Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. А. Аюпов, К. К. Кудайбергенов, Дифференцирования некоммутативных алгебр Аренса, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 4, 70–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2880>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:44:50

Дифференцирования некоммутативных алгебр Аренса*

© 2007. Ш. А. Аюпов, К. К. Кудайбергенов

1. Введение. Описание дифференцирований и автоморфизмов различных алгебр является одной из важных задач в теорий операторных алгебр.

Дифференцирования C^* -алгебр и алгебр фон Неймана детально изучены в монографии Сакаи [1]. Всестороннее рассмотрение этих проблем в общих банаховых алгебрах дано в [2], где детально изучены условия, гарантирующие автоматическую непрерывность дифференцирований на различных банаховых алгебрах.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра. Линейный оператор $d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *дифференцированием*, если $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ при всех $x, y \in \mathcal{A}$. Каждый элемент $a \in \mathcal{A}$ определяет дифференцирование $d_a: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ по правилу $d_a(x) = ax - xa$, $x \in \mathcal{A}$. Дифференцирования вида d_a называются *внутренними*.

Следующие результаты являются наиболее известными (см. [1]):

- а) всякое дифференцирование на коммутативной C^* -алгебре $\mathcal{A}$ тождественно равно нулю;
- б) всякое дифференцирование на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ ограничено (т.е. непрерывно по норме);
- с) любое дифференцирование на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ является внутренним.

В работе [3] была сформулирована проблема о возможности распространения этих результатов на случай алгебры $L(M)$ всех измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M . Если $M = L^\infty(0, 1)$ — алгебра всех комплексных ограниченных измеримых функций на $(0, 1)$, то $L(M)$ изоморфна $L^0(0, 1)$ — алгебре всех комплексных измеримых функций на $(0, 1)$. Результат работы [4] (см. также [5]) показывает, что алгебра $L^0(0, 1)$ допускает нетривиальные (а следовательно, разрывные в топологии сходимости по мере) дифференцирования.

Таким образом, утверждения типа а)–с) для алгебры $L(M)$, вообще говоря, неверны. Имеется ряд других важных классов алгебр неограниченных операторов, имеющих приложения как в функциональном анализе, так и математической физике.

Эти алгебры, как правило, снабжаются соответствующими топологиями, и потому естественно возникает вопрос о получении аналогичных результатов для дифференцирований на таких алгебрах. Интересным примером упомянутых алгебр являются так называемые алгебры Аренса, которые впервые были введены в работе [6] для коммутативного случая, а затем обобщены в работе [7] на некоммутативный случай.

*Эта работа частично поддержана грантом Фонда поддержки фундаментальных исследований АН РУз №40-06.

Настоящая работа посвящена изучению дифференцирований на некоммутативных алгебрах Аренса. Доказано, что всякое дифференцирование на алгебре Аренса, ассоциированной с алгеброй фон Неймана с точным нормальным конечным следом, является внутренним.

2. Основные результаты. Пусть M — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ , а $L(M)$ — алгебра измеримых операторов, присоединенных к M . Для $p \geq 1$ положим $L^p(M, \tau) = \{x \in L(M) : \tau(|x|^p) < \infty\}$. Известно, что $L^p(M, \tau)$ — банахово пространство относительно нормы

$$\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{1/p}, \quad x \in L^p(M, \tau).$$

Рассмотрим множество

$$L^\omega(M, \tau) = \bigcap_{p \geq 1} L^p(M, \tau).$$

В работе [8] показано, что $L^\omega(M, \tau)$ является локально выпуклой полной метризуемой $*$ -алгеброй относительно топологии t , порожденной системой норм $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Алгебра $L^\omega(M, \tau)$ называется (некоммутативной) *алгеброй Аренса*.

Ключевую роль при доказательстве основного результата работы играет следующая

Лемма. Пусть $L^\omega(M, \tau)$ — алгебра Аренса, причем τ — конечный след. Тогда всякое дифференцирование $d: M \rightarrow L^\omega(M, \tau)$ является пространственным, т. е.

$$d(x) = ax - xa, \quad x \in M,$$

для некоторого $a \in L^\omega(M, \tau)$.

Схема доказательства. Поскольку $L^p(M, \tau)$ ($p \geq 1$) является M -бимодулем, то в силу теоремы Рингроуза (см. [9, теорема 2], а также [2, с. 638]) дифференцирование $d: M \rightarrow L^p(M, \tau)$ является непрерывным при всех $p \geq 1$. Поскольку $L^\omega(M, \tau)$ — счетно-нормированное пространство с семейством норм $\|\cdot\|_n$, ($n \in \mathbb{N}$), то оператор $d: M \rightarrow L^\omega(M, \tau)$ непрерывен.

Через U обозначим группу унитарных элементов из M . Для $u \in U$ положим

$$T_u(x) = uxu^* + d(u)u^*, \quad x \in L^\omega(M, \tau).$$

Если $u, v \in U$, то нетрудно проверить, что $T_u \circ T_v = T_{uv}$, причем T_u — аффинный гомеоморфизм пространства $L^\omega(M, \tau)$.

Так как оператор d непрерывен, то множество $K_d = \{T_v(0) : v \in U\}$ ограничено. Более того, множество $K = \text{cl}(\text{co}(K_d))$ — замыкание выпуклой оболочки множества K_d — является замкнутым выпуклым ограниченным подмножеством в $L^\omega(M, \tau)$. В силу [8, теорема 2] K является непустым выпуклым слабо компактным множеством. Ясно, что $T_u(K) \subset K$ при всех $u \in U$. По лемме Цорна существует такое минимальное (по включению) выпуклое слабо компактное подмножество K_0 в $L^\omega(M, \tau)$, что $T_u(K_0) \subset K_0$ при всех $u \in U$. При этом множество K_0 состоит из единственной точки a . Тогда $uau^* + d(u)u^* = a$, т. е. $d(u) = au - ua$ для любого $u \in U$. Поскольку всякий элемент алгебры M можно представить как линейную комбинацию ее унитарных элементов, то $d(x) = ax - xa$ при всех $x \in M$. Лемма доказана.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 1. Пусть $L^\omega(M, \tau)$ — алгебра Аренса, где M — алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ . Тогда всякое дифференцирование d на алгебре $L^\omega(M, \tau)$ является внутренним.

Доказательство. В силу леммы сужение дифференцирования d на M является пространственным, т.е.

$$d(x) = ax - xa, \quad x \in M,$$

для некоторого $a \in L^\omega(M, \tau)$.

Покажем, что $d(x) = ax - xa$ для всех $x \in L^\omega(M, \tau)$.

Пусть сначала $x \in L^\omega(M, \tau)$, $x \geq 0$. Тогда элемент $\mathbf{1} + x$ обратим и $(\mathbf{1} + x)^{-1} \in M$. Более того,

$$d(x) = d(\mathbf{1} + x) = -(\mathbf{1} + x)d((\mathbf{1} + x)^{-1})(\mathbf{1} + x).$$

С другой стороны, так как $(\mathbf{1} + x)^{-1} \in M$, то, как отмечено выше,

$$d((\mathbf{1} + x)^{-1}) = a(\mathbf{1} + x)^{-1} - (\mathbf{1} + x)^{-1}a.$$

Следовательно, $d(x) = -(\mathbf{1} + x)d((\mathbf{1} + x)^{-1})(\mathbf{1} + x) = ax - xa$. Поскольку всякий элемент из $L^\omega(M, \tau)$ можно представить как линейную комбинацию положительных элементов из $L^\omega(M, \tau)$, то $d(x) = ax - xa$ для любых $x \in L^\omega(M, \tau)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $L^\omega(M, \tau)$ — алгебра Аренса, где τ — конечный след. Тогда

- 1) всякое дифференцирование на $L^\omega(M, \tau)$ автоматически t -непрерывно;
- 2) если M — коммутативная алгебра фон Неймана, то алгебра $L^\omega(M, \tau)$ допускает только нулевое дифференцирование.

Можно показать, что утверждения следствия остаются верными и для общего случая полуконечных следов. Однако теорема 1 в общем случае неверна. Более того, имеет место следующий результат.

Теорема 2. Пусть M — фактор с точным нормальным полуконечным следом τ . Для того чтобы любое дифференцирование на алгебре Аренса $L^\omega(M, \tau)$ было внутренним, необходимо и достаточно, чтобы след τ был конечным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Sakai, *Operator Algebras in Dynamical Systems*, Encycl. Math., vol. 41, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. [2] H. G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, London Math. Sci. Monographs, vol. 24, Clarendon Press, Oxford, 2000. [3] Sh. A. Ayupov, in: Abstracts of the International Conference “Operators Algebras and Quantum Probability”, Tashkent, 2005, 38–42. [4] А. Ф. Бер, Ф. А. Сукочев, В. И. Чилин, Матем. заметки, **75**:3 (2004), 453–457. [5] А. Г. Кусраев, Сиб. матем. ж., **47**:1 (2006), 97–107. [6] R. Arens, Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 931–935. [7] A. Inoue, Pacific J. Math., **66**:2 (1976), 411–431. [8] Р. З. Абдуллаев, Узбек. матем. ж., **2** (1997), 3–7. [9] J. R. Ringrose, J. London Math. Soc., **5** (1972), 432–438.

Институт математики АН Республики Узбекистан
e-mail: e_ayupov@hotmail.com

Институт математики АН Республики Узбекистан
e-mail: karim2006@mail.ru

Поступило в редакцию
21 февраля 2006 г.