Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Березанский, А. А. Мохонько, Интегрирование некоторых дифференциально-разностных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 1, 1–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:33:34

УДК 517.53+517.91

Интегрирование некоторых дифференциально-разностных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц*

© 2008. Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ, А. А. МОХОНЬКО

Светлой памяти М. Г. Крейна в связи со 100-летием его рождения

Для интегрирования задачи Коши по времени t для нелинейного уравнения Кортевега-де-Фриза имеется известный метод обратной спектральной задачи для самосопряженного уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси, предложенный и развитый в классических работах И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана, В. А. Марченко и М. Г. Крейна (см. его изложение в [1]). Пользуясь некоторыми результатами для конечной цепочки Тоды (см. [2], [3]), один из авторов в [4]–[6] предложил аналогичный метод интегрирования задачи Коши по t для разностного нелинейного уравнения — полубесконечной цепочки Тоды, основывающийся на более простой спектральной теории разностного аналога уравнения Штурма–Лиувилля — полубесконечной самосопряженной якобиевой матрицы. Подчеркнем, что в обоих случаях использовались самосопряженные операторы.

Главная цель этой работы — показать, что аналогичная теория интегрирования соответствующих классов нелинейных разностных уравнений может быть развита на основании недавно построенной в [7], [8] спектральной теории *нормальных* полубесконечных якобиевых матриц. При этом подходе с необходимостью появляются матричные (неабелевы) нелинейные разностные уравнения. Это связано не со стремлением к обобщениям, а с тем жестким фактом, что нормальные трехдиагональные матрицы — это обязательно матрицы с блочной якобиевой структурой с (как правило) нарастающими конечными размерностями блоков.

Теперь несколько слов о спектральной теории блочных *самосопряженных* якобиевых матриц. Эта теория была создана под влиянием заметки М. Г. Крейна 1949 г. [9], развивалась, в частности, в работах [10]–[12] и нашла применение в интегрировании задачи Коши для некоторых классов матричных разностных уравнений [13]–[16] (применялись также некоторые результаты типа спектральных относительно общих блочных якобиевых матриц, развитые в [17], [18]). Ситуация здесь оказалась менее приятной: решение основополагающего дифференциального уравнения по t для аналога функции Вейля можно было найти лишь в достаточно специальных случаях.

Остановимся еще на одном аспекте рассматриваемой задачи, когда разностная переменная меняется на всей оси $\mathbb{Z} = \{n\} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, а не на полуоси. В этом случае даже решение задачи Коши для обычной цепочки Тоды вызывает серьезные трудности: если применить метод удвоения [12] и свести

*Работа выполнена при частичной поддержке грантом DFG 436 UKR 113/78/0-1.

рассмотрение к разностному уравнению на полуоси, но для блочной (2×2) -якобиевой матрицы, то проинтегрировать уравнение по t относительно функции Вейля не удастся. Здесь имеется большое число работ (как в скалярном, так и в неабелевом матричном случае), в которых в специальных ситуациях и при специальных исходных данных эти трудности удается преодолеть, используя не только спектральный подход. Так, в периодическом случае уравнение было проинтегрировано в терминах тэта-функций в [19] (см. также [20]), методом обратной задачи теории рассеяния (для разностной задачи) — в [21]–[23], подобным используемому в [4]–[6] методом для убывающих к нулю при $|n| \rightarrow \infty$ начальных данных — в [24]–[26]; см. также [27]–[29]. Имеется также большое количество работ в указанных направлениях, носящих более физический характер. С некоторыми из них можно познакомиться в сборнике трудов конференции, фигурирующей в [30]. Отметим также недавно появившуюся книгу [31], содержащую математически корректное изложение ряда вопросов интегрирования задачи Коши для нелинейных разностных уравнений.

Остановимся несколько более детально на методе работ [4]–[6] интегрирования задачи Коши для цепочки Тоды на полуоси при помощи спектральной теории классических якобиевых матриц. Его суть сводилась к тому, что с решением $u(t)$, $t \in [0, \infty)$, связывалась определенным простым образом ограниченная в пространстве ℓ_2 самосопряженная якобиева матрица $J(t)$, эволюция спектральной меры $d\rho(\lambda; t)$ которой во времени легко подсчитывалась. Поэтому по спектральной мере $d\rho(\lambda; 0)$ матрицы $J(0)$, отвечающей начальному значению $u(0)$ решения, легко было подсчитать $d\rho(\lambda; t)$ для произвольного $t > 0$, а значит, и восстановить при помощи решения обратной спектральной задачи саму матрицу $J(t)$ и тем самым найти решение $u(t)$.

В дальнейшем в статьях [32], [33], [30], [34] этот метод был обобщен на неизоспектральные уравнения, для которых спектр матрицы $J(t)$ изменяется во времени (для цепочки Тоды он от t не зависит). В [35] был рассмотрен случай, когда якобиева матрица $J(t)$ порождает неограниченный (но самосопряженный) оператор в ℓ_2 .

В последние годы усилился интерес к теории ортогональных полиномов на единичной окружности (см. [36], [37]). Такие полиномы связаны с операторами, действующими в обычном пространстве ℓ_2 и порождающимися пятидиагональными унитарными матрицами (вместо трехдиагональных самосопряженных якобиевых) [38]. Оказалось, что и в этом случае спектральную теорию таких матриц можно применить, подобно самосопряженному случаю, к интегрированию некоторых нелинейных уравнений [39]. Роль цепочки Тоды теперь играет поток Шура.

Как уже говорилось, недавно была развита спектральная теория блочных нормальных якобиевых матриц [7], [8]. Они действуют в пространстве $\mathbf{l}_2$, которое равно ортогональной сумме конечномерных (а не одномерных, как в случае ℓ_2) пространств, и порождают нормальный оператор.

В частности, этот оператор может быть унитарным. Тогда он действует в пространстве $\mathbf{l}_{2,u} = \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \dots \subset \mathbf{l}_2$ и задается блочной якобиевой матрицей. Если воспринимать пространство $\mathbf{l}_{2,u}$ как обычное пространство ℓ_2 (после введения стандартного базиса в $\mathbb{C}^2$), то этот оператор задается пятидиагональной матрицей, которая совпадает с рассматривавшейся в [36]–[39]. Развита в [7], [8] теория аналогична классической теории якобиевых матриц: обобщенные

собственные векторы будут последовательностью полиномов от z и $\bar{z}$, ортогональных относительно спектральной меры на плоскости (или, для унитарного случая, на единичной окружности).

Повторим, что целью этой работы является перенесение подхода работ [4]–[6] на случай блочных якобиевых матриц, порождающих нормальный (или унитарный) оператор в пространстве ℓ_2 (или $\ell_{2,u}$). В унитарном случае результаты близки к полученным в [39].

В §1 излагается без доказательств спектральная теория блочных якобиевых нормальных матриц [8]. Для ее лучшего понимания в начале параграфа мы кратко напоминаем ситуацию с классическими якобиевыми матрицами. §§2,3 посвящены интегрированию нелинейных разностных уравнений в случае, когда спектр исходного нормального оператора одномерен, а §5 — когда он двумерен. В §4 мы кратко излагаем ситуацию, когда в роли нормальной блочной якобиевой матрицы выступает ее частный случай — унитарная блочная якобиева матрица, применяя при этом соответствующую спектральную теорию [7], с ортогональными полиномами на единичной окружности. Подобный подход в терминах пятидиагональных унитарных матриц в обычном пространстве ℓ_2 был предложен Голинским в [39] как развитие подхода из [4]–[6]. Статья [39] стимулировала написание предлагаемой работы.

§1. Спектральная теория блочных якобиевых нормальных матриц

1. Классическая спектральная теория самосопряженных якобиевых матриц строится в пространстве ℓ_2 последовательностей $f = (f_n)_{n=0}^\infty$, $f_n \in \mathbb{C}$. Оператор задается трехдиагональной (якобиевой) матрицей J с элементами $(b_n)_{n=0}^\infty$ на главной диагонали и $(a_n)_{n=0}^\infty$ по двум смежным, $b_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$. Он обозначается через $\mathbf{J}$ и строится как замыкание в ℓ_2 отображения $\ell_2 \supset \ell_{\text{fin}} \ni f \mapsto Jf \in \ell_2$. Этот оператор будет эрмитовым и, при определенном поведении на ∞ элементов a_n , b_n , самосопряженным (если a_n , b_n равномерно ограничены, то $\mathbf{J}$ — ограниченный самосопряженный оператор).

Разложение по обобщенным собственным векторам $(P_n(\lambda))_{n=0}^\infty$ оператора $\mathbf{J}$ ($P_n(\lambda) \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$) строится следующим образом. Рассмотрим разностное уравнение

$$(Jf)_n = a_{n-1}f_{n-1} + b_nf_n + a_nf_{n+1} = \lambda f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad f_{-1} = 0, \quad (1)$$

на полуоси $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — спектральный параметр. Благодаря условию $a_n > 0$ всегда существует решение $f_n = P_n(\lambda)$ уравнения (1) (являющееся полиномом степени n от λ). Последовательность $P(\lambda) = (P_n(\lambda))_{n=0}^\infty$ будет в известном смысле обобщенным собственным вектором оператора $\mathbf{J}$, отвечающим собственному значению λ , $\mathbf{J}P(\lambda) = \lambda P(\lambda)$.

Соответствующее преобразование Фурье $\hat{}$ имеет вид

$$\ell_2 \supset \ell_{\text{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto \hat{f}(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty f_n P_n(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda)) =: L^2. \quad (2)$$

После замыкания по непрерывности отображение (2) становится унитарным оператором, переводящим пространство ℓ_2 в пространство L^2 суммируемых с квадратом функций относительно спектральной меры $d\rho(\lambda)$ оператора $\mathbf{J}$ (борелевской вероятностной меры с бесконечным числом точек роста). При преобразовании Фурье (2) оператор $\mathbf{J}$ переходит в оператор умножения на λ в L^2 .

Эта конструкция тесно связана с теорией ортогональных полиномов от λ на вещественной оси относительно спектральной меры. А именно, из (2) следует, что $(P_n(\lambda))_{n=0}^\infty$ образуют ортонормированный полиномиальный базис в L^2 . Считая спектральную меру $d\rho(\lambda)$ заданной, этот базис можно построить непосредственно: нужно применить классическую процедуру ортогонализации Шмидта в пространстве L^2 к последовательности линейно независимых функций

$$1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3)$$

(считается, что система (3) линейно независима и полна в L^2). В результате ортогонализации мы получим последовательность $P(\lambda) = (P_n(\lambda))_{n=0}^\infty$ — обобщенную собственную функцию оператора J , спектральной мерой которого является заданная мера $d\rho(\lambda)$. Для элементов a_n, b_n матрицы J теперь выписываются простые формулы. В этом заключается простейшая обратная задача спектрального анализа: каким образом по заданной спектральной мере $d\rho(\lambda)$ восстановить оператор J , спектральной мерой которого будет заданная мера $d\rho(\lambda)$.

2. Спектральная теория блочных якобиевых нормальных матриц (см. [7], [8]) строится аналогично описанной выше классической теории. Сейчас вместо пространства ℓ_2 рассматривается гильбертово пространство

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 &= \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \mathbf{l}_2 \ni f &= (f_n)_{n=0}^\infty, \quad \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Векторы x_n из пространства $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}$ удобно обозначать так: $x_n = (x_{n;0}, \dots, x_{n;n})$. Для любого $\alpha \in \{0, \dots, n\}$ число $x_{n;\alpha} \in \mathbb{C}$ является координатой при базисном векторе

$$\delta_{n;\alpha} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{H}_n \subset \mathbf{l}_2$$

(единица стоит на α -м месте), $\delta_0 = (1)$. Обобщение якобиевой матрицы сейчас выглядит следующим образом ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_n &: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ b_n &: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n, \\ c_n &: \mathcal{H}_{n+1} \rightarrow \mathcal{H}_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Такая матрица (5) на финитных векторах из $\mathbf{l}_{\text{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ индуцирует оператор

$$\mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f \mapsto Jf = ((Jf)_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbf{l}_2, \quad (Jf)_n = a_{n-1}f_{n-1} + b_nf_n + c_nf_{n+1}. \quad (6)$$

Здесь $f_{-1} = 0$. Предполагается, что этот оператор допускает замыкание, которое будет обозначаться через J .

Как легко видеть, формально сопряженная к J матрица J^+ имеет ту же структуру (5), но с элементами c_n^+, b_n^+ и a_n^+ на нижней, средней и верхней диагоналях; матрица J^+ однозначно определяется по J соотношением $(Jf, g)_{\mathbf{l}_2} = (f, J^+g)_{\mathbf{l}_2}$, $f, g \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$ (для числовых матриц $^+$ означает обычное сопряжение).

Для простоты мы будем предполагать, что нормы всех матриц a_n, b_n, c_n равномерно ограничены; тогда оператор (6) ограничен. Таким же будет аналогично построенный (по J^+) оператор J^+ .

Основное ограничение в настоящей статье: матрица J формально нормальная: $JJ^+ = J^+J$ (нетрудно выписать соотношения на элементы матриц a_n , b_n , c_n , обеспечивающие такую нормальность). В случае равномерно ограниченных элементов матрицы J оператор J будет нормальным: $J^*J = JJ^*$.

Роль положительности a_n в обычной теории якобиевых матриц сейчас будут играть более громоздкие условия, обеспечивающие разрешимость уравнений типа (1) для нашего случая. А именно, будем предполагать, что выполнено следующее условие: околодиагональные матрицы имеют вид

$$a_n = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{n;0,0} & a_{n;0,1} & a_{n;0,2} & \cdots & a_{n;0,n-1} & a_{n;0,n} \\ 0 & a_{n;1,1} & a_{n;1,2} & \cdots & a_{n;1,n-1} & a_{n;1,n} \\ 0 & 0 & a_{n;2,2} & \cdots & a_{n;2,n-1} & a_{n;2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n;n-1,n-1} & a_{n;n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n;n,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n+1} \Bigg\}^{n+2}, \quad (7)$$

$$c_n = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} & c_{n;1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ c_{n;2,0} & c_{n;2,1} & c_{n;2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n;n-1,0} & c_{n;n-1,1} & c_{n;n-1,2} & \cdots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ c_{n;n,0} & c_{n;n,1} & c_{n;n,2} & \cdots & c_{n;n,n} & c_{n;n,n+1} \end{pmatrix}}_{n+2} \Bigg\}^{n+1},$$

$$a_{n;0,0}, a_{n;1,1}, \dots, a_{n;n,n}; c_{n;0,1}, c_{n;1,2}, \dots, c_{n;n,n+1} > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Роль обобщенного собственного вектора $P(\lambda) = (P_n(\lambda))_{n=0}^\infty$ сейчас играет последовательность $P(z) = (P_n(z))_{n=0}^\infty$, где $P_n(z) \in \mathcal{H}_n$ — векторнозначный полином от z , $\bar{z}$ порядка n , $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$. А именно

$$P_n(z) = (\overline{P_{n;0}(z)}, \overline{P_{n;1}(z)}, \dots, \overline{P_{n;n}(z)}), \quad (8)$$

где $P_{n;\alpha}(z)$, $\alpha = 0, \dots, n$, — некоторая линейная комбинация с комплексными коэффициентами функций

$$1; z^1 \bar{z}^0, z^0 \bar{z}^1; \dots; z^n \bar{z}^0, z^{n-1} \bar{z}^1, \dots, z^{n-\alpha} \bar{z}^\alpha$$

(коэффициент при $z^{n-\alpha} \bar{z}^\alpha$ положителен).

Полиномы (8) являются решениями двух разностных уравнений:

$$JP(z) = zP(z), \quad J^+P(z) = \bar{z}P(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Отметим, что, в отличие от (1), здесь появляются два уравнения, так как для нормального оператора z , $\bar{z}$ одновременно будут собственными значениями. Условия (7) являются, подобно условию $a_n > 0$, условиями разрешимости уравнений (9).

Как и в классическом случае, для построения $P_n(z)$ можно использовать процедуру классической ортогонализации Шмидта в пространстве $L^2 := L^2(\mathbb{C}, d\rho(z))$

относительно заданной борелевской вероятностной меры $d\rho(z)$, ортогонализуя вместо простой последовательности (3) более сложную:

$$z^0 \bar{z}^0; z^1 \bar{z}^0, z^0 \bar{z}^1; z^2 \bar{z}^0, z^1 \bar{z}^1, z^0 \bar{z}^2; \dots; z^n \bar{z}^0, z^{n-1} \bar{z}^1, \dots, z^0 \bar{z}^n; \dots, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Как и ранее, предполагается, что система (10) линейно независима и полна в L^2 (например, это будет так, когда носитель меры $d\rho(z)$ является замыканием ограниченного открытого множества из $\mathbb{C}$).

Результат ортогонализации удобно записать в виде следующей схемы, согласованной с последовательностью (10):

$$\begin{array}{ccccccc} P_{0;0}(z) \equiv 1; & P_{1;0}(z), & P_{2;0}(z), & \cdots & P_{n;0}(z), & \cdots \\ & P_{1;1}(z); & P_{2;1}(z), & \cdots & P_{n;1}(z), & \cdots \\ & & P_{2;2}(z); & \cdots & P_{n;2}(z), & \cdots \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & P_{n;n}(z); & \cdots \end{array} \quad (11)$$

Тогда по определению каждый столбец в (11), взятый с комплексной чертой, образует вектор $P_n(z)$ согласно (8).

Роль произведения $f_n P_n(\lambda)$ в преобразовании Фурье (2) сейчас будет играть скалярное произведение:

$$(f_n, P_n(z))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0} \overline{P_{n;0}(z)} + f_{n;1} \overline{P_{n;1}(z)} + \cdots + f_{n;n} \overline{P_{n;n}(z)}, \quad f_n \in \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (12)$$

где $f_{n;\alpha}$ — координаты вектора f_n в соответствии с (4).

3. Спектральная теорема для нормального (ограниченного) оператора $\mathbf{J}$, порождаемого в пространстве $\mathbf{l}_2$ матрицей (5), сейчас будет выглядеть следующим образом [8].

Теорема 1. Пусть J — бесконечная блочная нормальная якобиева матрица (5), нормы всех элементов которой равномерно ограничены и для которой выполнено условие (7). Она порождает в пространстве $\mathbf{l}_2$ ограниченный нормальный оператор как замыкание по непрерывности отображения (6).

Преобразование Фурье по обобщенным собственным функциям оператора $\mathbf{J}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \\ \mapsto \widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^\infty (f_n, P_n(z))_{\mathcal{H}_n} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{\alpha=0}^n f_{n;\alpha} \overline{P_{n;\alpha}(z)} \in L^2(\mathbb{C}, d\rho(z)) =: L^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $d\rho(z)$ — спектральная мера оператора $\mathbf{J}$, являющаяся борелевской вероятностной мерой на $\mathbb{C}$ с компактным носителем. В формуле (13) $P(z) = (P_n(z))_{n=0}^\infty$ является обобщенным собственным вектором оператора $\mathbf{J}$, отвечающим $z \in \mathbb{C}$. Здесь $P_n(z) \in \mathcal{H}_n$ — векторнозначные полиномы от z и $\bar{z}$ указанного в (8) вида.

После замыкания по непрерывности отображение (13) становится унитарным оператором $\widehat{}$ между пространствами $\mathbf{l}_2$ и L^2 . Образом оператора $\mathbf{J}$ ($\mathbf{J}^*$) при этом отображении будет оператор умножения на z ($\bar{z}$) в пространстве L^2 . Равенство Парсеваля имеет вид

$$(f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{C}} \widehat{f}(z) \overline{\widehat{g}(z)} d\rho(z), \quad (\mathbf{J}f, g)_{\mathbf{l}_2} = \int_{\mathbb{C}} z \widehat{f}(z) \overline{\widehat{g}(z)} d\rho(z) \quad \forall f, g \in \mathbf{l}_2. \quad (14)$$

Полиномы $\overline{P_{n;\alpha}(z)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, \dots, n$, и $P_{0;0}(z) \equiv 1$ образуют в пространстве L^2 полную ортонормированную систему в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} (\overline{P_{j;0}(z)} f_{j;0} + \dots + \overline{P_{j;j}(z)} f_{j;j}) (P_{k;0}(z) \overline{g_{k;0}} + \dots + P_{k;k}(z) \overline{g_{k;k}}) d\rho(z) \\ = \delta_{j,k} (f_j, g_k)_{\mathcal{H}_j} \quad \forall f_j \in \mathcal{H}_j, g_k \in \mathcal{H}_k, j, k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Матрица $J = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, $a_{j,k} = (a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, восстанавливается по формуле

$$a_{j,k;\alpha,\beta} = (J \delta_{k;\beta}, \delta_{j;\alpha})_{l_2} = \int_{\mathbb{C}} z \overline{P_{k;\beta}(z)} P_{j;\alpha}(z) d\rho(z). \quad (16)$$

Таким образом, прямая спектральная задача для оператора $\mathbf{J}$ состоит в нахождении его спектральной меры $d\rho(z)$ и обобщенных собственных векторов $P(z) = (P_n(z))_{n=0}^{\infty}$, $z \in \mathbb{C}$, которые ищутся как решения уравнений (9) указанного в (8) вида.

Обратная спектральная задача состоит в нахождении оператора $\mathbf{J}$, т. е. матрицы (5), удовлетворяющей условиям (7), по заданной спектральной мере $d\rho(z)$ в $\mathbb{C}$. Для ограниченного нормального оператора $\mathbf{J}$ она формулируется следующим образом [8]:

Теорема 2. Пусть $d\rho(z)$ — заданная борелевская вероятностная мера на $\mathbb{C}$ с компактным носителем, для которой система функций (10) линейно независима и полна в пространстве $L^2(\mathbb{C}, d\rho(z))$ (например, пусть носитель этой меры содержит открытую в $\mathbb{C}$ область или расположен на одномерном многообразии из $\mathbb{C}$ и не сводится к конечному множеству точек). Тогда мера $d\rho(z)$ обязательно является спектральной для некоторого ограниченного нормального оператора $\mathbf{J}$, порожденного блочной якобиевой нормальной матрицей J вида (5), удовлетворяющей условиям (7).

Элементы этой матрицы восстанавливаются по формуле (16), где полиномы $P_{n;\alpha}(z)$, $\alpha = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$, строятся по системе (10) описанной выше классической процедурой ортогонализации по Шмидту.

Если исходная мера $d\rho(z)$ была спектральной для некоторого оператора $\mathbf{J}$, порожденного блочной якобиевой нормальной матрицей J с равномерно ограниченными нормами элементов, то восстановленная таким образом по $d\rho(z)$ матрица будет совпадать с J .

§2. Уравнение Лакса для блочной якобиевой нормальной матрицы

1. Пусть J — блочная матрица вида (5), не обязательно нормальная. Предположим, что ее элементы непрерывно дифференцируемым образом зависят от $t \in [0, T]$ ($T \leq \infty$): $J = J(t)$. Рассмотрим произвольную бесконечномерную матрицу $A = (\alpha_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, $\alpha_{j,k}: \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_j$. Пусть ее матричные элементы $\alpha_{j,k}$ зависят от того же t непрерывно: $\alpha_{j,k} = \alpha_{j,k}(t)$.

Рассмотрим уравнение Лакса с коммутатором $[\cdot, \cdot]$:

$$\left(\frac{dJ}{dt} \right) (t) =: \dot{J}(t) = [J(t), A(t)] := J(t)A(t) - A(t)J(t), \quad t \in [0, T]. \quad (17)$$

Здесь произведение JA блочных матриц $J = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ и $A = (\alpha_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, $a_{j,k}, \alpha_{j,k}: \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_j$, определено обычным образом: (j, k) -й элемент $(JA)_{j,k}$ произведения подсчитывается по формуле

$$(JA)_{j,k} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{j,l} \alpha_{l,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}_0. \quad (18)$$

У нас J всегда будет блочной якобиевой матрицей; поэтому в (18) вместо ряда стоит конечная сумма (максимум трех слагаемых).

Если в равенстве (17) матрицу $A(t)$ считать фиксированной матрицей коэффициентов, то его можно воспринимать как линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной $J(t)$, $t \in [0, T]$. Однако если элементы $\alpha_{j,k}(t)$ матрицы $A(t)$ зависят каким-либо заданным способом от элементов $a_{j,k}(t)$ матрицы $J(t)$ (например, $\alpha_{j,k}(t) = a_{j,k}(t)$ для некоторых j, k), то равенство (17) превращается в некоторую систему дифференциальных уравнений первого порядка по t с нелинейной правой частью. Хорошо известно ([2], [3]), что система Тоды образуется именно таким образом, с использованием в качестве $J(t)$ обычной самосопряженной якобиевой матрицы.

В этой статье будут приведены некоторые примеры таких систем и дан способ их интегрирования, основанный на спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц.

В дальнейшем существенную роль играет характер спектра нормального оператора $J(t)$: он расположен на одномерной кривой из $\mathbb{C}$ или заполняет некоторый компакт из $\mathbb{C}$, содержащий открытую область. Первому случаю посвящены §3 и §4, второму посвящен §5.

2. Выпишем уравнение Лакса (17) в форме уравнения для элементов матриц в случае, когда $A(t)$ имеет блочную якобиеву структуру, подобную структуре матрицы (5) ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$A(t) = \begin{pmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_0 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha_n: \mathcal{H}_n &\rightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ \beta_n: \mathcal{H}_n &\rightarrow \mathcal{H}_n, \\ \gamma_n: \mathcal{H}_{n+1} &\rightarrow \mathcal{H}_n. \end{aligned} \quad (19)$$

Мы сейчас и в дальнейшем, как правило, не указываем явно зависимость элементов матрицы (19) от $t \in [0, T]$. То же самое относится и к матрице $J(t)$: она будет записываться в виде (5). Сопряженная матрица $A^+(t)$ строится по тому же правилу, что и $J^+(t)$ (см. §1, разд. 2).

Произведение двух трехдиагональных матриц будет пятидиагональной матрицей. Для подсчета коммутатора $[J(t), A(t)]$ (также пятидиагональной матрицы) отметим следующие формулы (в дальнейшем всюду элемент с отрицательным индексом считается равным нулю): для любого $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} (JA)_{n-2,n} &= c_{n-2} \gamma_{n-1}, \\ (JA)_{n-1,n} &= b_{n-1} \gamma_{n-1} + c_{n-1} \beta_n, \\ (JA)_{n,n} &= a_{n-1} \gamma_{n-1} + b_n \beta_n + c_n \alpha_n, \\ (JA)_{n+1,n} &= a_n \beta_n + b_{n+1} \alpha_n, \\ (JA)_{n+2,n} &= a_{n+1} \alpha_n. \end{aligned} \quad (20)$$

Для AJ выполняются аналогичные формулы с заменой a_j, b_j, c_j на $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ соответственно и, наоборот, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ на a_j, b_j, c_j .

Сравнивая элементы в левой и правой частях уравнения (17) и пользуясь формулами (20), получим уравнение Лакса в «координатной» форме: для любого $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} 0 &= c_n \gamma_{n+1} - \gamma_n c_{n+1}, \\ \dot{c}_n &= b_n \gamma_n + c_n \beta_{n+1} - \beta_n c_n - \gamma_n b_{n+1}, \\ \dot{b}_n &= a_{n-1} \gamma_{n-1} + b_n \beta_n + c_n \alpha_n - \alpha_{n-1} c_{n-1} - \beta_n b_n - \gamma_n a_n, \\ \dot{a}_n &= a_n \beta_n + b_{n+1} \alpha_n - \alpha_n b_n - \beta_{n+1} a_n, \\ 0 &= a_{n+1} \alpha_n - \alpha_{n+1} a_n. \end{aligned} \quad (21)$$

Нормы элементов матрицы (19) будем также считать равномерно ограниченными по $n \in \mathbb{N}_0$ и $t \in [0, T]$. Поэтому она порождает в $\mathbf{l}_2$ ограниченный оператор, для которого мы сохраним обозначение $A(t)$. Оператор $A(t)$ будет слабо непрерывным по $t \in [0, T]$.

§3. Случай одномерного спектра блочной нормальной якобиевой матрицы

1. Пусть $J(t)$, $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$, — блочная нормальная матрица с непрерывно дифференцируемыми по t коэффициентами. Нормы ее элементов предполагаются равномерно ограниченными по $j, k \in \mathbb{N}_0$ и $t \in [0, T]$. Таким образом, матрица $J(t)$ порождает в пространстве $\mathbf{l}_2$ ограниченный нормальный оператор $\mathbf{J}(t)$ с равномерно ограниченной по $t \in [0, T]$ нормой. Он будет слабо непрерывно дифференцируемым.

Предположим, что спектр оператора $\mathbf{J}(t)$ (содержащий z и $\bar{z}$ одновременно) для любого t расположен на конечной кривой S из $\mathbb{C}$. Мы будем сейчас рассматривать общий случай, когда функции (10), суженные на S , остаются линейно независимыми. Разумеется, условие линейной независимости выполняется не всегда (см. §4).

Будем считать, что кривая S является непрерывным образом фиксированного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $S = \{F(s) \in \mathbb{C} : s \in [a, b]\}$, где F — некоторая непрерывная комплекснозначная функция на $[a, b]$. При этом предполагается, что S не имеет петель, т.е. ее дополнение в $\mathbb{C}$ односвязно. С другой стороны, результаты сохраняются и для случая, когда S гомотопна окружности.

В дальнейшем существенную роль будет играть функция Вейля оператора $\mathbf{J}(t)$

$$m(z; t) = \int_S \frac{d\rho(\zeta; t)}{\zeta - z}, \quad (22)$$

определенная для всех регулярных точек z оператора $\mathbf{J}(t)$ и тем более для всех $z \in \mathbb{C} \setminus S$. При фиксированном $t \in [0, T]$ функция $m(z; t)$, $z \in \mathbb{C} \setminus S$, однозначно определяет спектральную вероятностную меру $d\rho(\zeta; t)$ (см., например, [40], [41], а также замечания 1, 2 в §5).

Пусть $R_z(t)$ — резольвента оператора $\mathbf{J}(t)$, $t \in [0, T]$, являющаяся ограниченным оператором в пространстве $\mathbf{l}_2$. Как всякий ограниченный оператор в $\mathbf{l}_2$,

она изображается операторной матрицей $(r_{j,k}(z;t))_{j,k=0}^{\infty}$:

$$(R_z(t)f)_j = \sum_{k=0}^{\infty} r_{j,k}(z;t)f_k, \quad r_{j,k}(z,t): \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_j, \quad (23)$$

$$(r_{j,k}(z;t))_{\alpha,\beta} = (r_{j,k}(z;t)\delta_{k;\beta}, \delta_{j;\alpha})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$$

для любого $f \in \mathbf{I}_2$. Здесь $\delta_{n;\alpha}$, $\alpha = 0, \dots, n$, — ортонормированный стандартный базис в пространстве $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$ (см. §1, разд. 2).

Нам понадобятся начальные элементы этой матрицы, а именно

$$r_{0,0}(z;t) = (R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} = \int_S \frac{d\rho(\zeta;t)}{\zeta - z} = m(z;t),$$

$$r_{1,0}(z;t) = \begin{pmatrix} (R_z(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{I}_2} \\ (R_z(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{I}_2} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$r_{0,1}(z;t) = ((R_z(t)\delta_{1;0}, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} \quad (R_z(t)\delta_{1;1}, \delta_0)_{\mathbf{I}_2}).$$

Дифференцируемость по t элементов матрицы $J(t)$ вызывает слабую дифференцируемость оператора $\mathbf{J}(t)$ и его резольвенты $R_z(t)$, а значит, и функции $m(z;t)$. Кроме того, как легко проверить, для $z \in \mathbb{C} \setminus S$

$$(\mathbf{J}(t) - z \text{Id}) \cdot = [\mathbf{J}(t) - z \text{Id}, A(t)],$$

$$\dot{R}_z(t) = -R_z(t)(\mathbf{J}(t) - z \text{Id}) \cdot R_z(t) = [R_z(t), A(t)], \quad t \in [0, T]. \quad (25)$$

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$\dot{m}(z;t) = \alpha_{0;0,0}(R_z(t)\delta_{1;0}, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} + \alpha_{0;1,0}(R_z(t)\delta_{1;1}, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} - \gamma_{0;0,0}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{I}_2} - \gamma_{0;0,1}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{I}_2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad t \in [0, T]. \quad (26)$$

Напомним, что оператор $D: \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_n$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, задается в нашем стандартном базисе матрицей $(d_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,m}$, где $d_{\alpha,\beta} = (D\delta_{m;\beta}, \delta_{n;\alpha})_{\mathcal{H}_n}$.

Доказательство. На основании формул (25), (24) и (19) имеем

$$\begin{aligned} \dot{m}(z;t) &= (R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} = (\dot{R}_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} = ((R_z(t)A(t) - A(t)R_z(t))\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} \\ &= (R_z(t)A(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} - (A(t)R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} \\ &= (\delta_0, A^*(t)R_z^*(t)\delta_0)_{\mathbf{I}_2} - (A(t)R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} \\ &= \overline{(A^*(t)R_z^*(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2}} - (A(t)R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} \\ &= \overline{(A^*(t)[(R_z^*(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2}, (R_z^*(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{I}_2}, (R_z^*(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{I}_2}, \dots], \delta_0)_{\mathbf{I}_2}} \\ &\quad - (A(t)[(R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2}, (R_z(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{I}_2}, (R_z(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{I}_2}, \dots], \delta_0)_{\mathbf{I}_2} \\ &= \beta_0(R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} + \alpha_{0;0,0}(R_z(t)\delta_{1;0}, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} + \alpha_{0;1,0}(R_z(t)\delta_{1;1}, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} \\ &\quad - \beta_0(R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{I}_2} - \gamma_{0;0,0}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{I}_2} - \gamma_{0;0,1}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{I}_2}. \end{aligned} \quad (27)$$

После сокращения 1-го и 4-го слагаемых в (27) мы придем к (26). $\square$

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$c_{0;0,0}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{I}_2} + c_{0;0,1}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{I}_2} = (z - b_0)m(z;t) + 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad t \in [0, T]. \quad (28)$$

Доказательство. Из равенства $(J(t) - z \text{Id})R_z(t) = \text{Id}$ следует, что

$$(J(t)R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} = zm(z; t) + 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad t \in [0, T].$$

Но, согласно (5),

$$\begin{aligned} zm(z; t) + 1 &= (J(t)R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= (J(t)[(R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2}, (R_z(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{l}_2}, (R_z(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{l}_2}, \dots], \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= b_0m(z; t) + c_{0;0,0}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{l}_2} + c_{0;0,1}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{l}_2}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть рассматриваемая блочная нормальная матрица $J(t)$ удовлетворяет уравнению Лакса (21) с матрицей $A(t)$ вида (19), у которой

$$\alpha_0(t) = 0 \quad \text{и} \quad \gamma_0(t) = -c_0(t), \quad t \in [0, T]. \quad (29)$$

Тогда функция Вейля $m(z; t)$, построенная по нормальному оператору $J(t)$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{m}(z; t) = (z - b_0(t))m(z; t) + 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad t \in [0, T]. \quad (30)$$

Спектральная мера этого оператора имеет вид

$$d\rho(\zeta; t) = C(t)e^{\zeta t}d\rho(\zeta; 0), \quad \zeta \in S, \quad t \in [0, T]. \quad (31)$$

Здесь $C(t) > 0$ — множитель, нормирующий меру (31) к вероятностной, т. е. должно быть $\rho(S; t) = 1$ для любого $t \in [0, T]$.

Отметим, что равенство (31) влечет за собой изоспектральность операторной функции $J(t)$, $t \in [0, T]$: спектр оператора $J(t)$ не зависит от t .

Доказательство. Равенства (29), (26) и (28) дают

$$\begin{aligned} \dot{m}(z; t) &= c_{0;0,0}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;0})_{\mathbf{l}_2} + c_{0;0,1}(R_z(t)\delta_0, \delta_{1;1})_{\mathbf{l}_2} \\ &= (z - b_0(t))m(z; t) + 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Установим эквивалентность соотношений (30) и (31). Дифференцируемость по t функции $m(z; t)$ эквивалентна дифференцируемости функции $J(t) - z \text{Id}$ и дифференцируемости меры $d\rho(\zeta; t)$ (т. е. функции $\rho(\Delta; t)$ для любого борелевского множества $\Delta \subset S$) (см., например, [40], [41], а также замечания 1, 2 в §5). Поэтому, согласно условию (29) и тому, что спектральная мера является вероятностной, можно написать

$$\begin{aligned} \int_S \frac{d\rho(\zeta; t)}{\zeta - z} &= \frac{d}{dt} \left(\int_S \frac{d\rho(\zeta; t)}{\zeta - z} \right) = \dot{m}(z; t) = (z - b_0(t))m(z; t) + 1 \\ &= \int_S \frac{(z - b_0(t)) + (\zeta - z)}{\zeta - z} d\rho(\zeta; t) \\ &= \int_S \frac{\zeta - b_0(t)}{\zeta - z} d\rho(\zeta; t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\dot{d\rho}(\zeta; t) = (\zeta - b_0(t))d\rho(\zeta; t)$. Интегрируя это уравнение относительно t , получаем (31). $\square$

3. Фиксируя теперь в уравнении Лакса (21) матрицу $A(t)$ тем или иным образом (ее элементы зависят от элементов матрицы $J(t)$), но с соблюдением условий (29), мы получим дифференциальное уравнение по t относительно

$a_n(t)$, $b_n(t)$ и $c_n(t)$ первого порядка с нелинейной правой частью. Если это уравнение имеет решение, для которого матрица $J(t)$ вида (5) будет нормальной, то соответствующая спектральная мера задается формулой (31).

Мы ограничимся здесь наиболее простым подобным выбором $A(t)$. А именно, положим

$$\alpha_n(t) = 0, \quad \beta_n(t) = -\frac{1}{2}b_n(t), \quad \gamma_n(t) = -c_n(t), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [0, T]. \quad (32)$$

Условие (29) будет выполнено. Рассмотрим уравнение Лакса (21). Первое и последнее уравнения, очевидно, выполняются. Остальные принимают вид известной системы типа Полякова

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= \frac{1}{2}(b_{n+1}a_n - a_nb_n), & a_n: \mathcal{H}_n &\rightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ \dot{b}_n &= c_na_n - a_{n-1}c_{n-1}, & b_n: \mathcal{H}_n &\rightarrow \mathcal{H}_n, \\ \dot{c}_n &= \frac{1}{2}(c_nb_{n+1} - b_nc_n), & c_n: \mathcal{H}_{n+1} &\rightarrow \mathcal{H}_n. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$, $a_{-1} = c_{-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Покажем, что задачу Коши для системы (33) можно решить подобно случаю цепочки Тоды, но с привлечением спектральной теории блочных нормальных якобиевых матриц вместо обычных якобиевых.

Теорема 4. Рассмотрим систему (33), где $a_n(t)$, $b_n(t)$ и $c_n(t)$, $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}_0$, — равномерно по n и t ограниченные по норме и непрерывно дифференцируемые по t матричные функции, причем $a_n(t)$, $c_n(t)$ имеют структуру (7). Поставим для нее задачу Коши: по начальным данным $(a_n(0))_{n=0}^\infty$, $(b_n(0))_{n=0}^\infty$, $(c_n(0))_{n=0}^\infty$ найти решение системы (33) на $[0, T]$.

Предположим, что блочная якобиева матрица $J(0)$, построенная в соответствии с формулой (5) по начальным данным, порождает нормальный ограниченный оператор $\mathbf{J}(0)$ в пространстве $\mathbf{l}_2$, спектр которого (не сводящийся к конечному множеству) расположен на непрерывной кривой S в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащей вместе с точкой z точку $\bar{z}$ и такой, что на ней функции (10) линейно независимы.

Тогда решение $(a_n(t))_{n=0}^\infty$, $(b_n(t))_{n=0}^\infty$, $(c_n(t))_{n=0}^\infty$, $t \in [0, T]$, этой задачи существует и образует, в соответствии с (5), якобиеву блочную нормальную матрицу $J(t)$. Спектральная мера $d\rho(\zeta; t)$ соответствующего оператора $\mathbf{J}(t)$ сосредоточена на S и задается формулой (31), где $d\rho(\zeta; 0)$ — спектральная мера оператора $\mathbf{J}(0)$.

Само решение восстанавливается по мере $d\rho(\zeta; t)$, согласно теореме 2, при помощи формулы (16).

Доказательство. По вероятностной мере $d\rho(\zeta; t)$ при помощи процедуры ортогонализации системы (10) строится система (11) ортонормированных полиномов от z и $\bar{z}$, зависящих от времени $t \in [0, T]$. При помощи (16) находятся элементы $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ якобиевой матрицы $J(t)$. Затем проверяется, что они удовлетворяют системе (33).

Так, проверим, что удовлетворяется первое из уравнений (33). Остальные два проверяются аналогично. Прежде всего, включим $C(t)$ из (31) в выражения для $P_{n;\alpha}(z)$ из (11): каждый столбец в (11) умножим на $(C(t))^{1/2}$. Тогда новые векторы (8) по-прежнему будут компонентами обобщенного собственного

вектора $P(z)$ и уравнения (9) сохраняются. Формула для a_n , согласно (16) и (31), приобретает вид

$$a_{n;\alpha,\beta}(t) = a_{n+1,n;\alpha,\beta}(t) = \int_S \zeta \overline{P_{n;\beta}(\zeta;t)} P_{n+1;\alpha}(\zeta;t) e^{\zeta t} d\rho(\zeta;0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (34)$$

$$\alpha = 0, \dots, n+1, \quad \beta = 0, \dots, n$$

(мы указываем зависимость полиномов от t : ортогонализация при построении системы (11) ведется относительно меры $d\rho(\zeta;t) = e^{\zeta t} d\rho(\zeta;0)$ для каждого $t \in [0, T]$).

Дифференцируя (34) по t под знаком интеграла, получим

$$\begin{aligned} \dot{a}_{n;\alpha,\beta}(t) = \int_S (\zeta \overline{\dot{P}_{n;\beta}(\zeta;t)} P_{n+1;\alpha}(\zeta;t) + \zeta \overline{P_{n;\beta}(\zeta;t)} \dot{P}_{n+1;\alpha}(\zeta;t) \\ + \zeta^2 \overline{P_{n;\beta}(\zeta;t)} P_{n+1;\alpha}(\zeta;t)) e^{\zeta t} d\rho(\zeta;0). \end{aligned} \quad (35)$$

Подсчитаем вклад в $\dot{a}_n$ третьего слагаемого в (35). Для этого воспользуемся первым и вторым из равенств (9) (при $z = \zeta$ и $\bar{z} = \bar{\zeta}$), которым удовлетворяет вектор $\overline{P_{n;\cdot}(\zeta;t)}$. В результате вместо этого слагаемого получим сумму девяти слагаемых, содержащих произведения $\overline{P_{j;\cdot}(\zeta;t)} P_{k;\cdot}(\zeta;t)$ с операторными коэффициентами — элементами матриц $J(t)$ и $J^+(t)$. Учитывая ортономированность системы (11), после несложных подсчетов получим, что искомый вклад равен $(a_n b_n)_{\alpha,\beta} + (b_{n+1} a_n)_{\alpha,\beta}$.

Найдем вклад первого слагаемого в (35). Для этого продифференцируем по t второе из равенств (9) (при $\bar{z} = \bar{\zeta}$). В результате получим выражение для $\zeta \overline{\dot{P}_{n;\beta}(\zeta;t)}$ в виде шести слагаемых, состоящих из $\overline{P_{j;\cdot}(\zeta;t)}$, $j = n-1, n, n+1$, и их первых производных по t с операторными коэффициентами — элементами матриц $J^+(t)$ и $\dot{J}^+(t)$. Вклад этого слагаемого равен $\dot{a}_{n;\alpha,\beta} - \frac{1}{2}(b_{n+1} a_n)_{\alpha,\beta}$.

При этом нужно воспользоваться ортонормированностью системы (11) и равенством

$$\int_S \overline{\dot{P}_{n+1;\beta}(\zeta;t)} P_{n+1;\alpha}(\zeta;t) e^{\zeta t} d\rho(\zeta;0) = -\frac{1}{2} b_{n+1;\alpha,\beta}, \quad (36)$$

которое получается дифференцированием по t соотношения

$$\int_S \overline{P_{n+1;\beta}(\zeta;t)} P_{n+1;\alpha}(\zeta;t) e^{\zeta t} d\rho(\zeta;0) = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, \dots, n+1. \quad (37)$$

Аналогично подсчитывается вклад второго слагаемого в (35). При этом нужно продифференцировать по t первое из равенств (9) при $z = \zeta$ с заменой n на $n+1$. Сейчас опять используется равенство (36) при n вместо $n+1$ и аналогичное ему соотношение для интеграла от $\overline{P_{n;\beta}(\zeta;t)} \dot{P}_{n+1;\alpha}(\zeta;t)$ (он равен $-a_{n;\alpha,\beta}$), которое получается дифференцированием (37) с $n;\beta$ вместо $n+1;\beta$. Вклад второго слагаемого равен $\dot{a}_{n;\alpha,\beta} - \frac{1}{2}(a_n b_n)_{\alpha,\beta} - (b_{n+1} a_n)_{\alpha,\beta}$.

В конечном счете (35) дает

$$\dot{a}_n = (a_n b_n + b_{n+1} a_n) + \left(\dot{a}_n - \frac{1}{2} b_{n+1} a_n \right) + \left(\dot{a}_n - \frac{1}{2} a_n b_n - b_{n+1} a_n \right),$$

т. е. первое из уравнений (33). □

§4. Случай унитарной блочной якобиевой матрицы

1. В случае когда J — унитарная блочная якобиева матрица в пространстве $\mathbf{l}_2$, кривая S превращается в единичную окружность $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и функции (10) становятся линейно зависимыми. Согласно [7], [8], соответствующий матрице J оператор следует рассматривать не во всем пространстве $\mathbf{l}_2$, а в его подпространстве $\mathbf{l}_{2,u}$, имеющем вид

$$\mathbf{l}_{2,u} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots, \quad \text{где } \mathcal{H}_0 = \mathbb{C}, \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \dots = \mathbb{C}^2. \quad (38)$$

Блоки унитарной якобиевой матрицы (5), действующей в $\mathbf{l}_{2,u}$, имеют вид

$$a_0 = \begin{pmatrix} a_{0;0,0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = (b_{0;0,0}), \quad c_0 = \begin{pmatrix} c_{0;0,0} & c_{0;0,1} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$a_n = \begin{pmatrix} a_{n;0,0} & a_{n;0,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_n = \begin{pmatrix} b_{n;0,0} & b_{n;0,1} \\ b_{n;1,0} & b_{n;1,1} \end{pmatrix}, \quad c_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$a_{0;0,0}, c_{0;0,1}, a_{n;0,0}, c_{n;1,1} > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Элементы этих блоков зависят определенным образом от последовательности комплексных чисел $(v_n)_{n=0}^\infty$, $|v_n| < 1$, — коэффициентов Верблунского, обеспечивающих унитарность оператора J в $\mathbf{l}_{2,u}$ (см. [36]–[38]).

Сейчас вместо последовательности (10) нужно ортогонализировать ее часть

$$z^0 \bar{z}^0 = 1; \quad z^1 \bar{z}^0 = z^1, \quad z^0 \bar{z}^1 = \bar{z}^1; \quad \dots; \quad z^n \bar{z}^0 = z^n, \quad z^0 \bar{z}^n = \bar{z}^n; \quad \dots, \quad z \in \mathbb{T}. \quad (41)$$

В результате получим систему ортогональных полиномов (11), в которой в каждом столбце, начиная со второго, будут фигурировать только два полинома; их удобно обозначать через $P_{n;0}(z)$, $P_{n;1}(z)$, $n \in \mathbb{N}$. Имеет место соответствующая модификация теорем 1, 2 (см. подробнее [7], [8]).

Рассмотрим уравнение Лакса (17), в котором $J(t)$ и $A(t)$, $t \in [0, T]$, — блочные якобиевы матрицы вида (5) и (19), но действуют они не в пространстве $\mathbf{l}_2$, а в его подпространстве $\mathbf{l}_{2,u}$ вида (38). Таким образом, все матрицы a_n , b_n , c_n , α_n , β_n , γ_n при $n \in \mathbb{N}$ являются квадратными матрицами размера 2×2 , зависящими от t . При $n = 0$ матрицы a_0 , b_0 , c_0 имеют вид (39), а α_0 , β_0 , γ_0 — произвольные матрицы соответствующей размерности. Предполагается, что a_n , c_n имеют структуру (40) и матрица $J(t)$ унитарна при каждом t .

Легко понять, что уравнение Лакса и сейчас запишется в той же координатной форме (21), но с операторами, действующими между пространствами (38). Результаты §3, разд. 1, не изменятся, только роль S будет играть единичная окружность $S = \mathbb{T}$. Леммы 1 и 2 также сохраняются в прежнем виде: в их формулировках и доказательствах фигурируют только элементы матриц α_0 , β_0 , γ_0 , b_0 , c_0 и характер разложения векторов $R_z(t)\delta_0$ и $R_z^*(t)\delta_0$ по базисным векторам $\delta_0; \delta_{1;0}, \delta_{1;1}; \dots$, а они такие же, как и в §3. Таким образом, справедлив и аналог теоремы 3: условия (29), уравнение (30) и представление (31) для спектральной меры будут прежними.

Теорема 4 также сохраняется. Так, нужно рассмотреть систему (33), в которой пространства $\mathcal{H}_n$ имеют вид не (4), а (38), и начальная матрица $J(0)$ является унитарной в $\mathbf{l}_{2,u}$, а не произвольной нормальной в $\mathbf{l}_2$ матрицей. Восстановление решения $(a_n(t))_{n=0}^\infty$, $(b_n(t))_{n=0}^\infty$, $(c_n(t))_{n=0}^\infty$ по начальным данным, образующим $J(0)$, т. е. по $(a_n(0))_{n=0}^\infty$, $(b_n(0))_{n=0}^\infty$, $(c_n(0))_{n=0}^\infty$, производится прежней процедурой: по начальной спектральной мере $d\rho(\zeta; 0)$, $\zeta \in \mathbb{T}$, построим меру

$d\rho(\zeta; t)$, $\zeta \in \mathbb{T}$, $t \in [0, T]$, согласно формуле (31), затем строим соответствующие ортогональные полиномы по этой мере $d\rho(\zeta; t)$ и применяем формулу (16). Доказательство сформулированного результата — повторение доказательства теоремы 4.

В связи с конструкциями этого параграфа важную роль играют условия, обеспечивающие унитарность в пространстве $\mathbf{l}_{2,u}$ блочной якобиевой матрицы J вида (5) с блоками (39), (40). Здесь имеется следующий красивый результат (см. [38], [36], [37]). По заданной произвольной последовательности комплексных чисел $(v_n)_{n=0}^\infty$, $|v_n| < 1$ (коэффициентам Верблунского), строим последовательность 2×2 -матриц

$$\Theta(v_n) = \begin{pmatrix} \bar{v}_n & (1 - |v_n|^2)^{1/2} \\ (1 - |v_n|^2)^{1/2} & -v_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

и их ортогональные суммы в обычном пространстве ℓ_2 :

$$L = \Theta(v_0) \oplus \Theta(v_2) \oplus \Theta(v_4) \oplus \cdots \oplus \Theta(v_{2n}) \oplus \cdots, \\ M = \mathbf{1} \oplus \Theta(v_1) \oplus \Theta(v_3) \oplus \Theta(v_5) \oplus \cdots \oplus \Theta(v_{2n+1}) \oplus \cdots, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

(здесь $\mathbf{1}$ — единичный оператор в одномерном пространстве $\mathbb{C}$). Тогда матрица J вида (5) с блоками (39), (40), понимаемая как обычная бесконечная матрица в пространстве ℓ_2 , будет унитарной тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$J = LM. \quad (42)$$

Отметим, что результаты, подобные описанным выше в этом параграфе, были ранее получены в [39]. В этой работе рассматривались унитарные зависящие от времени пятидиагональные матрицы $J(t)$ структуры (5), (39), (40), (42) в обычном пространстве ℓ_2 . Интегрировалось уравнение Лакса (17) с отличной от (32) матрицей $A(t)$. Оно сейчас совпадает с потоком Шура относительно переменных $(v_n(t))_{n=0}^\infty$ вместо $(a_n(t))_{n=0}^\infty$, $(b_n(t))_{n=0}^\infty$, $(c_n(t))_{n=0}^\infty$.

2. В заключение этого параграфа отметим, что легко привести примеры кривых S , отличных от $\mathbb{T}$ и от $[a, b] \subset \mathbb{R}$, содержащих $z \in \mathbb{C}$ и $\bar{z}$ одновременно, для которых функции (10) будут линейно зависимы. Такими будут, например, «половина $\mathbb{T}$ », т.е. $S = \{z \in \mathbb{T} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$, вертикальный отрезок $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$ (в последнем случае в каждой группе $z^n \bar{z}^0, z^{n-1} \bar{z}^1, \dots, z^0 \bar{z}^n$ при $n \geq 2$ будут встречаться одинаковые функции на S), и т.п.

§5. Случай двумерного спектра блочной нормальной якобиевой матрицы

1. Пусть $J(t)$, $t \in [0, T]$, — такая же, как и в §3, блочная нормальная зависящая от времени t якобиева матрица, лишь с тем отличием, что ее спектр для любого t является компактным множеством из $\mathbb{C}$, содержащим открытые подмножества. Пусть S — замыкание ограниченной области из $\mathbb{C}$, содержащей спектр оператора $J(t)$ для любого t , инвариантное относительно перехода $z \mapsto \bar{z}$. Можно считать, что спектральная мера $d\rho(\zeta; t)$ — борелевская вероятностная мера на S .

Сейчас построения будут несколько отличаться от проведенных в §§ 3, 4. Роль функции Вейля $m(z; t) = (R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2}$ (см. (22)) будет играть функция

$$\begin{aligned} M(z; t) &:= (R_z(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = (R_z^*(t)R_z(t)\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= \int_S \frac{d\rho(\zeta; t)}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (43)$$

Справедлива следующая общая теорема.

Теорема 5. Пусть J — фиксированная блочная якобиева матрица, порождающая в $\mathbf{l}_2$ нормальный ограниченный оператор $\mathbf{J}$. Пусть R_z и S — его резольвента и спектр. Тогда функция $M(z) := (R_z\delta_0, R_z\delta_0)_{\mathbf{l}_2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus S$, однозначно определяет спектральную меру $d\rho(\zeta)$, $\zeta \in S$, этого оператора.

Доказательство. Функция $M(z)$ на основании спектральной теоремы допускает представление

$$M(z) = (R_z\delta_0, R_z\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = \int_S \frac{d\rho(\zeta)}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}. \quad (44)$$

Так как спектр S расположен на круге $|z| \leq \|\mathbf{J}\|$, то при $|z| > \|\mathbf{J}\|$ функцию (44) можно записать в виде

$$\begin{aligned} M(z) &= \int_S \frac{d\rho(\zeta)}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \frac{1}{|z|^2} \int_S \frac{d\rho(\zeta)}{(1 - \zeta z^{-1})(1 - \bar{\zeta} \bar{z}^{-1})} \\ &= \frac{1}{|z|^2} \int_S \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right)^n d\rho(\zeta) \\ &= \frac{1}{|z|^2} \int_S \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{z^m \bar{z}^n} \zeta^m \bar{\zeta}^n d\rho(\zeta) = \frac{1}{|z|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{s_{m,n}}{z^m \bar{z}^n}, \quad (45) \\ s_{m,n} &= \int_S \zeta^m \bar{\zeta}^n d\rho(\zeta), \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Из представления (45) функции $M(z)$ в виде ряда по $z^{-m}\bar{z}^{-n}$ при $|z| > \|\mathbf{J}\|$ и формулы Тейлора следует, что коэффициенты $s_{m,n}$ этого ряда по $M(z)$ восстанавливаются однозначно. Но эти коэффициенты являются (комплексными) моментами меры $d\rho(\zeta)$, допускающими оценку $|s_{m,n}| \leq \|\mathbf{J}\|^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. Из теории комплексной проблемы моментов (см., например, [8], [42]) вытекает, что в этом случае мера $d\rho(\zeta)$ по $(s_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$, а значит, и по $M(z)$ восстанавливается однозначно. $\square$

Таким образом, по функции (43) спектральная мера $d\rho(\zeta; t)$, $\zeta \in S$, при каждом $t \in [0, T]$ восстанавливается однозначно.

Сделаем два замечания в связи с теоремой 5 и ее доказательством.

Замечание 1. Пусть S — ограниченная кривая описанного в начале § 3, разд. 1, вида (без петель), $d\rho(\zeta)$ — борелевская вероятностная мера на ней, $m(z)$ — соответствующая функция Вейля

$$m(z) = \int_S \frac{d\rho(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S. \quad (46)$$

Утверждается, что $m(z)$ однозначно определяет меру $d\rho(\zeta)$.

В самом деле, по аналогии с доказательством теоремы 5 преобразуем (46) следующим образом. При $|z| \geq R$, где $R > 0$ достаточно большое,

$$m(z) = -\frac{1}{z} \int_S \frac{d\rho(\zeta)}{1 - \zeta z^{-1}} = -\frac{1}{z} \int_S \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z} \right)^n \right) d\rho(\zeta) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{z^n},$$

$$s_n = \int_S \zeta^n d\rho(\zeta), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Из этого разложения следует, что функция $m(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus S$, однозначно определяет моменты s_n и тем самым для каждого полинома $P(\zeta)$ от ζ с комплексными коэффициентами — интеграл $\int_S P(\zeta) d\rho(\zeta)$. Но такие полиномы плотны в пространстве всех непрерывных функций $f(\zeta)$ на S в равномерной метрике (см., например, [43, гл. 5, §4]). Отсюда следует, что любой такой интеграл $\int_S f(\zeta) d\rho(\zeta)$, а значит, и мера $d\rho(\zeta)$ по $m(z)$ определяются однозначно.

Замечание 2. Аналогичный приведенному в замечании 1 факт в случае, когда $S = \mathbb{T}$ — единичная окружность, доказывается иначе.

А именно, введем функцию Каратеодори

$$F(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\rho(\zeta), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}.$$

Она определяет меру $d\rho(\zeta)$ однозначно; см., например, [36, гл. 1, разд. 1.3] и [41]. Но $F(z) = 2m(z) + 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$.

Для деформации окружности нужно воспользоваться ее конформным отображением на $\mathbb{T}$.

2. Перейдем к рассмотрению уравнения Лакса (17) в случае, когда $J(t)$ имеет указанный выше (в разд. 1) вид, и выясним возможности его интегрирования.

Лемма 3. Для функции $M(z; t)$ вида (43) и оператора $A(t)$, порожденного матрицей (19), справедливо равенство

$$\begin{aligned} \dot{M}(z; t) &= (R_z(t)A(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_z(t)\delta_0, R_z(t)A(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &\quad - ((A(t) + A^+(t))R_z(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (47)$$

Доказательство. Используя (25), получим

$$\begin{aligned} \dot{M}(z; t) &= (R_z(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} = (\dot{R}_z(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_z(t)\delta_0, \dot{R}_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= (R_z(t)A(t)\delta_0 - A(t)R_z(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &\quad + (R_z(t)\delta_0, R_z(t)A(t)\delta_0 - A(t)R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= (R_z(t)A(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_z(t)\delta_0, R_z(t)A(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &\quad - ((A(t) + A^+(t))R_z(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2}. \end{aligned} \quad \square$$

Для задания оператора $A(t)$ напомним, что, согласно §1, разд. 2, в пространстве $\mathbf{l}_2$ ортонормированным базисом будет последовательность векторов

$$\delta_0 = \delta_{0;0}; \delta_{1;0}, \delta_{1;1}; \delta_{2;0}, \delta_{2;1}, \delta_{2;2}; \dots; \delta_{n;0}, \delta_{n;1}, \dots, \delta_{n;n}; \dots, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (48)$$

В этом базисе для любых $f, g \in \mathbf{l}_2$ справедливо разложение

$$(f, g)_{\mathbf{l}_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^n (f, \delta_{n;\alpha})_{\mathbf{l}_2} \overline{(g, \delta_{n;\alpha})_{\mathbf{l}_2}}. \quad (49)$$

Лемма 4. *Предположим, что у рассматриваемой матрицы $J(t)$ элемент $c_0(t)$ равен нулю, а $A(t)$ такова, что*

$$\gamma_n(t) = -\alpha_n^+(t), \quad n \in \mathbb{N}_0; \quad \alpha_0(t) = 0; \quad \beta_n(t) = \beta(t)\mathbf{1}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T]. \quad (50)$$

Здесь $\beta(t)$ — некоторая заданная функция из пространства $C([0, T])$, а $\mathbf{1}_n$ — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_n$.

Тогда функция $M(z; t)$ (см. (43)) удовлетворяет уравнению

$$\dot{M}(z; t) = 2 \operatorname{Re}(\beta_0(t) - \beta(t))(M(z; t) - m(z; t)\overline{m(z; t)}), \quad (51)$$

где $z \in \mathbb{C} \setminus S$, $t \in [0, T]$, $m(z; t)$ — функция Вейля (22) оператора $J(t)$.

Доказательство. Согласно (50), матрица $A(t) + A^+(t)$ является блочной диагональной матрицей с элементами

$$2 \operatorname{Re} \beta_0(t), \quad 2(\operatorname{Re} \beta(t))\mathbf{1}_1, \quad 2(\operatorname{Re} \beta(t))\mathbf{1}_2, \quad \dots$$

на диагонали, причем $A(t)\delta_0 = \beta_0(t)\delta_0$, $A^+(t)\delta_0 = \overline{\beta_0(t)}\delta_0$. Раскладывая $M(z; t) = (R_z(t)\delta_0, R_z(t)\delta_0)_{\mathbf{l}_2}$, согласно равенству (49), по базису (48) и пользуясь определением функции Вейля $m(z; t)$, на основании (47) получаем

$$\begin{aligned} \dot{M}(z; t) &= 2(\beta_0(t))(M(z; t) - (R_z\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \overline{(R_z\delta_0, \delta_0)_{\mathbf{l}_2}}) \\ &\quad - 2(\operatorname{Re} \beta(t)) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^n (R_z(t)\delta_0, \delta_{n;\alpha})_{\mathbf{l}_2} \overline{(R_z(t)\delta_0, \delta_{n;\alpha})_{\mathbf{l}_2}} \\ &= 2(\operatorname{Re}(\beta_0(t) - \beta(t)))(M(z; t) - m(z; t)\overline{m(z; t)}). \end{aligned} \quad \square$$

Из доказательства теоремы 3 следует, что вывод уравнения для функции Вейля сохраняется и в рассматриваемом сейчас случае неодномерного спектра оператора $J(t)$. Поэтому функция $m(z; t)$ из (51) удовлетворяет прежнему уравнению (30): условия леммы 4 обеспечивают выполнение условий (29) теоремы 3. Поэтому и сейчас справедлив факт, указанный в начале §3, разд. 3. Это приводит к следующему результату.

Теорема 6. *Рассмотрим систему нелинейных уравнений*

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= b_{n+1}c_n^+ - c_n^+b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \dot{a}_0 = (\beta_0 - \beta)a_0, \quad a_n: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \\ \dot{b}_n &= c_n a_n - a_{n-1}c_{n-1} + c_n c_n^+ - c_{n-1}^+ c_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n, \\ \dot{c}_n &= c_n b_{n+1} - b_n c_n, \quad a_{n+1}c_n^+ = c_{n+1}^+ a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_n: \mathcal{H}_{n+1} \rightarrow \mathcal{H}_n. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$, $a_{-1} = c_{-1} = 0$, $\beta_0, \beta \in C([0, T])$ заданы.

Пусть существует решение $(a_n(t))_{n=0}^{\infty}, (b_n(t))_{n=0}^{\infty}, (c_n(t))_{n=0}^{\infty}$ задачи Коши для этой системы, такое, что матрица (5) порождает нормальный ограниченный оператор $J(t)$ в пространстве $\mathbf{l}_2$, для которого $a_0 = c_0 = 0$. Тогда это решение восстанавливается при помощи формулы (16), в которой спектральная мера $d\rho(\zeta; t)$ находится по начальной спектральной мере $d\rho(\zeta; 0)$ следующей процедурой: 1) по $d\rho(\zeta; 0)$ находим функцию Вейля $m(z; 0)$, $z \in \mathbb{C} \setminus S$,

и затем решаем задачу Коши (30) с начальными данными $m(z; 0)$; 2) решаем задачу Коши для уравнения (51) с начальными данными $M(z; 0)$, которые находятся по $d\rho(\zeta; 0)$ согласно (44); 3) найденная функция $M(z; t)$, $z \in \mathbb{C} \setminus S$, $t \in [0, T]$, однозначно определяет меру $d\rho(\zeta; t)$ согласно теореме 5.

Доказательство. Рассмотрим матрицу (19), в которой

$$\begin{aligned} \alpha_n &= c_n^+, & \gamma_n &= -\alpha_n^+ = -c_n, & n &\in \mathbb{N}_0, & c_0 &= 0, \\ \beta_n &= \beta \mathbf{1}_n, & n &\in \mathbb{N}, & \beta, \beta_0 &\in C([0, T]). \end{aligned} \quad (53)$$

Соотношения (53) влекут за собой выполнение условий леммы 4, и поэтому функция $M(z; t)$ удовлетворяет уравнению (51). Уравнение (30) для $m(z; t)$ также будет выполняться, так как из условий доказываемой теоремы вытекают требования (29) (с $c_0 = 0$). Таким образом, осталось убедиться, что равенства (53) и $a_0 = 0$ приводят к тому, что система (21) преобразуется в систему (52). Это делается элементарно. $\square$

Отметим также, что и в рассматриваемом случае двумерного спектра можно доказать аналог теоремы 4 — построить решение задачи Коши для системы (52) по начальным данным, которые задаются посредством меры $d\rho(\zeta; 0)$. Доказательство подобного утверждения достаточно громоздко и будет приведено в другом месте.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Л. Б. Голинскому за стимулирующие беседы и И. М. Кричеву за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.
- [2] М. Кас, Р. van Moerbeke, *On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices*, Adv. Math., **16**:2 (1975), 160–169.
- [3] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math., **16**:2 (1975), 197–220.
- [4] Yu. M. Berezansky, *The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem*, Preprint 84.79 of Inst. of Math., Acad. Sci. Ukr., Kiev, 1984.
- [5] Ю. М. Березанский, *Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи*, Докл. АН СССР, **281**:1 (1985), 16–19.
- [6] Yu. M. Berezanski, *The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem*, Rep. Math. Phys., **24**:1 (1986), 21–47.
- [7] Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin, *The direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices*, Methods Funct. Anal. Topology, **11**:4 (2005), 327–345.
- [8] Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin, *The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices*, Methods Funct. Anal. Topology, **12**:1 (2006), 1–31.
- [9] М. Г. Крейн, *Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов*, Докл. АН СССР, **69**:2 (1949), 125–128.
- [10] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка*, Труды Моск. матем. об-ва, **5** (1956), 203–268.
- [11] В. Г. Тарнопольский, *Про самоспряженість різницьових операторів з операторними коефіцієнтами*, ДАН УРСР, **11** (1959), 1189–1192.
- [12] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самоспряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.

- [13] Ю. М. Березанский, М. И. Гехтман, *Обратная задача спектрального анализа и неабелевы цепочки нелинейных уравнений*, Укр. матем. ж., **42**:6 (1990), 730–747.
- [14] М. И. Гехтман, *Интегрирование неабелевых цепочек типа Toda*, Функци. анализ и его прил., **24**:3 (1990), 72–73.
- [15] L. Faybusovich, M. Gekhtman, *Elementary Toda orbits and integrable lattices*, J. Math. Phys., **41**:5 (2000), 2905–2921.
- [16] Ю. М. Березанский, *Прямая и обратная спектральные задачи для якобиева поля*, Алгебра и анализ, **9**:6 (1997), 38–61.
- [17] Ю. Л. Кишакевич, *Спектральная функция типа Марченко разностного оператора четного порядка*, Матем. заметки, **11**:4 (1972), 437–446.
- [18] Ю. Л. Кишакевич, *Спектральная функция типа Марченко бесконечной системы разностных уравнений*, Теория функций, функц. анализ и их приложения, **16** (1972), 59–68.
- [19] И. М. Кричевер, *Периодическая неабелева цепочка Toda и ее двумерное обобщение*, Приложение (с. 72–80) к статье: Б. А. Дубровин, *Тэта-функции и нелинейные уравнения*, УМН, **36**:2 (1981), 11–80.
- [20] M. Kac, P. van Moerbeke, *On some periodic Toda lattices*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **72**:4 (1975), 1627–1629.
- [21] С. В. Манаков, *О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах*, Журн. эксп. теорет. физ., **67**:2 (1974), 543–555.
- [22] H. Flaschka, *On the Toda lattice. I*, Phys. Rev., B, **9** (1974), 1924–1925.
- [23] H. Flaschka, *On the Toda lattice. II*, Progr. Theoret. Phys., **51**:3 (1974), 703–716.
- [24] Н. В. Жернаков, *Прямая и обратная задачи для периодической якобиевой матрицы*, Укр. матем. ж., **38**:6 (1986), 785–788.
- [25] Н. В. Жернаков, *Интегрирование цепочек Toda в классе операторов Гильберта–Шмидта*, Укр. матем. ж., **39**:5 (1987), 645–648.
- [26] Н. В. Жернаков, *Спектральная теория некоторых классов якобиевых матриц и ее применения к интегрированию цепочки Toda*, Дисс. к.ф.-м.н., Институт математики АН УССР, Киев, 1987.
- [27] M. Bruschi, S. V. Manakov, O. Ragnisco, D. Levi, *The nonabelian Toda lattice — discrete analogue of the matrix Schrödinger spectral problem*, J. Math. Phys., **21** (1980), 2749–2753.
- [28] M. Bruschi, O. Ragnisco, D. Levi, *Evolution equations associated with the discrete analog of the matrix Schrödinger spectral problem solvable by the inverse spectral transform*, J. Math. Phys., **22** (1981), 2463–2471.
- [29] А. Ю. Далецкий, Г. Б. Подколзин, *Групповой подход к интегрированию бесконечной цепочки Toda*, Укр. матем. ж., **40**:4 (1988), 518–521.
- [30] Yu. M. Berezansky, *Integration of nonlinear nonisospectral difference-differential equations by means of the inverse spectral problem*, in: Nonlinear Physics, Theory and Experiment (Proc. of the First Workshop, Gallipoli (Lecce), Italy, June 29–July 7, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, 11–20.
- [31] G. Teschl, *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*, in: Mathematical Surveys and Monographs, vol. 72, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [32] Ю. М. Березанский, М. И. Гехтман, М. Е. Шмойш, *Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений*, Укр. матем. ж., **38**:1 (1986), 84–89.
- [33] Yu. Berezansky, M. Shmoish, *Nonisospectral flows on semi-infinite Jacobi matrices*, Nonlinear Math. Phys., **1**:2 (1994), 116–146.
- [34] О. А. Мохонько, *Деякі розв’язні класи нелінійних неізоспектральних різницевих рівнянь*, Укр. матем. ж., **57**:3 (2005), 356–365.

- [35] M. Szczepanik, *Integration of semi-infinite Toda chain in some class of unbounded solutions*, Rep. Math. Phys., **39**:2 (1997), 263–273.
- [36] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1: Classical Theory, Part 2: Spectral Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [37] B. Simon, *OPUC on one foot*, Preprint, Mathematics 253–37, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, 2005.
- [38] M. J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez, *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unite circle*, Linear Algebra Appl., **362** (2003), 29–56.
- [39] Л. Б. Голинский, *Потоки Шура и ортогональные полиномы на единичной окружности*, Матем. сб., **197**:8 (2006), 41–62.
- [40] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.
- [41] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [42] Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin, *On the complex moment problem*, Math. Nachr., **280**:1–2 (2007), 60–73.
- [43] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.

Институт математики НАН Украины
e-mail: berezan@mathber.carrier.kiev.ua

Поступило в редакцию
29 мая 2007 г.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
e-mail: AlexeyMohonko@univ.kiev.ua