Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, K -конечные матричные элементы неприводимых модулей Хариш-Чандры являются гипергеометрическими функциями, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 4, 60–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:35:47

K -конечные матричные элементы неприводимых модулей Хариш-Чандры являются гипергеометрическими функциями*

© 2007. Ю. А. НЕРЕТИН

Памяти Дмитрия Петровича Желобенко, по классической книге которого автор учил группы Ли и представления

§1. Предварительные сведения и обозначения

1.1. Полупростые группы. Обозначения. Пусть G — линейная полупростая группа Ли и K — ее максимальная компактная подгруппа. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G , а через $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ — ее универсальную обертывающую алгебру. Через L_X и R_X , где $X \in \mathfrak{g}$, мы обозначим левую и правую производные Ли на G . Пусть $\mathfrak{U}_l(\mathfrak{g})$ (соответственно $\mathfrak{U}_r(\mathfrak{g})$) — алгебры Ли дифференциальных операторов на G , порожденных левыми (соответственно правыми) производными.

Обозначим через P минимальную параболическую подгруппу¹⁾ в G и рассмотрим ее разложение $P = MAN$, где N — нильпотентный радикал, MA — редуктивный фактор Леви подгруппы P , M — компактная подгруппа и $A \simeq (\mathbb{R}_+^*)^k$ — векторная подгруппа²⁾.

1.2. Пример: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Пусть $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ — группа вещественных $n \times n$ -матриц g с определителем 1. Тогда $K = \mathrm{SO}(n)$ — ее подгруппа, состоящая из ортогональных матриц. Параболическая подгруппа P состоит из верхнетреугольных матриц

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \prod_{j=1}^n a_{jj} = 1.$$

Нильпотентная подгруппа $N \subset P$ состоит из матриц, удовлетворяющих условию $a_{11} = a_{22} = \dots = 1$.

Подгруппа Леви $MA \subset P$ состоит из диагональных матриц, т.е. $MA \simeq (\mathbb{R}^*)^{n-1}$.

*Работа поддержана грантами FWF-P19064, NWO-047.017.015, JSPS-RFBR 07.01.91209 и Российским федеральным агентством по атомной энергии.

¹⁾Определение см., например, в [10] и [7]; для групп $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$ подгруппа P является стабилизатором полного флага; для остальных классических серий $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}^*(2n)$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ подгруппа P является стабилизатором полного изотропного флага.

²⁾Мы обозначаем через $\mathbb{R}^*$ (соответственно $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$) мультипликативную группу вещественных (соответственно положительных вещественных, комплексных) чисел.

Компактный множитель $M \simeq (\mathbb{Z}_2)^{n-1}$ состоит из диагональных матриц с собственными числами ± 1 .

Векторная подгруппа $A \simeq (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$ состоит из диагональных матриц с положительными матричными элементами.

Напомним, что полный *флаг* $\mathcal{V}$ в $\mathbb{R}^n$ — это набор подпространств

$$\mathcal{V}: 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{R}^n, \quad \dim V_j = j. \quad (1)$$

Однородное пространство $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/P$ — это пространство всех флагов в $\mathbb{R}^n$. Подгруппа $P \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ является стабилизатором стандартного флага, состоящего из координатных подпространств,

$$\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Грассманиан Gr_α — это пространство всех α -мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Грассманиан является однородным пространством $\mathrm{Gr}_\alpha = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/Q_\alpha$, где Q_α — максимальная параболическая подгруппа, состоящая из блочных $(\alpha + (n - \alpha)) \times (\alpha + (n - \alpha))$ -матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

1.3. Основные серии. Любой характер группы $A \simeq (\mathbb{R}_+^*)^k$ имеет вид $\chi_s(x_1, \dots, x_k) = \prod x_j^{s_j}$, где s_j — комплексные числа. Ниже мы обозначаем такие характеры через χ или χ_s . Обозначим через $\hat{A}$ группу всех характеров $A \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Пусть $\chi \in \hat{A}$. Пусть τ — неприводимое представление группы M . Обозначим через $\chi \otimes \tau$ представление группы $P = MAN$, равное χ на A , τ на M и тривиальное на N . Через $\mathrm{Ind}_P^G(\chi \otimes \tau)$ мы обозначим представление группы G , индуцированное с $\chi \otimes \tau$ (см. [10], [9]), т.е. представление *невыврожденной основной серии*.

Дадим замкнутое в себе описание той же конструкции. Обозначим через Ξ пространство представления $\chi \otimes \tau$. Рассмотрим пространство $G \times \Xi$ и его фактор $G \times_P \Xi$ по отношению эквивалентности

$$(g, \xi) \sim (gr, (\chi \otimes \tau)(r) \cdot \xi), \quad g \in G, r \in P, \xi \in \Xi.$$

Мы получаем естественное отображение $G \times_P \Xi \rightarrow G/P$, определенное формулой $(g, \xi) \mapsto gP$; его слой в любой точке изоморфен пространству Ξ неканоническим образом. Итак, мы получаем расслоение над G/P со слоем Ξ . Группа G действует на тотальном пространстве этого расслоения преобразованиями $h: (g, \xi) \mapsto (hg, \xi)$.

В частности, группа G действует на пространстве его гладких сечений.

Это действие и есть представление $\mathrm{Ind}_P^G(\chi \otimes \tau)$.

1.4. Пример: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Дадим альтернативное описание представлений $\mathrm{Ind}_P^G(\chi \otimes 1)$, где 1 обозначает тривиальное одномерное представление группы M .

Рассмотрим пространство флагов G/P и соответствующие грассманианы $\mathrm{Gr}_\alpha = G/Q_\alpha$. Снабдим каждое пространство G/Q_α формой объема¹⁾ Ω_α , инвариантной относительно K .

Через V_α обозначим образ флага $\mathcal{V} \in G/P$ при отображении $G/P \rightarrow G/Q_\alpha$ (т.е. мы забываем все подпространства флага (1), кроме V_α).

¹⁾Или плотностью, если G/Q_α не ориентируемо.

Для $g \in G$ обозначим через $J_\alpha(g, \mathcal{V})$ якобиан

$$J_\alpha(g, \mathcal{V}) := [\Omega_\alpha(gV_\alpha)/\Omega_\alpha(V_\alpha)]$$

преобразования $g: G/Q_\alpha \rightarrow G/Q_\alpha$ в точке V_α .

Для $t_\alpha \in \mathbb{C}$ определим представление

$$\rho_t(g)f(\mathcal{V}) := f(g\mathcal{V}) \prod_{\alpha} J_\alpha(g, \mathcal{V})^{t_\alpha}$$

группы G в пространстве функций на G/P .

Легко проверить, что это семейство представлений совпадает с семейством $\text{Ind}_P^G(\chi_s \otimes 1)$, где χ_s пробегает $\hat{A}$ (а зависимость $s = s(t)$ является некоторым линейным преобразованием).

На уровне алгебры Ли это представление задано формулой

$$\rho(X)f(\mathcal{V}) = (Xf)(\mathcal{V}) + \sum_{\alpha} t_\alpha [\mathcal{L}_X \Omega_\alpha / \Omega_\alpha] f(\mathcal{V}),$$

где $X \in \mathfrak{g}$, а $\mathcal{L}_X$ — производная Ли (и, в частности, $\mathcal{L}_X \Omega_\alpha / \Omega_\alpha$ — это дивергенция векторного поля).

1.5. Неприводимые представления. Для фиксированного τ представление $\text{Ind}_P^G(\chi_s \otimes \tau)$ является неприводимым для характеров χ_s общего положения. Особое множество значений s содержится в некотором локально конечном семействе комплексных гиперплоскостей.

По теореме о подфакторе¹⁾ любое неприводимое представление группы G эквивалентно подфактору (и даже подпредставлению) в некотором представлении $\text{Ind}_P^G(\chi \otimes \tau)$, см., например, [3], [10].

Напомним смысл слова «эквивалентно» в предыдущем утверждении. Пусть ρ — представление группы G в полном локально выпуклом линейном топологическом пространстве V . Вектор $v \in V$ называется K -конечным, если множество Kv порождает конечномерное подпространство. Пространство всех K -конечных векторов плотно в V . Если ρ неприводимо, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ сохраняет пространство K -конечных векторов. Естественная эквивалентность неприводимых представлений — это эквивалентность соответствующих $\mathfrak{g}$ -модулей K -конечных векторов²⁾.

Пусть V° — двойственное пространство. Через $\{\cdot, \cdot\}$ обозначим спаривание $V \times V^\circ \rightarrow \mathbb{C}$. Матричный элемент представления ρ — это функция на G вида

$$f(g) = \{\rho(g)h, h^\circ\}, \quad \text{где } h \in V, h^\circ \in V^\circ \text{ фиксированы.}$$

Матричный элемент называется K -конечным, если векторы h, h° являются K -конечными.

1.6. Сферические представления, см. [10], [8]. Напомним, что неприводимое представление ρ группы G в пространстве V называется *сферическим*, если существует K -неподвижный вектор $v \in V$. По теореме Гельфанда этот

¹⁾Хариш-Чандры и Касселмана; есть сильные варианты Желобенко–Наймайка (комплексные группы) и Ленглендса (вещественные группы) с точным указанием подфакторов.

²⁾Неприводимые модули Хариш-Чандры, упоминаемые в названии работы, — это то же самое, что $\mathfrak{g}$ -модули K -конечных векторов в неприводимых представлениях.

вектор единствен, и, следовательно, мы имеем канонический матричный элемент

$$\Psi(g) = \{\rho(g)v, v^\circ\}, \quad \text{где } v \in V, v^\circ \in V^\circ \text{ — сферические векторы, } \{v, v^\circ\} = 1.$$

Он называется *сферической функцией*. По построению функция $\Psi(g)$ биинвариантна относительно K ,

$$\Psi(k_1 g k_2) = \Psi(g), \quad k_1, k_2 \in K.$$

Поэтому сферические функции можно рассматривать как функции на множестве двойных классов смежности $K \backslash G / K$.

В частности, Ψ однозначно определена своими значениями на подгруппе A ; напомним, что $G = KAK$.

С другой стороны, сферические функции можно рассматривать как функции на (симметрическом) пространстве G/K .

Сферические функции являются частным случаем многомерных гипергеометрических функций Хекмана–Опдама, см. [6].

Представление $\text{Ind}_P^G(\chi_s \otimes 1)$ основной серии имеет единственный K -инвариантный вектор¹⁾. Для s общего положения представление $\text{Ind}_P^G(\chi_s \otimes 1)$ неприводимо, и, следовательно, оно само является сферическим представлением. Любое представление $\text{Ind}_P^G(\chi_s \otimes 1)$ содержит единственный сферический подфактор, и любое сферическое представление группы G может быть получено таким образом.

Сферические представления нумеруются орбитами группы Вейля W на $\hat{A} \simeq \mathbb{C}^k$. Для данного $s \in \mathbb{C}^k$ мы обозначим через $\Psi_s(g)$ соответствующую сферическую функцию на G . Это выражение голоморфно по s .

§2. Формулировка утверждения

2.1. Формулировка. Пусть ξ — конечномерное представление группы G . Обозначим через $\mathfrak{M}(\xi)$ пространство конечных линейных комбинаций его матричных элементов ξ .

Пусть V — модуль Хариш-Чандры (см., например, [10]) над G . Обозначим через $\pi(g)$ операторы представления группы G в некотором пополнении модуля V . Пусть σ пробегает множество $\hat{K}$ всех неприводимых представлений группы K . Пусть $V = \bigoplus_\sigma V_\sigma$ — разложение модуля V в прямую сумму K -изотипических компонент (см. [9]).

Предложение. (а) Пусть представление $(\pi, V) = \text{Ind}_P^G(\chi \otimes \tau)$ неприводимо. Пусть V° — двойственное представление. Пусть $v \in V_\sigma$, $w \in V_\theta^\circ$. Существует конечномерное представление ξ группы G и $s \in \mathbb{C}^k$, такие, что матричный элемент $\{\pi(g)v, w\}$ представим в виде конечной суммы вида

$$\{\pi(g)v, w\} = \sum_j h_j(g) \cdot p_j q_j \Psi_s(g),$$

где $h_j \in \mathfrak{M}(\xi)$, $p_j \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $q_j \in \mathfrak{U}_r(\mathfrak{g})$.

¹⁾В модели разд. 1.4 этот вектор является постоянной функцией.

(b) Пусть $(\pi, V) = \text{Ind}_P^G(\chi \otimes \tau)$ приводимо. Тогда каждый K -конечный матричный элемент допускает представление

$$\{\pi(g)v, w\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_j h_j(\varepsilon; g) \cdot p_j(\varepsilon) q_j(\varepsilon) \Psi_{s+\varepsilon t}(g), \quad (2)$$

где s, t — некоторые элементы из $\mathbb{C}^k$, суммирование является конечным, а $h_j(\varepsilon; g) \in \mathfrak{M}(\xi)$, $p_j(\varepsilon) \in \mathfrak{U}_l(\mathfrak{g})$, $q_j(\varepsilon) \in \mathfrak{U}_r(\mathfrak{g})$ зависят рационально от параметра ε .

(c) Для любого K -конечного матричного элемента неприводимого модуля Хариш-Чандры существует представление вида (2).

2.2. Приложение. Области голоморфности матричных элементов.

Пусть $G_{\mathbb{C}}$ — комплексификация группы G . Пусть $K_{\mathbb{C}}, A_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$ — комплексные подгруппы, соответствующие K, A . В частности, $A_{\mathbb{C}}$ является комплексным тором $(\mathbb{C}^*)^k$.

Следствие. Любая область голоморфности $\Omega \subset G_{\mathbb{C}}$ всех сферических функций, содержащая G , является областью голоморфности всех K -конечных матричных элементов неприводимых модулей Хариш-Чандры над G .

Доказательство. Априори сумма в правой части формулы (2) голоморфна при $g \in \Omega$, $0 < |\varepsilon| < \delta$ и может иметь полюс на гиперповерхности $\varepsilon = 0$. В последнем случае функция имеет бесконечный предел во всех точках гиперповерхности $\varepsilon = 0$ за исключением некоторого комплексного многообразия.

С другой стороны, она имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого $g \in G$. Поэтому на самом деле полюса на поверхности $\varepsilon = 0$ нет. $\square$

Обсудим несколько вариантов этого следствия. Напомним, что $A_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{C}^*)^k$. Мы обозначаем элементы этой группы через $a = (a_1, \dots, a_k)$.

1°. Область Ахиезера–Гиндикина. Обозначим через $\mathcal{A} \subset A_{\mathbb{C}}$ подмножество, состоящее из таких a , что $|\arg a_j| < \pi/4$. Область Ахиезера–Гиндикина AG (см. [1], а также [19]) — это $G \cdot \mathcal{A} \cdot K_{\mathbb{C}}$. Так как все сферические функции голоморфны в AG , мы получаем, что все K -конечные матричные элементы тоже голоморфны в AG (это было установлено в [12]).

2°. Феномен Касселмана. Любой K -конечный матричный элемент группы G продолжается до голоморфной многозначной функции на $G_{\mathbb{C}}$, имеющей особенности (ветвления) на некотором фиксированном (негладком) подмногообразии коразмерности 1 в $G_{\mathbb{C}}$.

Рассмотрим сначала случай $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$. Пусть $\mathcal{X}_n$ — пространство комплексных симметрических матриц с определителем 1. Группа $G_{\mathbb{C}} = \text{SL}(n, \mathbb{C})$ действует на $\mathcal{X}_n$ по формуле $g: X \mapsto gXg^t$. Подгруппа $K_{\mathbb{C}} = \text{SO}(n, \mathbb{C})$ является стабилизатором точки $X = E$, и легко видеть, что $\mathcal{X}_n \simeq G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$.

Обозначим через $\mathcal{X}_n^{\circ} \subset \mathcal{X}_n$ множество матриц с различными собственными числами. Любая матрица из $\mathcal{X}_n^{\circ}$ может быть приведена к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования. Согласно [6], сферическая функция продолжается по голоморфности на подмногообразии диагональных матриц из $\mathcal{X}_n$; полученные функции имеют ветвление на множестве матриц с кратными собственными значениями. Далее мы продолжаем эти функции по $K_{\mathbb{C}}$ -инвариантности на $\mathcal{X}_n$, а потом поднимаем с однородного пространства

$G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ на группу $G_{\mathbb{C}}$. Обозначим через $G_{\mathbb{C}}^{\circ}$ прообраз множества $\mathcal{X}_n^{\circ}$ в $G_{\mathbb{C}}$. Более короткое описание множества $G_{\mathbb{C}}^{\circ}$: матрица $g \in G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ содержится в $G_{\mathbb{C}}^{\circ}$, если собственные числа матрицы $g^t g$ попарно различны.

По построению сферические функции группы $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ продолжаются как многозначные голоморфные функции на область $G_{\mathbb{C}}^{\circ} \subset G_{\mathbb{C}}$, а потому на ту же область продолжаются все K -конечные матричные элементы из $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Для произвольной линейной полупростой группы G область $G_{\mathbb{C}}^{\circ}$ строится следующим образом. Рассматривается симметрическое пространство $\mathcal{X} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ и $A_{\mathbb{C}}$ -орбита D начальной точки на нем. Мы выкидываем из D точки, имеющие нетривиальный стабилизатор в группе Вейля, получаем некоторое множество D° . Далее определяем $\mathcal{X}^{\circ}$ как объединение всех $K_{\mathbb{C}}$ -орбит, пересекающихся с D° . Теперь $G_{\mathbb{C}}^{\circ}$ — прообраз множества $\mathcal{X}^{\circ}$ в $G_{\mathbb{C}}$.

Любой K -конечный матричный элемент группы G допускает продолжение до голоморфной многозначной функции на $G_{\mathbb{C}}^{\circ}$.

Этот факт известен, он был обнаружен в знаменитой неопубликованной работе Касселмана; автору эта работа недоступна, см. [3].

3°. Итак, мы получили, что представление ρ группы G может быть продолжено до голоморфной ветвящейся функции, определенной в $G_{\mathbb{C}}^{\circ}$ и принимающей значения в пространстве бесконечных матриц. Произведение двух таких матриц $\rho(g_1) \cdot \rho(g_2)$ обычно расходится, но иногда корректно определено (см. [14], [12]).

Для любых $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $g \in G_{\mathbb{C}}^{\circ}$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \rho(\exp(\varepsilon X)g) = \rho(X)\rho(g).$$

Матрица $\rho(X)$ имеет лишь конечное число ненулевых матричных элементов в каждом столбце и в каждой строке. Поэтому произведение таких матриц корректно определено.

4°. Группы комплексного типа. В случаях групп $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(p, q)$ известны явные выражения для сферических функций [4], [2]; поэтому могут быть написаны и явные выражения для аналитических продолжений.

Пусть, например, $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Тогда $G_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, а сама группа $G \subset G_{\mathbb{C}}$ состоит из элементов вида $(g, \bar{g})$. Сферическая функция на $G_{\mathbb{C}}$ имеет вид¹⁾

$$\Psi_s(g, h) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq n} \{\lambda_j^{s_k/2}\}}{\det_{1 \leq j, k \leq n} \{\lambda_j^k\} \cdot \det_{1 \leq j, k \leq n} \{s_j^k\}}, \quad (3)$$

где λ_j — собственные числа матрицы gh^t . Функция $\Psi(g)$ многозначна, так как степень комплексного числа — многозначная функция. Выражение корректно определено, если все λ_j попарно различны.

Однако в области $\arg \lambda_j < \pi$ степени однозначны, а нули числителя совпадают с нулями знаменателя. Поэтому мы получаем голоморфную функцию на $G_{\mathbb{C}}$, из которой вырезано вещественное подмногообразие

$$\{\arg \lambda_j = \pi \text{ для некоторого } j\}$$

¹⁾Это аналитическое продолжение формулы Вейля для характеров.

коразмерности 1. Но обойдя вокруг далекой особенности и вернувшись на группу G , мы уже получим другую ветвь. Эта ветвь, вообще говоря, будет иметь особенность на группе G , сосредоточенную на множестве матриц с кратными сингулярными числами.

Для всех комплексных полупростых групп сферические функции явно выписываются с помощью формул типа (3), см. [4]. В частности, все их матричные элементы являются элементарными¹⁾ функциями.

Для групп $U(p, q)$ аналог формулы (3) устроен как определитель из одномерных гипергеометрических функций, см. [2]; поэтому все их матричные элементы выражаются через гипергеометрические функции Гаусса (включая производные от гипергеометрических функций по индексам).

5°. *Расширенные группы кос и монодромия.* Обозначим через $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ центр обертывающей алгебры. Фиксируем характер λ алгебры $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Пусть σ, θ — неприводимые представления группы K , действующие в пространствах W_σ, W_θ соответственно. Рассмотрим (ветвящиеся) функции $f: G^\circ \rightarrow \text{Hom}(W_\sigma, W_\theta)$, удовлетворяющие условиям

- $f(k_1 g k_2) = \theta(k_1) f(g) \sigma(k_2^{-1})$, где $g \in G_\mathbb{C}^\circ$, $k_1, k_2 \in K_\mathbb{C}$,
- $p f = \lambda(p) f$ для любого $p \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Группа монодромии этой задачи — так называемая расширенная группа кос, см. [6]. Насколько мне известно, возникающие здесь представления группы монодромии никогда не исследовались.

6°. *Большие области голоморфности.* Есть исключительные случаи, когда унитарное представление допускает голоморфное продолжение во всю комплексную группу или в некоторую подгруппу. По-видимому, такие случаи хорошо поняты.

Для конечномерных полупростых групп (и бесконечномерных представлений) эти случаи исчерпываются представлениями со старшим весом, которые продолжаются на подгруппы Ольшевского, см. [18]. Некоторые другие ситуации обсуждаются в [15], [16], разд. 1.1, 4.4, 5.4, 7.4–7.6, 9.7, [13], [5]. Быть может, существуют другие случаи неожиданно больших (не подгрупповых) областей голоморфности. Насколько мне известно, этот вопрос никогда не рассматривался.

2.3. Нелинейные полупростые группы Ли. Для универсальных накрывающих групп $SU(p, q)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $SO^*(2n)$ наша конструкция выживает, мы лишь должны заменить сферические функции на подходящие гипергеометрические функции Хекмана–Опдама, см. [7], гл. 1.

Автору не известно, можно ли выразить матричные элементы универсальных накрывающих групп $SO(p, q)$ и $SL(n, \mathbb{R})$ через гипергеометрические функции Хекмана–Опдама.

§3. Доказательство предложения

Утверждение сначала доказывается для модулей $\text{Ind}_P^G(\chi_s \otimes 1)$ (это достаточно очевидно). Поэтому оно верно для тензорных произведений таких модулей на конечномерные представления, а последний класс представлений содержит в качестве подфакторов все что угодно.

¹⁾ Но очень сложными

3.1. Доказательство для сферических представлений. Пусть ρ — сферическое представление с параметром s в пространстве V . Пусть $h \in V$ — сферический вектор, и пусть h° — сферический вектор в V° . Так как ρ неприводимо, векторы $v \in V_\sigma$, $w \in V_\theta^\circ$ могут быть представлены в виде $v = p(X) \cdot h$, $w = q(X) \cdot h^\circ$, где $p(X)$, $q(X)$ — некоторые элементы обертывающей алгебры. Обозначим через $q(-X)$ элемент, полученный из $q(X)$ стандартной антиинволюцией алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (она определяется из условия $X \mapsto -X$ для $X \in \mathfrak{g}$). Тогда

$$\begin{aligned} \{\rho(g)v, w\} &= \{\rho(g) \cdot p(X) \cdot h, q(X) \cdot h^\circ\} \\ &= \{q(-X) \cdot \rho(g) \cdot p(X) \cdot h, h^\circ\} = q(-L_X)\Psi_s p(R_X). \end{aligned}$$

3.2. Представления $\text{Ind}_P^G(\chi \otimes 1)$. Стандартная реализация. Рассмотрим флаговое пространство G/P и соответствующие грассманианы, т.е. факторпространства G/Q_α , где $Q_\alpha \supset P$ — максимальные параболические подгруппы в G . Начиная с этого места, мы можем буквально повторить конструкцию разд. 1.4.

Итак, мы получили реализацию семейства представлений $\text{Ind}_P^G(\chi_s \otimes 1)$, такую, что

- 1) действие подгруппы K не зависит от χ_s ;
- 2) операторы представления группы G являются непрерывными функциями от параметра s ; более точно, любой K -конечный матричный элемент является непрерывной функцией от s ;
- 3) операторы представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются линейными выражениями от параметров s .

3.3. Доказательство для представлений $\text{Ind}_P^G(\chi \otimes 1)$. Если $\chi = \chi_s$ находится в общем положении (фактически $s \in \mathbb{C}^k$ лежит в дополнении до некоторого локально конечного семейства комплексных гиперплоскостей), то π — неприводимое сферическое представление. Этот случай был рассмотрен выше в разд. 3.1.

Теперь исследуем случай приводимого π . Непрерывность матричных элементов как функций параметра s следует из разд. 3.2.

Обозначим через V пространство K -конечных функций на флаговом пространстве G/P (см. разд. 1.4, 3.2). Обозначим через $1 \in V$ функцию $f(\cdot) = 1$. Фиксируем $\sigma, \theta \in \hat{K}$. Фиксируем $v \in V_\sigma$, $w \in V_\theta$.

Обозначим через $\mathfrak{U}^N(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ подпространство, состоящее из матричных элементов степени $\leq N$. Пусть N достаточно велико, так что $\mathfrak{U}^N(\mathfrak{g}) \cdot 1$ содержит все подпространство V_σ для характеров χ_s общего положения¹⁾. Рассмотрим набор $r_1, r_2, \dots \in \mathfrak{U}^N$, такой, что для характеров χ_s общего положения

- 1) $r_j \cdot 1$ линейно независимы в $\text{Ind}_P^G(\chi_s \otimes 1)$;
- 2) их линейная оболочка содержит V_σ .

¹⁾Разложим $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus \mathfrak{U}(\mathfrak{g})_\sigma$ в соответствии с присоединенным действием группы K . Пространство $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})_\sigma$ является конечно порожденным модулем над центром $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ обертывающей алгебры. Для достаточно большого N подпространство $\mathfrak{U}^N(\mathfrak{g})$ содержит все образующие модуля $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})_\sigma$.

Пусть Y — элемент алгебры Ли группы K и $p(X) \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Мы имеем $(Yp(X) - p(X)Y) \cdot 1 = Yp(X) \cdot 1$. Поэтому $V_\sigma \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})_\sigma \cdot 1 \subset \mathfrak{U}^N(\mathfrak{g})\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cdot 1 = \mathfrak{U}^N(\mathfrak{g}) \cdot 1$.

Эти свойства остаются верными для всех s вне некоторого алгебраического подмногообразия $\mathcal{M}$ в пространстве параметров. Теперь мы выражаем вектор v как линейную комбинацию $r_j \cdot 1$, $v = \sum c_j(s) r_j \cdot 1$, где c_j являются некоторыми рациональными функциями.

Мы повторяем то же самое для подпространства V_θ° .

Применяя разд. 3.1, мы получаем, что наш матричный элемент имеет вид $\Xi(s) \Psi_s(g)$, где $\Xi(s)$ — элемент алгебры $\mathcal{U}_l \otimes \mathcal{U}_r$, зависящий рационально от s .

Пусть теперь s_0 — особое значение параметра s . Рассмотрим комплексную прямую $\gamma(\varepsilon) = s_0 + \varepsilon t$, не имеющую при малых $|\varepsilon| > 0$ пересечений с $\mathcal{M}$ и с множеством особых значений параметра s . Тогда $\Xi(s_0 + \varepsilon t) \Psi_s(s_0 + \varepsilon t)$ является желаемой аппроксимацией нашего матричного элемента.

3.4. Основной прием. Пусть ξ — неприводимое конечномерное представление группы G в пространстве H . Следуя [11], мы рассмотрим тензорное произведение

$$\pi \otimes \xi = \text{Ind}_P^G(\chi \otimes 1) \otimes \xi = \text{Ind}_P^G(\chi \otimes \xi|_P). \quad (4)$$

Представление $\xi|_P$, вообще говоря, приводимо; оно допускает конечную фильтрацию с неприводимыми подфакторами

$$H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \dots$$

Нильпотентная группа $N \subset P$ действует на подфакторах H_j/H_{j+1} тривиально. Представления подгруппы $MA \subset P$ в H_j/H_{j+1} имеют вид $\mu_j \otimes \tau_j$ для некоторых характеров μ_j группы A и некоторых неприводимых представлений τ_j группы M .

Итак, представление $\pi \otimes \xi$ имеет фильтрацию, подфакторы которой являются представлениями основной серии вида $\text{Ind}_P^G([\chi \cdot \mu_j] \otimes \tau_j)$.

3.5. Фиксируем представление $\hat{\tau}$ группы M и характер $\hat{\chi}$ группы A . Мы хотим реализовать $\text{Ind}_P^G(\hat{\chi} \otimes \hat{\tau})$ как подфактор в подходящем тензорном произведении (4).

Мы можем выбрать представление ξ группы G , такое, что его ограничение на M содержит¹⁾ $\hat{\tau}$. Тогда ограничение представления ξ на $P = MAN$ содержит подфактор вида $\hat{\mu} \otimes \hat{\tau}$ с некоторым характером $\hat{\mu}$.

Далее, выберем характер χ группы A , такой, что $\chi \cdot \hat{\mu} = \hat{\chi}$. Итак, мы получаем, что $\text{Ind}_P^G(\chi \otimes 1) \otimes \xi$ содержит данное представление $\text{Ind}_P^G(\hat{\chi} \otimes \hat{\tau})$ как подфактор.

3.6. Множество K -конечных матричных элементов представления $\text{Ind}_P^G(\hat{\chi} \otimes \hat{\tau})$ содержится в множестве K -конечных матричных элементов множества $\text{Ind}_P^G(\chi \otimes 1) \otimes \xi$. Эти последние матричные элементы являются линейными комбинациями произведений K -конечных матричных элементов представления $\text{Ind}_P^G(\chi \otimes 1)$ и матричных элементов представления ξ . Это завершает доказательство пп. (a) и (b).

3.7. Конец доказательства. Утверждение (c) следует из пп. (a), (b) и теоремы о подфакторе.

¹⁾Доказательство. Обозначим через G_c компактную форму группы G . Рассмотрим индуцированное представление $\text{Ind}_M^{G_c}(\hat{\tau})$. Пусть ξ — его неприводимое подпредставление. Мы можем рассматривать ξ как представление группы G . В силу двойственности Фробениуса (см. [9]) его ограничение на M содержит $\hat{\tau}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. N. Akhiezer, S. G. Gindikin, *On Stein extensions of real symmetric spaces*, Math. Ann., **286**:1–3 (1990), 1–12.
- [2] Ф. А. Березин, Ф. И. Карпелевич, *Зональные сферические функции и операторы Лапласа на некоторых симметрических пространствах*, Докл. АН СССР, **118** (1958), 9–12.
- [3] W. Casselman, Dr. Miličić, *Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations*, Duke Math. J., **49**:4 (1982), 869–930.
- [4] И. М. Гельфанд, М. И. Наймарк, *Унитарные представления комплексных классических групп*, Труды МИАН, **36** (1950).
- [5] R. Goodman, *Holomorphic representations of nilpotent lie groups*, J. Funct. Anal., **31** (1979), 115–137.
- [6] G. I. Heckman, E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions. I*, Compositio Math., **64** (1987), 329–352.
- [7] G. Heckman, H. Schlichtkrull, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces*, Academic Press, San Diego, 1994.
- [8] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ. Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции*, Мир, М., 1987.
- [9] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972.
- [10] A. Knapp, *Representation Theory of Real Semisimple Groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1986.
- [11] B. Kostant, *On the tensor product of a finite and an infinite dimensional representation*, J. Funct. Anal., **20**:4 (1975), 257–285.
- [12] B. Krötz, R. J. Stanton, *Holomorphic extensions of representations. II. Geometry and harmonic analysis*, Geom. Funct. Anal., **15**:1 (2005), 190–245.
- [13] Г. Л. Литвинов, *О вполне приводимых представлениях комплексных и вещественных групп Ли*, Функц. анализ и его прил., **3**:4 (1969), 87–88.
- [14] E. Nelson, *Analytic vectors*, Ann. of Math., **70** (1959), 572–615; имеется перевод: Э. Нельсон, Аналитические векторы, Сб. «Математика», **6**:3 (1962), 89–131.
- [15] Ю. А. Неретин, *Голоморфные продолжения представлений группы диффеоморфизмов окружности*, Матем. сб., **180**:5 (1989), 635–657, 720.
- [16] Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, УРСС, М., 1998.
- [17] Yu. A. Neretin, *Branching Integrals and Casselman Phenomenon*, <http://xxx.arxiv.org/abs/0710.2627>.
- [18] Г. И. Олшанский, *Инвариантные конусы в алгебрах Ли, полугруппы Ли и голоморфные дискретные серии*, Функц. анализ и его прил., **15** (1982), 275–285.
- [19] R. O. Wells, Jr., J. A. Wolf, *Poincare series and automorphic cohomology on flag domains*, Ann. of Math. (2), **105**:3 (1977), 397–448.