Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Проблема Рохлина о кратном перемешивании в классе действий положительного локального ранга, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 1, 90–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:05:52

— унитарный оператор; поэтому $\int (d\mu_b(\tilde{\Phi}^t(x))/d\mu_b(x)) d\mu_b(x) = \|V(t)\mathbf{1}\|^2 = \|\mathbf{1}\|^2 = 1$. Следовательно (см. теорему 4 §15 и замечание к теореме 1 §16 из [9]), $\mu_b^{\tilde{\Phi}^t} \sim \mu_b$ и $\mu_b^{\tilde{\Phi}} \sim \mu_b$.

Автор выражает благодарность Ю. М. Березанскому за большое внимание к работе и рецензенту за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dixmier J. Les C^* -algebras et leur representations, Gautiers-Villars, Paris, 1969.
2. Исмаилов Р. С. Функци. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 73–74 (1981).
3. Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Testard D. J. Funct. Anal., **41**, 378–396 (1981).
4. Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Testard D., Vershik A. J. Funct. Anal., **51**, 115–131 (1983).
5. Kosyak A. V. Selecta. Math. Soviet., **11**, 241–291 (1992).
6. Kosyak A. V. J. Funct. Anal., **125**, 493–547 (1994).
7. Косьяк А. В. Функци. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 82–83 (1990).
8. Го Х.-С. Гауссовы меры в банаховых пространствах. Мир, М., 1976.
9. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1975.

Институт математики
Академии наук Украины

Поступило в редакцию
21 января 1998 г.

УДК 517.9

Проблема Рохлина о кратном перемешивании в классе действий положительного локального ранга*

© 2000. В. В. Рыжиков

1. В. А. Рохлин [1] ввел в рассмотрение свойство кратного перемешивания и поставил вопрос, влечет ли за собой свойство перемешивания кратности 1 свойства перемешивания кратности $k > 1$. Напомним, что автоморфизм T пространства Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mu(X) = 1$, обладает свойством *перемешивания кратности k* , если для любых множеств $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ при $|z_p - z_q| \rightarrow \infty$, $0 \leq p < q \leq k$,

$$\mu(T^{z_0}A_0 \cap T^{z_1}A_1 \cap \dots \cap T^{z_k}A_k) \longrightarrow \mu(A_0)\mu(A_1) \dots \mu(A_k).$$

Говорят, что автоморфизм T обладает *локальным рангом $\beta > 0$* , если для некоторой последовательности $U_j = \bigsqcup_{k \in Q_j} T^z B_j$ башен Рохлина–Халмоша, где $Q_j = \{0, 1, \dots, h_j\}$, выполнены следующие условия: $\mu(U_j) \rightarrow \beta$ и для каждого $A \in \mathcal{B}$ пересечение $U_j \cap A$ асимптотически близко к объединению некоторого набора этажей в башне. Это означает, что $\mu((U_j \cap A) \Delta \bigsqcup_{z \in S_j} T^z B_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности множеств $S_j \subset \{0, 1, \dots, h(j) - 1\}$ (зависящих от A). Для $\mathbb{Z}^n$ -действий и $\mathbb{R}^n$ -действий (поток) определение аналогично, причем конфигурации Q_j имеют вид

$$Q_j = \{0, 1, \dots, h_1(j)\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, h_n(j)\}, \quad h_m(j) \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty, 1 \leq m \leq n.$$

*Работа поддержана грантами РФФИ 96-01-00713 и INTAS 00418i96.

В определении локального ранга потока $\{T_r\}$, $r \in \mathbb{R}^n$, соответствующие башни имеют вид $U_j = \bigsqcup_{z \in Q_j} T_{t_j z} B_j$, где $t_j \in \mathbb{R}$, причем $t_j h_m(j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$ и $t_j \rightarrow 0$ для всех m , $1 \leq m \leq n$.

О системах локального положительного ранга см. обзор [3]. Свойство перемешивания кратности 2 для перемешивающих автоморфизмов ранга 1 установил С. Каликов. Его результат стимулировал разнообразные обобщения (см. [3, 5, 7]). Недавно обнаружилась связь проблемы Рохлина с открытыми вопросами спектральной теории. Например, если существует перемешивающий автоморфизм T положительного локального ранга, не обладающий свойством кратного перемешивания, то он имеет фактор с конечнократным абсолютно непрерывным спектром (это вытекает из результатов [4, 6]). Вопрос о реализации такого спектра — давняя задача теории динамических систем (см. обзор [2]). Теперь сформулируем результаты заметки.

ТЕОРЕМА 1. *Перемешивающий поток $\{T_r\}$, $r \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, при $\beta(\{T_r\}) > 0$ обладает свойством перемешивания всех кратностей.*

ТЕОРЕМА 2. *Перемешивающее действие $\{T_z\}$ группы $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 1$, при $\beta(\{T_z\}) > 1/2^n$ обладает свойством перемешивания всех кратностей.*

2. Дадим набросок доказательства теоремы 1. Ограничимся случаем, когда устанавливается свойство перемешивания кратности 2. Достаточно установить, что $\lambda = \mu \otimes \mu \otimes \mu$ — единственная мера на $X \times X \times X$, удовлетворяющая условиям

$$\forall r \in \mathbb{R}^n \quad \lambda = (T_r \times T_r \times T_r)\lambda, \quad (1)$$

$$\int_{X \times X \times X} f \otimes g \otimes h \, d\lambda = \int f \, d\mu \int g \, d\mu \int h \, d\mu, \quad (2)$$

если одна из функций f, g, h является константой.

Пусть мера λ удовлетворяет условиям (1), (2). Определим оператор $J: L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu \otimes \mu)$ равенством

$$\int_{X \times X} \chi_{C_1} \otimes \chi_{C_2} J \chi_B \, d\mu \otimes \mu = \lambda(C_1 \times C_2 \times B).$$

Для достаточно большого N рассмотрим следующую меру η на $X_{(1)} \times X_{(2)} \times \dots \times X_{(N+2)}$:

$$\begin{aligned} & \eta(C_1 \times C_2 \times B_1 \times \dots \times B_N) \\ &= \int_{X \times X} \chi_{C_1 \times C_2} (I \otimes T_\varepsilon) J \chi_{B_1} \dots (I \otimes T_{k\varepsilon}) J \chi_{B_k} \dots (I \otimes T_{N\varepsilon}) J \chi_{B_N} \, d\mu \otimes \mu. \end{aligned}$$

Если $\lambda \neq \mu \otimes \mu \otimes \mu$, то, как известно, $J^* J \neq \Theta$ (Θ — оператор ортопроекции на пространство констант). Следовательно, полагая $J_k = (I \otimes T_{k\varepsilon}) J$, для достаточно малого $\varepsilon \neq 0$ получаем $J_h^* J_k \neq \Theta$ при $h \neq k$. Оператору $J_h^* J_k$ отвечает мера ρ на $X \times X$: $\rho(A \times B) = \langle J_h^* J_k \chi_A | \chi_B \rangle$.

Для любого $\delta > 0$ при подходящем выборе N, h, k можно обеспечить свойство $\limsup_{j \rightarrow \infty} \rho(U_j \times U_j) = c > \beta^2 - \delta$. Тогда, рассуждая, как в доказательстве леммы 8 из [7], получим разложение

$$\rho = c \left(a \int_{\mathbb{R}^n} (\text{Id} \times T_v) \Delta d\sigma(v) + (1-a) \mu \otimes \mu \right) + (1-c) \rho',$$

где Δ — диагональная мера на $X \times X$, а σ — некоторая нормированная мера на $\mathbb{R}^n$. Случай $a = 0$ приводит к $\rho = (1 - \delta)\mu \otimes \mu + \dots$, что при $\delta \rightarrow 0$ влечет за собой равенства $J^*J = \Theta$, $\lambda = \mu \otimes \mu \otimes \mu$. Случай $a > 0$ означает, что проекция эргодической компоненты меры η на $X_h \times X_k$ является сдвигом диагональной меры $(I \times T_v)\Delta$, $v \in \mathbb{R}^n$. Последнее приводит к равенству $(T_{h\varepsilon} \otimes I \otimes I)\lambda = (T_{k\varepsilon} \otimes I \otimes T_v)\lambda$ (здесь мы используем метод доказательства теоремы 1 из [4]). Следовательно, при $v \neq 0$ получим

$$\lambda = (T_{(h-k)\varepsilon} \otimes I \otimes T_v)\lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} (T_{(h-k)p\varepsilon} \otimes I \otimes T_{pv})\lambda = (\Theta \otimes I \otimes \Theta)\lambda = \mu \otimes \mu \otimes \mu$$

(здесь мы пользуемся тем, что $T_u \rightarrow \Theta$ при $u \rightarrow \infty$, так как поток перемешивает).

При $v = 0$ результат не меняется: равенство $\lambda = (\Theta \otimes I \otimes I)\lambda$ влечет за собой $\lambda = \mu \otimes \mu \otimes \mu$. Итак, $\mu \otimes \mu \otimes \mu$ — единственная мера, удовлетворяющая (1), (2), а следовательно, поток обладает свойством перемешивания кратности 2. $\square$

3. Чтобы доказать теорему 2, достаточно установить D-свойство рассматриваемых $\mathbb{Z}^n$ -действий, так как это свойство обеспечивает свойство кратного перемешивания (модификация рассуждений из [7]). Мы говорим, что действие $\{T_z\}$ положительного локального ранга с аппроксимирующей последовательностью (Q_j, ξ_j, U_j) , где $\xi_j \rightarrow \varepsilon$ и $\mu(U_j) \rightarrow \beta > 0$, обладает D-свойством, если найдется другая аппроксимирующая последовательность $(\tilde{Q}_j, \tilde{\xi}_j, V_j)$ и последовательность $\{v(j)\}$, $v(j) \in \mathbb{Z}^n$, такие, что выполнены следующие условия:

- (i) $V_j = \bigsqcup_{z \in \tilde{Q}_j} T_z \tilde{B}_j$, $\tilde{Q}_j \subset Q_j$;
- (ii) $V_j \subset U_j$, $T_{v(j)}V_j \subset U_j$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(V_j | U_j) > 0$;
- (iii) $\forall z \in \tilde{Q}_j \exists u \in Q_j T_{v(j)}T_z \tilde{B}_j \subset T_u B_j$;
- (iv) $\max_{z \in \tilde{Q}_j, u \in Q_j} \{\mu(T_{2v(j)}T_z \tilde{B}_j | T_u B_j)\} \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 3. Если $\mathbb{Z}^n$ -действие $\{T_z\}$ обладает свойством перемешивания и $\beta\{T_z\} > 1/2^n$, то это действие обладает D-свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\tilde{Q}_j, \tilde{\xi}_j, U_j)$ — последовательность башен, которая фигурирует в определении $\beta(\{T_z\})$. На каждом шаге с номером j рассмотрим 2^n множеств вида $T_{(w_1, w_1, \dots, w_n)}U_j$, где $w_k \in \{0, h_k(j)\}$. Так как $\beta(\{T_z\}) > 1/2^n$, то при достаточно больших j для различных $(w_1, \dots, w_n)$ и $(w'_1, \dots, w'_n)$ (которые зависят от j) имеем

$$\mu(T_{(w_1, w_1, \dots, w_n)}U_j \cap T_{(w'_1, w'_2, \dots, w'_n)}U_j) = \mu(U_j \cap T_{(w'_1 - w_1, \dots, w'_n - w_n)}U_j) > c \quad (3)$$

для некоторой константы $c > 0$. Не ограничивая общности, предположим, что все величины $w'_k - w_k$ неотрицательны. Общий случай сводится к этому при подходящей замене времени в рассматриваемом действии $\mathbb{Z}^n$. При этом роль B_j (основания башни) будет играть один из «угловых» этажей башни. Фиксируем маленькое число $\delta > 0$ и рассмотрим немного уменьшенную по сравнению с U_j башню

$$\bar{U}_j = \bigsqcup_{z \in \bar{Q}_j} T_z B_j, \quad \bar{Q}_j = \{0, 1, \dots, [(1 - \delta)h_1(j)]\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, [(1 - \delta)h_n(j)]\}$$

и маленькую башню

$$\bar{V}_j = \bigsqcup_{z \in \delta Q_j} T_z B_j, \quad \delta Q_j = \{0, 1, \dots, [\delta h_1(j)]\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, [\delta h_n(j)]\}$$

($[\delta h]$ обозначает целую часть числа δh). Из (3) вытекает, что $\mu(\bar{U}_j \cap T_{2v(j)} \bar{V}_j) > a > 0$ для некоторой последовательности $\{v(j)\}$, удовлетворяющей условиям $v(j) \in Q_j$, $2v(j) \notin Q_j$. Отсюда мы получим, что $\mu(U_j | T_{2v(j)} B_j) > a$; следовательно, положив $\tilde{B}_j = T_{-2v(j)} U_j \cap B_j$, мы определим башню $V_j = \bigsqcup_{z \in \tilde{Q}_j} T_z \tilde{B}_j$. Условия (i), (ii), (iii) выполнены по построению. Условие (iv) вытекает из свойства перемешивания (см. доказательство утверждения 7 из [7]). $\square$

Автор обязан Б. М. Гуревичу, В. И. Оселедцу, А. М. Степину и Ж.-П. Тувено за интерес к результатам и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розлин В. А.* Известия АН СССР, сер. матем., **13**, 329–340 (1949).
2. *Вершик А. М., Корнфельд И. П., Синай Я. Г.* В кн.: Динамические системы-2. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, Т. 2, ВИНТИ, М., 1985, с. 5–111.
3. *Ferenczi S.* Colloq. Math., **73**, No. 1, 35–65 (1997).
4. *Glasner E., Host B., Rudolph D.* Israel J. Math., **78**, 131–142 (1992).
5. *del Junco A., Yassawi R.* Multiple mixing and rank one group actions (to appear in Canad. J. Math.).
6. *King J., Thouvenot J.-P.* J. Anal. Math., **56**, 211–230, (1991).
7. *Рыжиков В. В.* Функт. анализ и его прил., **27**, No. 2, 63–78 (1993).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
18 февраля 1998 г.

УДК 517.986

Вещественные факторы типа III_0

© 2000. Ш. М. УСМАНОВ

Вещественной W^* -алгеброй называется вещественная $*$ -алгебра R ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H , содержащая единицу, замкнутая в слабой операторной топологии и такая, что $R \cap iR = \{0\}$. В работе получено дискретное разложение σ -конечных вещественных факторов типа III_0 (ср. [1]).

1. Предварительные сведения. Пусть R — вещественная W^* -алгебра. Напомним, что обертывающая W^* -алгебра $\mathcal{U}(R)$ для R (т.е. наименьшая W^* -алгебра, содержащая R) имеет вид $\mathcal{U}(R) = R + iR$ и R определяет на $\mathcal{U}(R)$ некоторый $*$ -антиавтоморфизм α_R периода 2: $\alpha_R(x + iy) = x^* + iy^*$, где $x, y \in R$. Соответственно и R определяется при помощи α_R : $R = \{x \in \mathcal{U}(R) : \alpha_R(x) = x^*\}$. Вещественные W^* -алгебры R и Q , порождающие одну и ту же W^* -алгебру $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}(Q) = \mathcal{U}(R) = \mathcal{U}$, $*$ -изоморфны тогда и только тогда, когда α_R и α_Q на $\mathcal{U}$ сопряжены, т.е. существует $*$ -автоморфизм $\theta \in \text{Aut } \mathcal{U}$, такой, что $\alpha_R = \theta \cdot \alpha_Q \cdot \theta^{-1}$ (см. [2, 3]). Пусть R и Q являются $*$ -изоморфными и, следовательно, $M = \mathcal{U}(R)$ и $N = \mathcal{U}(Q)$ комплексно $*$ -изоморфны и антиавтоморфизмы α_R и α_Q сопряжены с помощью этого изоморфизма; тогда будем говорить, что пары (M, α_R) и (N, α_Q) сопряжены. Вещественная $*$ -алгебра R называется вещественным фактором, если ее центр тривиален, $Z(R) = \{\mathbb{C}1\}$ (и тогда $\mathcal{U}(R)$ — комплексный фактор); R имеет тип I_{fin} (I_{∞} , II_1 , II_{∞} , III_{λ} ,