma L'_1 \alpha - \nu' \cdot \alpha^t \sigma L_1 \alpha + \beta^t \sigma L'_0 \alpha - \beta'^t \sigma L_0 \alpha + k \beta'^t \sigma \alpha - k' \beta^t \sigma \alpha.$$

Первые два члена этого выражения обращаются в нуль в силу соотношения (2.14), примененного к L и L' . Ко вторым двум членам применим соотношения $L_0 \alpha = k \alpha$ и $L'_0 \alpha = k' \alpha$, после чего все оставшиеся члены исчезают ввиду соотношений (2.12).

4) Проверим условие (2.13) на собственные значения члена нулевой степени. По определению

$$(LL')_0 = \nu \alpha \alpha^t \sigma L'_2 + (\alpha \beta^t + \beta \alpha^t) \sigma L'_1 + L_0 L'_0 + L_1 (\alpha \beta'^t + \beta' \alpha^t) \sigma + \nu' L_2 \alpha \alpha^t \sigma.$$

При умножении справа на α два последних члена очевидным образом исчезают. Получаем

$$(LL')_0 \alpha = \nu \alpha \alpha^t \sigma L'_2 \alpha + \alpha \beta^t \sigma L'_1 \alpha + \beta \alpha^t \sigma L'_1 \alpha + k k' \alpha.$$

Третье слагаемое равно 0 в силу (2.14). Таким образом, вектор α является собственным уже для свободного члена в произведении LL' :

$$(LL')_0 \alpha = \alpha(\nu \cdot \alpha^t \sigma L'_2 \alpha + \beta^t \sigma L'_1 \alpha + k k'),$$

а в коммутаторе получим

$$L''_0 \alpha = \alpha(\nu \cdot \alpha^t \sigma L'_2 \alpha - \nu' \cdot \alpha^t \sigma L_2 \alpha + \beta^t \sigma L'_1 \alpha - \beta'^t \sigma L_1 \alpha). \quad (2.15)$$

5) Проверим сохранение условия $\alpha^t \sigma L_1 \alpha = 0$ в произведении и коммутаторе. Для произведения по определению

$$(LL')_0 = L_{-2}L'_3 + L_{-1}L'_2 + L_0L'_1 + L_1L'_0 + L_2L'_{-1} + L_3L'_{-2}.$$

Подставляя известные выражения для L_{-2} , L'_{-2} , L_{-1} , L'_{-1} , получим

$$\begin{aligned} \alpha^t \sigma (LL')_0 \alpha &= \nu(\alpha^t \sigma \alpha) \alpha^t \sigma L'_3 \alpha + ((\alpha^t \sigma \alpha) \beta^t + (\alpha^t \sigma \beta) \alpha^t) \sigma L'_2 \alpha \\ &\quad - k(\alpha^t \sigma L'_1 \alpha) + \tilde{k}(\alpha^t \sigma L_1 \alpha) \\ &\quad + \alpha^t \sigma L_2 (\alpha(\beta'^t \sigma \alpha) + \beta'(\alpha^t \sigma \alpha)) + \nu' \alpha^t \sigma L_3 \alpha (\alpha^t \sigma \alpha). \end{aligned}$$

Ввиду соотношений (2.11)–(2.14) это выражение обращается в нуль. $\square$

§3. Почти градуированная структура

В этом параграфе мы рассматриваем следующие случаи: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, и заканчиваем случаем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, который является специальным в отношении почти градуированной структуры. Общее определение почти градуированной структуры дано во введении. Обозначим через $\bar{\mathfrak{g}}$ алгебру операторов Лакса, соответствующую $\mathfrak{g}$.

Для любой из перечисленных выше алгебр $\mathfrak{g}$, за исключением $\mathfrak{gl}(n)$, и любого $m \in \mathbb{Z}$ пусть

$$\mathfrak{g}_m = \{L \in \bar{\mathfrak{g}} \mid (L) + D \geq 0\},$$

где (L) — дивизор $\mathfrak{g}$ -значной функции L , и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$

$$D = -mP_+ + (m + g)P_- + \sum_{s=1}^{ng} \gamma_s,$$

а для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$

$$D = -mP_+ + (m + g)P_- + 2 \sum_{s=1}^{ng} \gamma_s.$$

Мы называем $\mathfrak{g}_m$ (однородным) подпространством степени m алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 3.1. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$

1) $\dim \mathfrak{g}_m = \dim \mathfrak{g}$;

2) $\bar{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}_m$;

3) $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subseteq \bigoplus_{m=k+l} \mathfrak{g}_m$.

Доказательство. Сначала докажем 1). Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ по теореме Римана–Роха размерность пространства всех $\mathfrak{g}$ -значных функций L , удовлетворяющих соотношению $(L) + D \geq 0$, равна $(\dim \mathfrak{g})(ng + 1)$. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ она равна $(\dim \mathfrak{g})(2ng + 1)$. Мы докажем, что в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ для произвольного $m \in \mathbb{Z}$ имеется ровно $\dim \mathfrak{g}$ соотношений в каждом полюсе

γ_s , а в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ таких соотношений $2 \dim \mathfrak{g}$. Это будет означать, что $\dim \mathfrak{g}_m = \dim \mathfrak{g}$.

Сначала рассмотрим случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Элементы подпространства $\mathfrak{g}_m$ удовлетворяют определенным условиям трех типов, происходящим из условий (2.2), (2.3) на вычеты, собственные значения и следы матрицы $L \in \mathfrak{g}_m$, которые описаны ниже.

1) Для каждой слабой особенности $L_{-1} = \alpha\beta^t$, что должно было бы дать $\dim \mathfrak{g}$ соотношений (так как $L_{-1} \in \mathfrak{g}$), если бы правая часть была фиксирована. Но она зависит от свободного n -мерного вектора β . Следовательно, мы имеем $\dim \mathfrak{g} - n$ условий в каждом из ng простых полюсов γ_s .

2) Для каждой слабой особенности $L_0\alpha = k\alpha$, что дает n условий. Принимая во внимание один свободный параметр k , получаем $n - 1$ условий в каждом γ_s .

3) Мы также имеем $\text{tr } L = 0$, т. е. еще одно условие в каждой слабой особенности.

Таким образом, мы имеем $(\dim \mathfrak{g} - n) + (n - 1) + 1 = \dim \mathfrak{g}$ соотношений в каждой точке γ_s , что и требовалось.

Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ мы придерживаемся той же аргументации. Снова соотношение (2.6) $L_{-1} = \alpha\beta^t - \beta\alpha^t$ дает $\dim \mathfrak{g} - n$ уравнений, соотношение (2.8) $L_0\alpha = k\alpha$ дает $n - 1$ уравнений и (2.7) $\beta^t\alpha = 0$ дает еще одно уравнение. Суммируя, получаем $\dim \mathfrak{g}$ уравнений в каждой точке γ_s .

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ в каждой точке γ_s имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} L_{-2} &= \nu\alpha\alpha^t : & \dim \mathfrak{g} - 1 \text{ условий (один свободный параметр } \nu), \\ L_{-1} &= (\alpha\beta^t + \beta\alpha^t)\sigma : & \dim \mathfrak{g} - 2n \text{ условий (} 2n \text{ свободных параметров } \beta), \\ L_0\alpha &= k\alpha : & 2n - 1 \text{ условий (один свободный параметр } k), \\ \beta^t\sigma\alpha &= 0, \alpha^t\sigma L_1\alpha = 0 : & 2 \text{ условия,} \end{aligned}$$

т. е. $2 \dim \mathfrak{g}$ условий в каждой из ng точек, что и требовалось.

Для $m > 0$ и $m < -g$ подпространства $\mathfrak{g}_m$ линейно независимы по очевидной причине: порядки в $P_{\pm}$ элементов этих подпространств различны для различных m .

Для $-g \leq m \leq 0$ линейная независимость подпространств $\mathfrak{g}_m$ вытекает из того факта, что не существует голоморфных везде операторов Лакса. Мы хотели бы подчеркнуть, что последний аргумент применим только в случае простых алгебр Ли. Этим объясняется то, почему в случае редуктивной алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ требуется некоторая модификация (см. ниже).

Утверждение 3) теоремы следует из рассмотрения порядков в точках $P_{\pm}$. $\square$

Теорема 3.1 определяет почти градуированную структуру на $\bar{\mathfrak{g}}$.

Теперь рассмотрим случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$. В этом случае $\bar{\mathfrak{g}}$ содержит подпространство функций, принимающих значения в одномерном пространстве скалярных матриц. Пусть L — такая функция. Ввиду (2.2) получаем $\text{tr } L_{-1} = 0$. Так как L_{-1} — скалярная матрица, то $L_{-1} = 0$. Следовательно, L голоморфна везде, за исключением точек $P_{\pm}$. Пусть $\mathcal{A}$ обозначает алгебру мероморфных функций на Γ , голоморфных везде, кроме точек $P_{\pm}$. Тогда $L \in \mathcal{A} \cdot \text{id}$, где id — единичная матрица. Следовательно,

$$\overline{\mathfrak{gl}(n)} = \overline{\mathfrak{sl}(n)} \oplus \mathcal{A} \cdot \text{id}. \quad (3.1)$$

В [3] в пространстве таких функций был введен некоторый базис $\{A_m\}$ (позднее названный *базисом Кричевера–Новикова*). Положим $\mathcal{A}_m = \mathbb{C}A_m$ и $\mathfrak{gl}(n)_m = \mathfrak{sl}(n)_m \oplus (\mathcal{A}_m \cdot \text{id})$. Для $m > 0$ и $m < -g$ это определение эквивалентно данному выше определению подпространства $\mathfrak{g}_m$ (с $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$).

Как следует из (3.1), с $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{gl}(n)_m$ теорема 3.1 остается справедливой для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$. Лишь соотношение 3) теоремы выполняется с другим верхним пределом суммирования, определяемым алгеброй $\mathcal{A}$ (см. [3]).

§ 4. Центральные расширения алгебр операторов Лакса

4.1. Центральные расширения алгебр операторов Лакса над $\mathfrak{gl}(n)$. Для алгебр токов Кричевера–Новикова (в том числе для алгебр петель) 2-коцикл, задающий центральное расширение, дается известным выражением $\text{tr} \text{res}_{P_+} L dL'$. Для этих алгебр данный коцикл является локальным. Коцикл χ называется *локальным* [3], если существуют константы μ', μ'' , такие, что $\chi(\mathfrak{g}_m, \mathfrak{g}_{m'}) = 0$ за исключением тех случаев, когда $\mu' \leq m + m' \leq \mu''$, где $\mathfrak{g}_m, \mathfrak{g}_{m'}$ — однородные подпространства, введенные в предыдущем разделе. В случае алгебр операторов Лакса приведенный выше коцикл уже не является локальным. В этом параграфе мы подправим его так, чтобы получить локальный коцикл.

Для каждого оператора L собственное значение k его компоненты нулевой степени L_0 (см. (2.3)) может рассматриваться как линейный функционал от L . Мы обозначим этот функционал через $k(L)$.

Лемма 4.1. *В каждой слабой особенности 1-форма $\text{tr} L dL'$ имеет, самое большее, простой полюс, и*

$$\text{res tr } L dL' = k([L, L']). \quad (4.1)$$

Доказательство. Подсчитаем обе части этого соотношения явно.

1) Используя соотношение

$$dL' = -\frac{\alpha\beta^{tt}}{z^2} + L'_1 + \dots$$

и формулу (2.1), получаем

$$L dL' = -\frac{\alpha\beta^t\alpha\beta^{tt}}{z^3} - \frac{L_0\alpha\beta^{tt}}{z^2} - \frac{L_1\alpha\beta^{tt} - \alpha\beta^t L'_1}{z} + \dots$$

Первый член обращается в нуль, так как $\beta^t\alpha = 0$. Второй член обращается в нуль под символом следа, так как $L_0\alpha = k\alpha$ и $\text{tr} \alpha\beta^{tt} = \beta^{tt}\alpha = 0$. Третий член дает нам требуемый вычет. Имеем

$$\text{res tr } L dL' = \text{tr}(\alpha\beta^t L'_1 - L_1\alpha\beta^{tt}) = \beta^t L'_1 \alpha - \beta^{tt} L_1 \alpha.$$

2) Теперь вычислим правую часть рассматриваемого соотношения. Обозначим через $[L, L']_0$ член нулевой степени разложения (2.1) для коммутатора $[L, L']$. Имеем

$$[L, L']_0 = \alpha\beta^t L'_1 + L_0 L'_0 + L_1 \alpha\beta^{tt} - \alpha\beta^{tt} L_1 - L'_0 L_0 - L'_1 \alpha\beta^t.$$

Умножим обе части этого соотношения на α справа. Тогда третьи члены в обеих строках обращаются в нуль, так как они содержат множители $\beta^{tt}\alpha, \beta^t\alpha$, равные

нулю ввиду (2.2). Вторые члены взаимно уничтожаются, так как $L_0 L'_0 \alpha = k' k \alpha$ и $L'_0 L_0 \alpha = k k' \alpha$. Следовательно,

$$[L, L']_0 \alpha = \alpha \beta^t L'_1 \alpha - \alpha \beta'^t L_1 \alpha = \alpha (\beta^t L'_1 \alpha - \beta'^t L_1 \alpha).$$

Выражение в скобках представляет собой 1×1 -матрицу, т.е. комплексное число. Разумеется, это комплексное число является собственным значением матрицы $[L, L']_0$ на векторе α , т.е. значением $k([L, L'])$. Это значение в точности совпадает с вычисленным выше выражением для $\text{tr res } L dL'$, что завершает доказательство. $\square$

Мы хотим избавиться от сингулярностей 1-формы $\text{tr } L dL'$ в γ_s путем вычитания из нее другого выражения для собственного значения в правой части соотношения (4.1). Замечательно, что это новое выражение формулируется в терминах связностей в голоморфных расслоениях на Γ , явный вид которых дан в [2]. Ниже $\mathcal{L}$ обозначает 1-форму такой связности.

Лемма 4.2. Пусть $\mathcal{L}$ — матричнозначная 1-форма, локально, в окрестности слабой особенности, равная

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \frac{dz}{z} + \mathcal{L}_0 dz + \dots,$$

причем $\mathcal{L}$ удовлетворяет тем же условиям, что и L (см. (2.1)–(2.3)), с одним лишь отличием: $\tilde{\beta}^t \alpha = 1$, где $\mathcal{L}_{-1} = \alpha \tilde{\beta}^t$. Тогда 1-форма $\text{tr } L \mathcal{L}$ имеет, самое большее, простой полюс при $z = 0$ и

$$\text{res tr } L \mathcal{L} = k(L).$$

Доказательство. Имеем

$$L = \frac{\alpha \beta^t}{z} + L_0 + \dots, \quad \mathcal{L} = \left(\frac{\alpha \tilde{\beta}^t}{z} + \mathcal{L}_0 + \dots \right) dz;$$

следовательно,

$$L \mathcal{L} = \left(\frac{\alpha \beta^t \alpha \tilde{\beta}^t}{z^2} + \frac{\alpha \beta^t \mathcal{L}_0 + L_0 \alpha \tilde{\beta}^t}{z} + \dots \right) dz.$$

Как и выше, первый член обращается в нуль. Для второго члена имеем

$$\text{res tr } L \mathcal{L} = \text{tr}(\alpha \beta^t \mathcal{L}_0 + L_0 \alpha \tilde{\beta}^t) = \beta^t \mathcal{L}_0 \alpha + \tilde{\beta}^t L_0 \alpha.$$

Далее, $\mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k} \alpha$, $L_0 \alpha = k \alpha$; следовательно, $\beta^t \mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k} \beta^t \alpha = 0$ и $\tilde{\beta}^t L_0 \alpha = k \tilde{\beta}^t \alpha = k$. Это завершает доказательство. $\square$

Теорема 4.3. Для каждой 1-формы $\mathcal{L}$, удовлетворяющей условиям леммы 4.2, 1-форма $\text{tr}(L dL' - [L, L'] \mathcal{L})$ регулярна везде, за исключением точек $P_{\pm}$, и выражение

$$\gamma(L, L') = \text{res}_{P_{\pm}} \text{tr}(L dL' - [L, L'] \mathcal{L})$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

Доказательство. В ходе доказательства леммы 4.1 и леммы 4.2 мы видели, что 1-формы $\text{tr } L dL'$ и $\text{tr}[L, L'] \mathcal{L}$ имеют простые полюсы в каждой из точек γ_s , и их вычеты равны одной и той же величине $k_s([L, L'])$. Следовательно, их разность регулярна в каждой из точек γ_s .

Предположим, что в точке P_+ мы имеем разложения

$$L(z) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i z^i, \quad L'(z) = \sum_{j=m'}^{\infty} b_j z^j, \quad \mathcal{L}(z) = \sum_{k=m_+}^{\infty} c_k z^k dz. \quad (4.2)$$

Тогда

$$L(z) dL'(z) = \sum_{p=m+m'}^{\infty} \left(\sum_{i+j=p} j a_i b_j \right) z^{p-1} dz$$

и

$$[L(z), L'(z)] \mathcal{L} = \sum_{p=m+m'+m_+}^{\infty} \left(\sum_{i+j+k=p} [a_i, b_j] c_k \right) z^p dz.$$

Чтобы хотя бы одна из этих 1-форм имела нетривиальный вычет в точке P_+ , необходимо, чтобы выполнялось либо неравенство $m+m' \leq 0$, либо неравенство $m+m'+m_+ \leq -1$, другими словами,

$$m+m' \leq \max\{0, -1-m_+\}.$$

Если L и L' однородны степеней m , m' соответственно, то в точке P_- их разложения, аналогичные разложениям (4.2), начинаются с $i = -m-g$, $j = -m'-g$ соответственно. Разложение для $\mathcal{L}$ начинается с некоторого целого m_- . Следовательно, условие в точке P_- выглядит так:

$$-m-m'-2g \leq \max\{0, -1+m_-\}.$$

Окончательно, получаем

$$\min\{0, 1-m_-\} - 2g \leq m+m' \leq \max\{0, -1-m_+\}.$$

Так как $m_{\pm}$ фиксированы ($\mathcal{L}$ фиксирована), последнее в точности означает, что коцикл локален. $\square$

4.2. Центральные расширения для алгебр операторов Лакса над $\mathfrak{so}(n)$. Мы придерживаемся здесь той же линии рассуждений, что и в предыдущем разделе.

Лемма 4.4. *В каждой слабой особенности 1-форма $\text{tr } L dL'$ имеет, самое большее, простой полюс, и*

$$\text{res tr } L dL' = 2k([L, L']). \quad (4.3)$$

Доказательство. 1) Применяя (2.5) и соотношение

$$dL' = -L'_{-1} z^{-2} + L'_1 + \dots,$$

где L'_{-1} дается соотношением (2.6), мы получаем

$$L dL' = -\frac{L_{-1} L'_{-1}}{z^3} - \frac{L_0 L'_{-1}}{z^2} - \frac{L_1 L'_{-1} - L_{-1} L'_1}{z} + \dots. \quad (4.4)$$

Для первого члена мы имеем

$$L_{-1} L'_{-1} = (\alpha \beta^t - \beta \alpha^t)(\alpha \beta^{t'} - \beta' \alpha^t) = \alpha(\beta^t \alpha) \beta^{t'} - \beta(\alpha^t \alpha) \beta^{t'} - \alpha \beta^t \beta' \alpha^t - \beta \alpha^t \beta' \alpha^t.$$

Первые два слагаемых обращаются в нуль благодаря (2.7). Для оставшихся имеем

$$\text{tr}(L_{-1} L'_{-1}) = \text{tr}(-\alpha \beta^t \beta' \alpha^t - \beta \alpha^t \beta' \alpha^t) = -(\alpha^t \alpha) \beta^t \beta' - (\alpha^t \beta) \alpha^t \beta',$$

что снова обращается в нуль ввиду (2.7).

Снова (как и в разд. 4.1) член, содержащий z^{-2} , обращается в нуль под символом следа. По определению

$$L_0 L'_{-1} = L_0(\alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t) = k\alpha\beta'^t - L_0\beta'\alpha^t.$$

Теперь заметим, что $\text{tr}(L_0\beta'\alpha^t) = \text{tr}(\alpha^t L_0\beta')$ и $\alpha^t L_0 = -k\alpha^t$. Следовательно, $\text{tr}(L_0 L'_{-1}) = 2k\alpha^t\beta'$ обращается в нуль ввиду (2.7).

Третий член в (4.4) дает нам требуемый вычет. Имеем

$$\text{res } L dL' = (L_{-1}L'_1 - L_1L'_{-1}).$$

Подставляя L_{-1} , L'_1 из (2.6), мы получим

$$\text{res } L dL' = \alpha\beta^t L'_1 - \beta\alpha^t L'_1 - L_1\alpha\beta'^t + L_1\beta'\alpha^t;$$

следовательно,

$$\text{tr res } L dL' = \beta^t L'_1 \alpha - \alpha^t L'_1 \beta - \beta'^t L_1 \alpha + \alpha^t L_1 \beta'.$$

В силу кососимметричности матриц L_1 , L'_1 первые два слагаемых в последнем соотношении равны и то же самое верно относительно двух последних слагаемых. Следовательно,

$$\text{tr res } L dL' = 2(\beta^t L'_1 \alpha - \beta'^t L_1 \alpha).$$

Из (2.9), очевидно, вытекает, что $[L, L']_0 \alpha = \beta^t L'_1 \alpha - \beta'^t L_1 \alpha$, и это доказывает лемму. $\square$

Лемма 4.5. Пусть $\mathcal{L}$ — кососимметрическая матричнозначная 1-форма, такая, что локально, в окрестности слабой особенности,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \frac{dz}{z} + \mathcal{L}_0 dz + \dots,$$

где $\mathcal{L}_{-1} = \alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t$, $\tilde{\beta}^t \alpha = 1$ и $\mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k}\alpha$. Тогда 1-форма $\text{tr } L\mathcal{L}$ имеет, самое большее, простой полюс при $z = 0$ и

$$\text{res tr } L\mathcal{L} = 2k(L).$$

Доказательство. Коэффициент при z^{-2} в произведении $L\mathcal{L}$ равен по определению

$$(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)(\alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t) = \alpha(\beta^t \alpha)\tilde{\beta}^t - \alpha\beta^t \tilde{\beta}\alpha^t - \beta(\alpha^t \alpha)\tilde{\beta}^t + \beta\alpha^t \tilde{\beta}\alpha^t.$$

Первый и третий члены обращаются в нуль по (2.7). Для следа оставшейся суммы имеем

$$\text{tr}(-\alpha\beta^t \tilde{\beta}\alpha^t + \beta\alpha^t \tilde{\beta}\alpha^t) = -(\alpha^t \alpha)\beta^t \tilde{\beta} + (\alpha^t \beta)\alpha^t \tilde{\beta},$$

что обращается в нуль по той же причине.

Перемножая разложения для L и $\mathcal{L}$, находим

$$\text{tr res}(L\mathcal{L}) = \text{tr}(L_{-1}\mathcal{L}_0 + L_0\mathcal{L}_{-1}) = \text{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathcal{L}_0 + \text{tr } L_0(\alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t).$$

Для первого слагаемого имеем

$$\text{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathcal{L}_0 = \text{tr}(\alpha\beta^t \mathcal{L}_0 - \beta\alpha^t \mathcal{L}_0) = \beta^t \mathcal{L}_0 \alpha - \alpha^t \mathcal{L}_0 \beta.$$

Заметим, что в силу кососимметричности $\alpha^t \mathcal{L}_0 \beta = -\beta^t \mathcal{L}_0 \alpha$, а следовательно,

$$\text{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathcal{L}_0 = \beta^t \mathcal{L}_0 \alpha - \alpha^t \mathcal{L}_0 \beta = 2\beta^t \mathcal{L}_0 \alpha = 2\tilde{k}\beta^t \alpha,$$

что обращается в нуль ввиду (2.7).

Для второго слагаемого имеем

$$\mathrm{tr} L_0(\alpha \tilde{\beta}^t - \tilde{\beta} \alpha^t) = \mathrm{tr}(L_0 \alpha \tilde{\beta}^t - L_0 \tilde{\beta} \alpha^t) = \tilde{\beta}^t L_0 \alpha - \alpha^t L_0 \tilde{\beta}.$$

Так как $L_0 \alpha = k \alpha$, $\alpha^t L_0 = -k \alpha^t$ и $\tilde{\beta}^t \alpha = \alpha^t \tilde{\beta} = 1$, мы получаем

$$\mathrm{tr} L_0(\alpha \tilde{\beta}^t - \tilde{\beta} \alpha^t) = 2k. \quad \square$$

Теорема 4.6. *Для каждой 1-формы $\mathcal{L}$, удовлетворяющей условиям леммы 4.5, 1-форма $\mathrm{tr}(L dL' - [L, L']\mathcal{L})$ регулярна везде, за исключением точек $P_{\pm}$, и выражение*

$$\gamma(L, L') = \mathrm{res}_{P_{+}} \mathrm{tr}(L dL' - [L, L']\mathcal{L})$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3. Оно опирается только на отсутствие вычетов 1-формы, определяющей коцикл, в слабых особенностях.

Имеется определенный произвол в определении $\mathcal{L}$ в лемме 4.5. Например, мы могли бы потребовать, чтобы $\mathcal{L}_{-1} = \alpha \tilde{\beta}^t$, и взять в теореме 4.6 $\mathrm{tr}(L dL' - 2[L, L']\mathcal{L})$.

4.3. Центральные расширения алгебр операторов Лакса над $\mathfrak{sp}(2n)$. Мы продолжаем придерживаться той же линии рассуждений, что и в предыдущих разделах. Во-первых, докажем следующий точный аналог леммы 4.4.

Лемма 4.7. *В каждой слабой особенности 1-форма $\mathrm{tr} L dL'$ имеет, самое большее, простой полюс, и*

$$\mathrm{res} \mathrm{tr} L dL' = 2k([L, L']). \quad (4.5)$$

Доказательство. Прямое вычисление формы $L dL'$ на основе разложения (2.10) показывает, что коэффициенты при z^{-5} и z^{-4} этой матричнозначной 1-формы равны 0 ввиду соотношений (2.12).

Для коэффициента при z^{-3} имеем

$$(L dL')_{-3} = -(\beta^t \sigma \beta' - 2\nu') \alpha \alpha^t \sigma.$$

Это выражение обращается в нуль под знаком следа:

$$\mathrm{tr}(L dL')_{-3} = -(\beta^t \sigma \beta' - 2\nu')(\alpha^t \sigma \alpha) = 0.$$

Аналогично, используя (2.12)–(2.14), имеем

$$\mathrm{tr}(L dL')_{-2} = \nu(\alpha^t \sigma L'_1 \alpha) - 2k(\beta'^t \sigma \alpha) - \nu'(\alpha^t \sigma L_1 \alpha) = 0.$$

Таким образом, 1-форма $\mathrm{tr} L dL'$ действительно имеет не более чем простой полюс в рассматриваемой точке. Прямое вычисление вычета дает

$$\mathrm{tr}(L dL')_{-1} = 2(\nu \cdot \alpha^t \sigma L'_2 \alpha - \nu' \cdot \alpha^t \sigma L_2 \alpha + \beta^t \sigma L'_1 \alpha - \beta'^t \sigma L_1 \alpha),$$

что в точности совпадает с удвоенным выражением (2.15) для $k([L, L'])$. $\square$

Лемма 4.8. Пусть $\mathcal{L}$ есть $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма, такая, что локально, в окрестности каждой слабой особенности,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \frac{dz}{z} + \mathcal{L}_0 dz + \dots,$$

где $\mathcal{L}_{-1} = (\alpha \tilde{\beta}^t + \tilde{\beta} \alpha^t) \sigma$, $\tilde{\beta}^t \sigma \alpha = 1$, $\mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k} \alpha$ и $\alpha^t \sigma \mathcal{L}_1 \alpha = 0$. Тогда 1-форма $\text{tr } L\mathcal{L}$ имеет, самое большее, простой полюс при $z = 0$ и

$$\text{res tr } L\mathcal{L} = 2k(L).$$

Доказательство. Разложение для $L\mathcal{L}$ начинается с z^{-3} . Имеем

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-3} = \nu(\tilde{\beta}^t \sigma \alpha)(\alpha^t \sigma \alpha) = 0,$$

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-2} = \nu(\alpha^t \sigma \tilde{\beta})(\alpha^t \sigma \alpha) + (\beta^t \sigma \tilde{\beta})(\alpha^t \sigma \alpha) + (\alpha^t \sigma \tilde{\beta})(\alpha^t \sigma \beta) = 0.$$

Таким образом, 1-форма $\text{tr } L\mathcal{L}$ действительно имеет не более чем простой полюс в рассматриваемой точке. Вычисление вычета дает

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-1} = \nu \cdot \alpha^t \sigma \mathcal{L}_1 \alpha + \beta^t \sigma(\mathcal{L}_0 \alpha) + (\alpha^t \sigma \mathcal{L}_0) \beta + \tilde{\beta}^t \sigma(L_0 \alpha) + (\alpha^t \sigma L_0) \tilde{\beta}.$$

По условию леммы $\alpha^t \sigma \mathcal{L}_1 \alpha = 0$, $\mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k} \alpha$. Из последнего равенства также следует, что $\alpha^t \sigma \mathcal{L}_0 = -\tilde{k} \alpha^t \sigma$. Поэтому

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-1} = \tilde{\beta}^t \sigma(L_0 \alpha) + (\alpha^t \sigma L_0) \tilde{\beta}.$$

Ввиду соотношений $L_0 \alpha = k \alpha$, $\alpha^t \sigma L_0 = -k \alpha^t \sigma$ имеем

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-1} = 2k(\tilde{\beta}^t \sigma \alpha) = 2k. \quad \square$$

Из двух последних лемм, как и выше, вытекает

Теорема 4.9. При $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ выражение

$$\gamma(L, L') = \text{res}_{P_+} \text{tr}(L dL')$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] I. M. Krichever, *Vector bundles and Lax equations on algebraic curves*, Comm. Math. Phys., **229**:2 (2002), 229–269; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0108110>.
- [2] I. M. Krichever, *Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Witham equations*, Mosc. Math. J., **2**:4 (2002), 717–752, 806; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0112096>.
- [3] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов*, Функц. анализ и его прил., **21**:2 (1987), 46–63.
- [4] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского*, Функц. анализ и его прил., **21**:4 (1987), 47–61.
- [5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях*, Функц. анализ и его прил., **23**:1 (1989), 46–63.
- [6] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции*, УМН, **55**:4 (2000), 181–182.
- [7] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения на римановых поверхностях и уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП). I*, Функц. анализ и его прил., **12**:4 (1978), 41–52.

- [8] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения на алгебраических кривых и нелинейные уравнения*, УМН, **35**:6 (1980), 47–68.
- [9] M. Schlichenmaier, *Local cocycles and central extensions for multi-point algebras of Krichever–Novikov type*, J. Reine Angew. Math., **559** (2003), 53–94.
- [10] M. Schlichenmaier, *Higher genus affine algebras of Krichever–Novikov type*, Moscow Math. J., **3**:4 (2003), 1395–1427; <http://arxiv.org/abs/math/0210360>.
- [11] O. K. Sheinman, *Affine Krichever–Novikov algebras, their representations and applications*, in: Geometry, Topology and Mathematical Physics. S. P. Novikov’s Seminar 2002–2003,, Amer. Soc. Transl. (2), vol. 212 (eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2004, 297–316; <http://arxiv.org/abs/Math.RT/0304020>.
- [12] А. Н. Тюрин, *Классификация векторных расслоений на алгебраических кривых произвольного рода*, Изв. АН СССР, сер. мат., **29** (1965), 657–688.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
Университет Колумбия, Нью-Йорк
e-mail: krichev@math.columbia.edu

Поступило в редакцию
28 февраля 2007 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Независимый московский университет
e-mail: sheinman@mi.ras.ru