Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, О строгом слабом перемешивании C^* -динамических систем, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 4, 79–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:00:48

УДК 517.98

О строгом слабом перемешивании C^* -динамических систем*

© 2007. Ф. МУХАМЕДОВ

В эргодической теории известно (см. [8]) несколько вариантов свойства перемешивания (слабое перемешивание, перемешивание, вполне перемешивание и т.д.) для сохраняющего меру преобразования пространства с мерой. Важно знать, как эти свойства связаны между собой. Этой тематике посвящен ряд статей (см. [4], [6], [8]). Известный классический результат эргодической теории утверждает, что сохраняющее меру преобразование является слабо перемешивающим в том и только том случае, когда его декартов квадрат является эргодическим. В [1], [6] этот результат распространен на марковские операторы, действующие в $L^\infty(X)$. С другой стороны, совсем недавно [10] были исследованы некоторые взаимосвязи между эргодичностью, слабым перемешиванием и равномерно слабым перемешиванием для C^* -динамических систем. Известно [9], что строгая эргодичность (или равномерная эргодичность) динамической системы является более сильным свойством, чем эргодичность. Поэтому естественно поставить вопрос о связи строгой эргодичности с условиями перемешивания. Цель этой заметки — исследовать этот вопрос в некоммутативной постановке.

Пусть $\mathfrak{A}$ является C^* -алгеброй с единицей $\mathbb{I}$. Через $S_{\mathfrak{A}}$ мы обозначаем множество всех состояний на $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — другая C^* -алгебра с единицей. Через $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$ обозначается алгебраическое тензорное произведение этих алгебр. Пополнение произведения $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$ относительно минимальной C^* -тензорной нормы на $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$ обозначается через $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Линейный оператор $T: \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}$ называется *положительным*, если $Tx \geq 0$ для всех $x \geq 0$. Положительный линейный оператор T называется *марковским*, если $T\mathbb{I} = \mathbb{I}$. Пара $(\mathfrak{A}, T)$, состоящая из C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ и марковского оператора $T: \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}$, называется *C^* -динамической системой*. В дальнейшем мы называем тройку $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$, состоящую из C^* -алгебры $\mathfrak{A}$, состояния $\varphi \in S_{\mathfrak{A}}$ и марковского оператора $T: \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}$, такого, что $\varphi \circ T = \varphi$, т.е. динамическую систему с инвариантным состоянием, *сохраняющей состояние C^* -динамической системой*. Мы говорим, что сохраняющая состояние C^* -динамическая система $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ является *слабо перемешивающей* (соответственно *строго слабо перемешивающей*) относительно φ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(yT^k(x)) - \varphi(y)\varphi(x)| = 0 \quad \text{для всех } x, y \in \mathfrak{A}, \quad (1)$$

(соответственно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(T^k(x)) - \varphi(x)| = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{A}, \psi \in S_{\mathfrak{A}}.) \quad (2)$$

*Работа выполнена при частичной поддержке FCT, грант SFRH/BPD/17419/2004.

Ясно, что строго слабое перемешивание влечет за собой слабое перемешивание. Однако обратное, вообще говоря, неверно.

Сохраняющая состояние C^* -динамическая система $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ называется *строго эргодической* относительно φ , если φ — единственное состояние, инвариантное относительно T .

Для заданной C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ через $M_n(\mathfrak{A})$ будем обозначать множество всех $n \times n$ -матриц $a = (a_{ij})$ с элементами a_{ij} из $\mathfrak{A}$. Напомним, что линейное отображение $T: \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}$ называется *n -положительным*, если линейный оператор $T_n: M_n(\mathfrak{A}) \mapsto M_n(\mathfrak{A})$, заданный соотношением $T_n(a_{ij}) = (T(a_{ij}))$, положителен. Если T является n -положительным для всех n , то отображение T называется *вполне положительным*. Мы говорим, что сохраняющая состояние C^* -динамическая система $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ *вполне положительна*, если вполне положительным будет T . Известно [11], что для вполне положительных отображений T и H алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно линейный оператор $T \otimes H: \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, заданный равенством $(T \otimes H)(x \otimes y) = Tx \otimes Hy$, также будет вполне положительным.

Используя метод [9], можно доказать, что сохраняющая состояние C^* -динамическая система $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ является строго эргодической тогда и только тогда, когда для всех $x \in \mathfrak{A}$ выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) = \varphi(x) \mathbb{I},$$

где сходимость рассматривается относительно нормы на $\mathfrak{A}$.

Отсюда мы непосредственно получаем, что строгое слабое перемешивание очевидным образом влечет за собой строгую эргодичность. Ниже будет показано, что аналогичное утверждение для слабого перемешивания неверно.

Теорема 1. Пусть $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$, $(\mathfrak{B}, \varphi_1, H)$ — две вполне положительные сохраняющие состояние C^* -динамические системы. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ и $(\mathfrak{B}, \varphi_1, H)$ являются строго слабо перемешивающими;
- (ii) сохраняющая состояние C^* -динамическая система $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \varphi \otimes \varphi_1, T \otimes H)$ является строго слабо перемешивающей.

Аналогичный результат для марковских операторов, действующих на коммутативных алгебрах фон Неймана, был доказан в [1], [6]. Для слабо перемешивающих динамических систем теорема такого типа была доказана в [12].

Из теоремы 1 можно получить такое

Следствие 2. Пусть $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ — вполне положительная сохраняющая состояние C^* -динамическая система. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ является строго слабо перемешивающей;
- (ii) сохраняющая состояние C^* -динамическая система $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}, \varphi \otimes \varphi, T \otimes T)$ является строго слабо перемешивающей;
- (iii) сохраняющая состояние C^* -динамическая система $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}, \varphi \otimes \varphi, T \otimes T)$ строго эргодична;

(iv) для любых $x \in \mathfrak{A}$ и $\psi \in \mathfrak{A}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(T^k(x)) - \psi(\Pi)\varphi(x)| = 0. \quad (3)$$

Идея доказательства теоремы 1 позволяет адаптировать результаты работы [1] для строго слабо перемешивающих динамических систем. А именно верна следующая

Теорема 3. Пусть $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ — вполне положительная сохраняющая состояние C^* -динамическая система. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ строго слабо перемешивающая;
- (ii) если $(\mathfrak{B}, \varphi_1, H)$ — строго эргодическая вполне положительная сохраняющая состояние C^* -динамическая система, то сохраняющая состояние C^* -динамическая система $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \varphi \otimes \varphi_1, T \otimes H)$ строго эргодична.

Замечание. В теореме 3 условие строго слабого перемешивания является существенным. Рассмотрим в связи с этим следующий пример. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, а λ — мера Лебега на S^1 , причем $\lambda(S^1) = 1$. Фиксируем элемент $a = \exp(2\pi i\alpha)$, где $\alpha \in [0, 1)$ — иррациональное число. Определим преобразование $\tau: S^1 \mapsto S^1$ формулой $\tau(z) = az$. Мера индуцирует положительный линейный функционал $\varphi_\lambda(f) = \int_{S^1} f(z) d\lambda(z)$, такой, что $\varphi_\lambda(\Pi) = 1$. Рассмотрим C^* -алгебру $\mathfrak{A} = C(S^1)$, где $C(S^1)$ — пространство всех непрерывных функций на S^1 . Преобразование τ индуцирует положительный линейный оператор $T_\tau: C(S^1) \mapsto C(S^1)$, определенный равенством $(T_\tau(f))(z) = f(\tau(z))$ для всех $f \in C(S^1)$. Очевидно, что $(C(S^1), \varphi_\lambda, T_\tau)$ является сохраняющей состояние C^* -динамической системой. Поскольку α иррационально, из теоремы 2 гл. 3 книги [9] вытекает строгая эргодичность рассматриваемой динамической системы. Однако она не является строго слабо перемешивающей (и даже слабо перемешивающей [9]). Этот пример показывает, что слабое перемешивание не влечет за собой строгую эргодичность. В коммутативном случае некоторые взаимосвязи между этими понятиями были рассмотрены в [4].

Приведем примеры строго слабо перемешивающих марковских операторов.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{A} = M_2(\mathbb{C})$ и τ — нормализованные следы на $\mathfrak{A}$. Через e_{ij} , $i, j = 1, 2$, мы обозначаем матричные единицы (в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}$) алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{E}: \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — каноническое условное математическое ожидание, т. е. $\mathcal{E}(x \otimes y) = \tau(y)x$ (см. [11]). Возьмем элемент $V \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, такой, что $\mathcal{E}(VV^*) = \Pi$. Определим $T_V: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ формулой $T_V(x) = \mathcal{E}(V(\Pi \otimes x)V^*)$, $x \in \mathfrak{A}$. Нетрудно видеть, что T_V является вполне положительным марковским оператором, таким, что $\tau(T_V x) = \tau(x)$ для всех $x \in \mathfrak{A}$. Если периферийный спектр есть множество $\{1\}$, то $T_V^n \rightarrow \tau\Pi$ при $n \rightarrow \infty$. В этом случае $(\mathfrak{A}, \tau, T_V)$ будет строго слабо перемешивающей. В частности, если выбрать в качестве V

$$V_\beta = \sqrt{\frac{2}{1 + \operatorname{ch}(2\beta)}} \exp\{\beta(e_{12} \otimes e_{21} + e_{21} \otimes e_{12})\}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

то все необходимые условия будут выполнены.

Используя теорему 1 и приведенный пример, можно сконструировать другие примеры строго слабо перемешивающих динамических систем. Отметим, что ряд примеров можно найти в [2], [5].

Пример 2. Пусть $(C(K), \nu, T)$ — коммутативная строго слабо перемешивающая динамическая система. Теперь из примера 1 и теоремы 1 видно, что $(C(K) \otimes M_2(\mathbb{C}), \nu \otimes \tau, T \otimes T_{V_\beta})$ является некоммутативной строго слабо перемешивающей динамической системой.

С помощью теоремы 3 мы выведем равномерную эргодическую теорему с весами для строго слабо перемешивающей динамической системы.

По аналогии с последовательностями Безиковича (см. [7]) мы вводим понятие S -последовательности Безиковича. Ограниченная последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$ называется S -последовательностью Безиковича, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют строго эргодическая динамическая система $(C(K), \nu, T_1)$, функция $f_0 \in C(K)$ и $\omega_0 \in K$, такие, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - (T_1^k f_0)(\omega_0)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Теорема 4. Пусть $(\mathfrak{A}, \varphi, T)$ — вполне положительная строго слабо перемешивающая динамическая система. Тогда для любого $x \in \mathfrak{A}$ и S -последовательности Безиковича $\{b_n\}$ средние

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k T^k(x) \quad (5)$$

равномерно сходятся в $\mathfrak{A}$.

Для операторов Данфорда–Шварца, действующих в гильбертовом пространстве, теорема такого типа доказана в [3].

Благодарности. Автор выражает свою признательность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Aaronson, M. Lin, B. Weiss, Israel J. Math., **33**:3–4 (1979), 198–224. [2] L. Accardi, F. Fidaleo, Ann. Mat. Pura Appl., **184**:3 (2005), 327–346. [3] D. Berend, M. Lin, J. Rosenblatt, A. Tempelman, Ergodic Theory Dynam. Systems, **22** (2002), 1653–1665. [4] R. Bowen, Israel J. Math., **23**:3–4 (1976), 267–273. [5] R. Carbone, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **7**:3 (2004), 317–335. [6] C. Cuny, J. Theoret. Probab., **16**:4 (2004), 923–933. [7] R. L. Jones, M. Lin, J. Olsen, New York J. Math., **3A** (1997/98), Proceedings of the New York Journal of Mathematics Conference, June 9–13 (1997), 89–98 (electronic). [8] H. O. Krengel, *Ergodic Theorems*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1985. [9] И. П. Корнефельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980. [10] C. Nicolescu, A. Ströh, L. Zsidó, J. Operator Theory, **50** (2003), 3–52. [11] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, I, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979. [12] S. Watanabe, J. Math. Anal. Appl., **86**:2 (1982), 411–424.