Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Тарханов, Эйлерова характеристика фред-гольмова квазикомплекса, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 4, 87–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2885>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 06:49:02

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Линейные преобразования в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986. [2] J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, Graduate Studies in Math., vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000. [3] C. C. Cowen, Trans. Amer. Math. Soc., **265**:1 (1981), 69–95. [4] V. Khatskevich, M. I. Ostrovskii, V. Shulman, Math. Nachr., **279** (2006), 875–890. [5] V. Khatskevich, V. Shulman, Studia Math., **116** (1995), 189–195. [6] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмудьян, Матем. исслед. (Кишинев), **2**:3 (1967), 64–96. [7] Г. А. Курина, Изв. РАН, Техн. кибернетика, 1993, № 6, 33–38. [8] М. М. Malamud, in: Recent Advances in Operator Theory (Groningen, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 124, Birkhäuser, Basel, 2001, 401–449.

Department of Math. and Comp. Sci.
St.-John's University, USA
e-mail: ostrovsm@stjohns.edu

Поступило в редакцию
20 октября 2005 г.

Department of Math.
ORT Braude College, Israel
e-mail: victor_kh@hotmail.com

Кафедра высшей математики
Вологодского государственного технического университета
e-mail: shulman_v@yahoo.com

УДК 517.951+517.954

Эйлерова характеристика фредгольмова квазикомплекса

© 2007. Н. Н. ТАРХАНОВ

1. Введение. В категории гильбертовых пространств комплекс (L, d) задается как последовательность гильбертовых пространств L^i , $i \in \mathbb{Z}$, вместе с непрерывными отображениями $d^i: L^i \rightarrow L^{i+1}$, такими, что $d^i \circ d^{i-1} = 0$.

Мы будем писать просто L , если это не приводит к недоразумениям. Рассматривая ограниченные (конечные) комплексы, мы предполагаем, что $L^i = 0$ для i , отличных от $0, 1, \dots, N$, в противном случае сдвигаем индексацию.

Пусть $Z^i(L)$ и $B^i(L)$ обозначают соответственно пространства коциклов и кограниц комплекса L в степени i . Очевидно, что $B^i(L)$ является векторным подпространством в $Z^i(L)$. Говорят, что комплекс L фредгольмов, если его когомологии $H^i(L) = Z^i(L)/B^i(L)$ конечномерны в каждой степени i . Для всякого фредгольмова комплекса L эйлерова характеристика $\chi(L)$ определяется следующим соотношением:

$$\chi(L) = \sum_{i=0}^N (-1)^i \dim H^i(L).$$

Предположим, что $d + V$ есть возмущение дифференциала d с достаточно «малым» V . Под «малым» мы понимаем принадлежность подходящему идеалу компактных операторов. Тогда квадрат $(d + V)^2 = dV + Vd + V^2$ не равен нулю,

но становится «малым», как и V . Последовательность $(L, d+V)$ уже не является комплексом и, таким образом, не имеет когомологий.

В качестве примера можно рассмотреть последовательность ковариантных производных, порожденных связностью на векторном расслоении F над C^∞ -гладким компактным многообразием. В этом случае композиции $d^i \circ d^{i-1}$ суть кривизны связности, в частности, гладкие дифференциальные формы степени 2 со значениями в эндоморфизмах расслоения F .

По сравнению с эйлеровой характеристикой сигнатуру фредгольмовых квазикомплексов определить легче, ср. [2].

2. Фредгольмовы квазикомплексы. С точки зрения анализа квазикомплексы являются более естественными объектами, чем комплексы. В самом деле, «малые» возмущения фредгольмовых операторов не влияют на фредгольмовость. В частности, возмущение фредгольмова оператора с помощью компактного оператора приводит к фредгольмову оператору. Было бы желательно, чтобы фредгольмовы комплексы обладали тем же свойством, но большинство возмущений выводит за класс «комплексов». Например, возмущение эллиптического комплекса в младших членах не меняет последовательность главных символов, которая остается точной вне нулевого сечения кокасательного расслоения. Однако операторы уже не удовлетворяют условию $d^i \circ d^{i-1} = 0$, а значит, стандартная теория не применима к деформированному комплексу. Таким образом, мы приходим к классу последовательностей $L = (L^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, для которых композиции $d^i \circ d^{i-1}$ являются маленькими в некотором разумном смысле.

Определение 1. Под (коцепным) квазикомплексом (L, d) мы понимаем любую последовательность гильбертовых пространств L^i , $i \in \mathbb{Z}$, вместе с операторами $d^i \in \mathcal{L}(L^i, L^{i+1})$, удовлетворяющими условию $d^i \circ d^{i-1} = 0$ по модулю компактных операторов.

Обозначим через $\mathcal{K}(L, \tilde{L})$ подпространство в $\mathcal{L}(L, \tilde{L})$, состоящее из компактных операторов. Для $m_1, m_2 \in \mathcal{L}(L, \tilde{L})$ мы будем писать $m_1 \sim m_2$, если $m_1 - m_2 \in \mathcal{K}(L, \tilde{L})$.

Предположим, что (L, d) и $(\tilde{L}, \tilde{d})$ — два квазикомплекса. Под коцепным отображением квазикомплекса (L, d) в $(\tilde{L}, \tilde{d})$ мы понимаем такой набор операторов $m^i \in \mathcal{L}(L^i, \tilde{L}^i)$, $i \in \mathbb{Z}$, что $\tilde{d}^i m^i \sim m^{i+1} d^i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. В частности, семейства $0 = (0_{L^i})_{i \in \mathbb{Z}}$ и $1 = (1_{L^i})_{i \in \mathbb{Z}}$ суть коцепные отображения квазикомплекса (L, d) в себя, а значит, таковыми являются и все их компактные возмущения.

Говорят, что коцепные отображения $(m_0^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ и $(m_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ квазикомплекса (L, d) в $(\tilde{L}, \tilde{d})$ гомотопны, если найдется такой набор $h^i \in \mathcal{L}(L^i, \tilde{L}^{i-1})$, $i \in \mathbb{Z}$, что $m_1^i - m_0^i \sim \tilde{d}^{i-1} h^i + h^{i+1} d^i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$.

Теперь нам нужно ввести понятие фредгольмова квазикомплекса. Напомним, что оператор $d \in \mathcal{L}(L, \tilde{L})$ в гильбертовых пространствах является фредгольмовым тогда и только тогда, когда его образ в алгебре Калкина $\mathcal{L}(L, \tilde{L})/\mathcal{K}(L, \tilde{L})$ обратим. Итак, основная идея заключается в том, чтобы перейти в заданном квазикомплексе к факторпространствам по модулю пространств компактных операторов и потребовать точности. С этой целью мы воспользуемся функтором ϕ_Σ , изученным Путиным [3]. Для комплексов псевдодифференциальных операторов он задает то, что называют символическим комплексом.

Для гильбертовых пространств L и Σ положим $\phi_\Sigma(L) = \mathcal{L}(\Sigma, L)/\mathcal{K}(\Sigma, L)$. Кроме того, для любого $d \in \mathcal{L}(L, \tilde{L})$ определим $\phi_\Sigma(d) \in \mathcal{L}(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(\tilde{L}))$ формулой

$$\phi_\Sigma(d)(m + \mathcal{K}(\Sigma, L)) = dm + \mathcal{K}(\Sigma, \tilde{L})$$

при $m \in \mathcal{L}(\Sigma, L)$. Ясно, что этот оператор корректно определен. Легко видеть, что $\phi_\Sigma(d^2 d^1) = \phi_\Sigma(d^2) \phi_\Sigma(d^1)$ для всех $d^1 \in \mathcal{L}(L^1, L^2)$ и $d^2 \in \mathcal{L}(L^2, L^3)$. Если 1_L — единичный оператор на L , то $\phi_\Sigma(1_L)$ — единичный оператор на $\phi_\Sigma(L)$. Эти наблюдения показывают, что ϕ_Σ есть на самом деле ковариантный функтор в категории гильбертовых пространств.

Ключевым является тот факт, что ϕ_Σ обращается в нуль на компактных операторах для любого гильбертова пространства Σ . Обратно, если $d \in \mathcal{L}(L, \tilde{L})$ и $\phi_\Sigma(d) = 0$ для любого гильбертова пространства Σ , то $d \in \mathcal{K}(L, \tilde{L})$. В самом деле, взяв $\Sigma = L$, мы из равенств

$$\phi_L(d)(1_L + \mathcal{K}(L, L)) = d + \mathcal{K}(L, \tilde{L}) = \mathcal{K}(L, \tilde{L})$$

получаем, что $d \in \mathcal{K}(L, \tilde{L})$.

Заметим, что если (L, d) — произвольный квазикомплекс, то $(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(d))$ является комплексом для каждого гильбертова пространства Σ . Значит, функтор ϕ_Σ преобразует квазикомплексы в обычные комплексы. Кроме того, коцепные отображения квазикомплексов преобразуются под действием ϕ_Σ в коцепные отображения комплексов, а ϕ_Σ сохраняет классы гомотопий коцепных отображений.

Определение 2. Квазикомплекс (L, d) называется фредгольмовым, если ассоциированный с ним комплекс $(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(d))$ точен для каждого гильбертова пространства Σ .

Пусть (L, d) и $(L, \tilde{d})$ — два квазикомплекса, таких, что $d^i \sim \tilde{d}^i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Тогда комплексы $(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(d))$ и $(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(\tilde{d}))$, очевидно, совпадают для каждого гильбертова пространства Σ . Следовательно, (L, d) и $(L, \tilde{d})$ одновременно являются фредгольмовыми. Другими словами, всякое компактное возмущение фредгольмова квазикомплекса является фредгольмовым квазикомплексом.

Теорема 3. *Ограниченный сверху квазикомплекс (L, d) является фредгольмовым тогда и только тогда, когда тождественное отображение на (L, d) гомотопно нулевому.*

Эта теорема получена еще в [4], а может быть, и раньше.

Доказательство. Необходимость. Пусть квазикомплекс (L, d) фредгольмов и ограничен сверху, т.е. $L^i = 0$ для всех индексов, кроме $i \leq N$. Наша цель — показать, что существуют такие операторы $\pi^i \in \mathcal{L}(L^i, L^{i-1})$, $i \in \mathbb{Z}$, что

$$d^{i-1} \pi^i + \pi^{i+1} d^i = 1_{L^i} - c^i \quad (1)$$

для всех $i \in \mathbb{Z}$, где $c^i \in \mathcal{K}(L^i)$.

Положим $\pi^i = 0$ для всех целых $i > N$. Если $i = N$, то из точности комплекса $(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(d))$, $\Sigma = L^N$, в степени N следует, что найдется такой оператор $\pi^N \in \mathcal{L}(L^N, L^{N-1})$, что $d^{N-1} \pi^N \sim 1_{L^N}$. Обозначая через c^N разность $1_{L^N} - d^{N-1} \pi^N$, мы, таким образом, получаем, что $c^N \in \mathcal{K}(L^N)$.

Теперь воспользуемся индукцией. Предположим, что мы уже нашли такие отображения

$$\begin{array}{ccc} \pi^i, & \pi^{i+1}, & \dots; \\ c^i, & c^{i+1}, & \dots, \end{array}$$

что равенство (1) справедливо в степенях $i, i+1, \dots$ для некоторого $i \leq N$. Заметим, что

$$d^{i-1}(1_{L^{i-1}} - \pi^i d^{i-1}) = d^{i-1} - (1_{L^i} - c^i - \pi^{i+1} d^i) d^{i-1} = c^i d^{i-1} + \pi^{i+1} d^i d^{i-1} \sim 0$$

согласно (1). Из точности комплекса $(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(d))$ с $\Sigma = L^{i-1}$ в степени $i-1$ следует, что существует такое $\pi^{i-1} \in \mathcal{L}(L^{i-1}, L^{i-2})$, что $d^{i-2} \pi^{i-1} \sim 1_{L^{i-1}} - \pi^i d^{i-1}$. Полагая $c^{i-1} = 1_{L^{i-1}} - \pi^i d^{i-1} - d^{i-2} \pi^{i-1}$, мы заключаем, что $c^{i-1} \in \mathcal{K}(L^{i-1})$ и (1) выполнено в степени $i-1$. Этим устанавливается существование решений π^i, c^i для (1) при каждом $i \in \mathbb{Z}$, т. е. гомотопия между тождественным и нулевым отображениями комплекса (L, d) .

Достаточность. Если тождественное отображение $1 = (1_{L^i})_{i \in \mathbb{Z}}$ гомотопно нулевому отображению $0 = (0_{L^i})_{i \in \mathbb{Z}}$ на (L, d) , то тождественное отображение на когомологиях $H^i(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(d))$ обращается в нуль для всех $i \in \mathbb{Z}$. Значит, комплекс $(\phi_\Sigma(L), \phi_\Sigma(d))$ точен для каждого гильбертова пространства Σ , что и требовалось. $\square$

Любое решение $\pi^i \in \mathcal{L}(L^i, L^{i-1})$, $i \in \mathbb{Z}$, для (1) называется параметриком квазикомплекса (L, d) . Таким образом, теорема 3 просто утверждает, что ограниченный сверху квазикомплекс является фредгольмовым тогда и только тогда, когда он обладает параметриком.

Для заданного фредгольмова квазикомплекса (L, d) , если $f \in L^i$ удовлетворяет условию $d^i f = 0$, то $f = c^i f + d^{i-1} \pi^i f$, где (L, π) есть параметрикс для (L, d) , как в (1). Другими словами, оператор d^{i-1} имеет правый обратный π^i на $Z^i(L)$ по модулю компактных операторов. Однако, поскольку композиции $d^i d^{i-1}$ не обязаны обращаться в нуль для квазикомплекса L , образ d^{i-1} уже не лежит в $Z^i(L)$. Поэтому обычные когомологии не имеют для L смысла. Вопрос о подходящем аналоге когомологий для квазикомплексов кажется очень деликатным, ср. [4].

3. Сведение к комплексам. Пусть (L, d) — фредгольмов квазикомплекс, состоящий из гильбертовых пространств L^i , равных нулю для всех i , кроме $i = 0, 1, \dots, N$, и операторов $d^i \in \mathcal{L}(L^i, L^{i+1})$, для которых композиция $d^{i+1} \circ d^i$ компактна.

Вместе эти пространства и операторы образуют последовательность гильбертовых пространств с компактной кривизной, а именно,

$$0 \longrightarrow L^0 \xrightarrow{d^0} L^1 \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{N-1}} L^N \longrightarrow 0. \quad (2)$$

Теорема 4. Для каждого фредгольмова квазикомплекса (2) найдутся ограниченные операторы $D^i \in \mathcal{L}(L^i, L^{i+1})$, такие, что $D^i = d^i$ по модулю компактных операторов из $\mathcal{K}(L^i, L^{i+1})$ и $D^{i+1} D^i = 0$ для всех i .

Доказательство. Положим $D^{N-1} = d^{N-1}$. Лапласиан $\Delta^N = D^{N-1} D^{N-1*}$ является самосопряженным оператором на L^N , а его ядро совпадает с ядром оператора D^{N-1*} . По теореме 3 оператор D^{N-1*} имеет левый параметрикс.

В самом деле, равенство $\pi^{N*}D^{N-1*} = 1_{L^N} - c^{N*}$ справедливо на L^N . Значит, единичный оператор на $\ker D^{N-1*}$ компактен. Поэтому ядро оператора D^{N-1*} конечномерно, а следовательно, Δ^N фредгольмов.

Согласно абстрактной теории Ходжа, найдется самосопряженный оператор $G^N \in \mathcal{L}(L^N)$, образ которого лежит в ортогональном дополнении к $\ker \Delta^N$, такой, что $1_{L^N} = H^N + \Delta^N G^N$ на L^N , где H^N — ортогональный проектор на конечномерное пространство $\ker \Delta^N = \ker D^{N-1*}$.

Таким образом, пространство $\ker D^{N-1*}$ является препятствием для существования правого обратного для D^{N-1} . Оператор $\Phi^N = D^{N-1*}G^N$ есть специальный правый параметрикс для D^{N-1} в $\mathcal{L}(L^N, L^{N-1})$.

Покажем теперь, что $P^{N-1} = 1_{L^{N-1}} - \Phi^N D^{N-1}$ — ортогональный проектор на ядро оператора D^{N-1} . С этой целью заметим что P^{N-1} есть тождественный оператор на ядре оператора D^{N-1} и

$$D^{N-1}P^{N-1} = D^{N-1} - (1_{L^N} - H^N)D^{N-1} = 0,$$

так как $H^N D^{N-1} = (D^{N-1*}H^N)^* = 0$. Из этого и следует требуемое заключение.

Для того чтобы построить оператор D^{N-2} , рассмотрим последний фрагмент последовательности (2), а именно,

$$L^{N-2} \xrightarrow{d^{N-2}} L^{N-1} \xrightarrow{D^{N-1}} L^N.$$

Положим $D^{N-2} = P^{N-1}d^{N-2}$, получив таким образом ограниченный оператор типа $L^{N-2} \rightarrow L^{N-1}$ с $D^{N-1}D^{N-2} = 0$, и $D^{N-2} = (1_{L^{N-1}} - \Phi^N d^{N-1})d^{N-2} = d^{N-2}$ по модулю компактных операторов в $\mathcal{K}(L^{N-2}, L^{N-1})$, что и требовалось.

Теперь мы ограничимся подходящей модификацией предыдущего фрагмента последовательности (2), т. е.

$$L^{N-3} \xrightarrow{d^{N-3}} L^{N-2} \xrightarrow{D^{N-2}} L^{N-1}.$$

Лапласиан $\Delta^{N-1} = D^{N-1*}D^{N-1} + D^{N-2}D^{N-2*}$ является самосопряженным оператором в $\mathcal{L}(L^{N-1})$, а его ядро, очевидно, совпадает с $\ker D^{N-1} \cap \ker D^{N-2*}$. Нашей следующей целью будет доказать, что это ядро конечномерно. Для этого заметим, что равенство

$$D^{N-2}\pi^{N-1} + \pi^N D^{N-1} = 1_{L^{N-1}} - C^{N-1}$$

справедливо для некоторых компактных операторов $C^{N-1} \in \mathcal{K}(L^{N-1})$, поскольку оба оператора $D^{N-1} - d^{N-1}$ и $D^{N-2} - d^{N-2}$ компактны. Значит, тождественный оператор на когомологиях $H^{N-1}(L, D)$ компактен, а потому размерность пространства $H^{N-1}(L, D)$ конечна. Так как естественное вложение $\ker \Delta^{N-1} \hookrightarrow H^{N-1}(L, D)$ инъективно, мы заключаем, что ядро оператора Δ^{N-1} также конечномерно. Это доказывает, что лапласиан Δ^{N-1} фредгольмов.

По абстрактной теории Ходжа существует самосопряженный оператор $G^{N-1} \in \mathcal{L}(L^{N-1})$, отображающий в ортогональное дополнение к $\ker \Delta^{N-1}$ и удовлетворяющий равенству

$$1_{L^{N-1}} = H^{N-1} + \Delta^{N-1}G^{N-1}$$

на L^{N-1} , где H^{N-1} — ортогональный проектор на конечномерное пространство $\ker \Delta^{N-1}$.

Мы утверждаем, что $D^{N-1}G^{N-1} = G^N D^{N-1}$. Для доказательства возьмем произвольный элемент $u \in L^{N-1}$. Тогда $D^{N-1}u = D^{N-1}D^{N-1*}D^{N-1}G^{N-1}u$, с одной стороны, и $D^{N-1}u = D^{N-1}D^{N-1*}G^N D^{N-1}u$, с другой стороны. Значит, $\Delta^N(D^{N-1}G^{N-1}u - G^N D^{N-1}u) = 0$, а поскольку $D^{N-1}G^{N-1}u - G^N D^{N-1}u$ ортогонально $\ker \Delta^N$, то мы заключаем, что $D^{N-1}G^{N-1}u - G^N D^{N-1}u = 0$, как и требовалось.

Таким образом, композиция $\Phi^{N-1} = D^{N-2*}G^{N-1}$ является оператором из $\mathcal{L}(L^{N-1}, L^{N-2})$, удовлетворяющим уравнению гомотопии

$$\Phi^N D^{N-1} + D^{N-2}\Phi^{N-1} = 1_{L^{N-1}} - H^{N-1}.$$

Другими словами, пара $\{\Phi^{N-1}, \Phi^N\}$ есть специальный параметрикс в степенях $N-1$ и N для последовательности (2).

Для того чтобы построить D^{N-3} , мы теперь можем использовать те же аргументы, что и при построении D^{N-2} . А именно, покажем, что $P^{N-2} = 1_{L^{N-2}} - \Phi^{N-1}D^{N-2}$ есть ортогональный проектор на ядро оператора D^{N-2} . Для этого заметим, что P^{N-2} есть тождественный оператор на ядре D^{N-2} , а

$$D^{N-2}P^{N-2} = D^{N-2} - (1_{L^{N-1}} - H^{N-1} - \Phi^N D^{N-1})D^{N-2} = 0,$$

так как $H^{N-1}D^{N-2} = (D^{N-2*}H^{N-1})^* = 0$. Из этого непосредственно следует требуемое заключение.

Положим $D^{N-3} = P^{N-2}d^{N-3}$. Тогда $D^{N-3} \in \mathcal{L}(L^{N-3}, L^{N-2})$ удовлетворяет соотношению $D^{N-2}D^{N-3} = 0$ и

$$D^{N-3} = (1_{L^{N-2}} - \Phi^{N-1}d^{N-2})d^{N-3} = d^{N-3}$$

по модулю компактных операторов в $\mathcal{K}(L^{N-3}, L^{N-2})$, что и требовалось.

Наконец, рассуждая по индукции, мы завершим доказательство, поскольку последовательность (2) обрывается. $\square$

4. Эйлерова характеристика. Рассмотрим фредгольмов квазикомплекс (2) с гильбертовыми пространствами L^i . По теореме 4 найдутся такие операторы $D^i \in \mathcal{L}(L^i, L^{i+1})$, что $D^i = d^i$ по модулю компактных операторов из $\mathcal{K}(L^i, L^{i+1})$ и $D^{i+1}D^i = 0$ для всех i . Таким образом, мы приходим к фредгольмову комплексу

$$0 \longrightarrow L^0 \xrightarrow{D^0} L^1 \xrightarrow{D^1} \dots \xrightarrow{D^{N-1}} L^N \longrightarrow 0, \quad (3)$$

причем фредгольмовость является следствием того, что фредгольмовы квазикомплексы стабильны относительно компактных возмущений.

Определение 5. Под эйлеровой характеристикой фредгольмова квазикомплекса (2) мы понимаем $\chi(L, D)$.

Возникает естественный вопрос: является ли это определение корректным, т. е. не зависит ли оно от выбора комплекса (3).

Теорема 6. Пусть (L, D_1) и (L, D_2) — два комплекса, таких, что $D_1^i = d^i$ и $D_2^i = d^i$ по модулю компактных операторов из $\mathcal{K}(L^i, L^{i+1})$. Тогда $\chi(L, D_1) = \chi(L, D_2)$.

Доказательство. Разложим L в сумму,

$$L = L^{\text{even}} \oplus L^{\text{odd}},$$

где $L^{\text{even}} = \bigoplus L^{2i}$ и $L^{\text{odd}} = \bigoplus L^{2i+1}$. Пусть теперь

$$(D_1 + D_1^*)_e: L^{\text{even}} \rightarrow L^{\text{odd}}, \quad (D_2 + D_2^*)_e: L^{\text{even}} \rightarrow L^{\text{odd}}$$

обозначают сужения на L^{even} операторов $D_1 + D_1^*$ и $D_2 + D_2^*$ соответственно. Абстрактная теория Ходжа позволяет заключить, что индекс оператора $(D_1 + D_1^*)_e$ равен $\chi(L, D_1)$, а индекс оператора $(D_2 + D_2^*)_e$ равен $\chi(L, D_2)$. Так как фредгольмовы операторы $(D_1 + D_1^*)_e$ и $(D_2 + D_2^*)_e$ отличаются на компактный оператор, их индексы совпадают. Значит, $\chi(L, D_1) = \chi(L, D_2)$, что и требовалось доказать. $\square$

Итак, фредгольмовы квазикомплексы операторов в гильбертовых пространствах обладают корректно определенной эйлеровой характеристикой.

Отметим, что эйлерова характеристика фредгольмова квазикомплекса может быть вычислена по грубой формуле

$$\chi(L, d) = \sum_{i=0}^N (-1)^i \operatorname{tr}(1_{L^i} - d^{i-1} \pi^i - \pi^{i+1} d^i),$$

где $\{\pi^i\}$ — параметрикс комплекса (L, d) по модулю ядерных операторов. Это следует из соображений, приведенных в [1, с. 203].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. В. Федосов, Теоремы об индексе, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 65, ВИНТИ, М., 1991, 165–268. [2] А. С. Мищенко, Труды МИРАН, **231** (2000), 281–307. [3] М. Putinar, J. Operator Theory, **8** (1982), 65–90. [4] B.-W. Schulze, N. Tarkhanov, in: Evolution Equations, Feshbach Resonances, Singular Hodge Theory, Math. Top., vol. 16, Wiley-VCH, Berlin, 1999, 287–431. [5] N. Tarkhanov, *Complexes of Differential Operators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 1995.

Universität Potsdam, Institut für Mathematik
e-mail: tarkhanov@math.uni-potsdam.de

Поступило в редакцию
16 марта 2006 г.