Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, М. И. Граев, Интегральные модели представлений групп токов, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 1, 22–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2887>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:35:13

Интегральные модели представлений групп токов*

© 2008. А. М. ВЕРШИК, М. И. ГРАЕВ

§1. Введение

В этой статье под группой токов G^X , где X — многообразие с фиксированной непрерывной вероятностной мерой m , а G — локально компактная группа, понимается группа всех ограниченных непрерывных отображений $X \rightarrow G$ с поточечным умножением и компактно-открытой топологией¹⁾. Целью статьи является описание нового метода построения неприводимых унитарных представлений групп токов G^X , инвариантных относительно сохраняющих меру преобразований пространства (X, m) , для случая, когда группа G представима в виде полупрямого произведения $G = \mathbb{R}_+^* \ltimes G_0$ с определенными далее дополнительными свойствами. Основными примерами таких групп G являются максимальные параболические подгруппы P групп Ли ранга 1, т. е. групп $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ и $Sp(n, 1)$. В первых двух случаях в 70-х годах в работах [3], [4] были открыты неприводимые унитарные представления групп токов P^X , продолжаемые, и притом единственным способом, до унитарных представлений групп $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$. Определенные здесь представления групп P^X отличны от построенных в работах [3], [4], а метод их построения, рассмотренный далее, является совершенно новым; это развитие модели унипотентной диагонализации представления групп токов в простейшем случае — для группы коэффициентов $G = SL(2, \mathbb{R})$, см. в [3], [6]. В основе метода лежит замечательная мера ν на пространстве распределений, а точнее, на конусе положительных дискретных конечных мер на многообразии X , называемая бесконечномерной мерой Лебега и детально изученная в недавней работе [7] и нескольких предшествующих вероятностных статьях. Именно эта мера позволяет записать пространство представления группы токов как гильбертово пространство L^2 -сечений по этой мере таким образом, чтобы структура полупрямого произведения группы токов была согласована со структурой интеграла от счетных тензорных произведений представлений. Если обычные модели интеграла от представлений (т. е. представлений групп токов) в пространстве Фока $EXP H$ — см. [11], [5] и др. — напоминают интегрирование представлений по Лебегу, то конструкция этой статьи похожа на построение интеграла по Риману или интеграла по траекториям некоторого случайного процесса. Это приводит к новым изоморфизмам факторизаций гильбертовых пространств (ср. [9]) и новой трактовке непрерывных тензорных произведений гильбертовых пространств, что будет рассмотрено в другой работе.

*Работа поддержана грантами НШ 2251.2003.1 и РФФИ 05-01-00899 (А. М. Вершик) и грантом РФФИ 07-01-00101а (М. И. Граев).

¹⁾Фактически мы почти не используем топологию многообразия X , используется лишь структура пространства с мерой, однако удобно пользоваться языком распределений Шварца.

§2. Описание структуры группы G

Пусть G — произвольная локально компактная группа, представимая в виде полупрямого произведения $G = \mathbb{R}_+^* \ltimes G_0$. Мультипликативная группа $\mathbb{R}_+^*$ естественно действует внешними автоморфизмами σ_r , $\sigma_r(g) = rgr^{-1}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, на нормальном делителе G_0 и тем самым на множестве всех унитарных представлений группы G_0 , преобразуя операторы представления $T(g)$ в операторы $T_r(g) = T(\sigma_r(g))$.

Зафиксируем унитарное представление T подгруппы G_0 в гильбертовом пространстве H и свяжем с ним унитарное представление U группы $G = \mathbb{R}_+^* \ltimes G_0$ в прямом интеграле гильбертовых пространств $H_r \equiv H$ с заданными на них представлениями T_r , при этом интегрирование идет по инвариантной мере $r^{-1}dr = d \log r$ на мультипликативной группе $\mathbb{R}_+^*$. Мы получаем прямой интеграл представлений T_r группы G_0 в прямом интеграле гильбертовых пространств

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty H_r r^{-1} dr.$$

Более подробно, по определению элементами пространства $\mathcal{H}$ являются квадратично интегрируемые (по мере $d \log r$) сечения $f(r)$ расслоения над $\mathbb{R}_+^*$, где слоем над точкой $r \in \mathbb{R}_+^*$ служит пространство H_r . Действие подгруппы G_0 в каждом слое этого расслоения задает (приводимое) унитарное представление $U(\cdot)$ этой группы во всем пространстве $\mathcal{H}$. Зададим операторы $U(r_0)$ представления группы $\mathbb{R}_+^*$ на сечениях $f \in \mathcal{H}$ формулой

$$(U(r_0)f)(r) = f(r_0r), \quad r_0 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Следующее утверждение очевидно:

Предложение 1. *Предположим, что представление T подгруппы G_0 неприводимо, а все представления T_r попарно не эквивалентны. Тогда определенное выше унитарное представление U группы G также неприводимо.*

§3. Суммируемые семейства представлений

Назовем унитарное представление T подгруппы G_0 в гильбертовом пространстве H и соответствующее ему семейство представлений $\{T_r, r \in \mathbb{R}_+^*\}$ суммируемыми, если существует хотя бы один единичный вектор $h \in H$, такой, что для любой неотрицательной числовой последовательности $\{r_n\}$ из условия $\sum_{n=1}^\infty r_n < \infty$ следует, что

$$\sum_{n=1}^\infty \|T_{r_n}(g)h - h\| < \infty \quad \text{для любого } g \in G_0.$$

Вектор $h \in H$ с этим свойством назовем почти инвариантным относительно представления T (семейства $\{T_r, r \in \mathbb{R}_+^*\}$).

Отметим, что такой вектор h может быть неединственным, например, если G_0 — группа Гейзенберга (см. ниже). Очевидно, что каждый вектор пространства, линейно порожденного векторами, почти инвариантными относительно фиксированного суммируемого представления T группы G_0 , кратен почти инвариантному вектору.

Нам понадобится следующий достаточный признак суммируемости.

Предложение 2. Если существует единичный вектор $h \in H$, такой, что

$$\|T_r(g)h - h\| < c(g)r \quad \text{при любом } g \in G_0, \quad (3.1)$$

где $c(g)$ зависит только от g , то представление T подгруппы G_0 суммируемо, а вектор h почти инвариантен относительно представления T .

В самом деле, из (3.1) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_{r_n}(g)h - h\| < c(g) \sum_{n=1}^{\infty} r_n$ для любой неотрицательной последовательности $\{r_n\}$, а потому представление T суммируемо.

Предложение 3. Если представление T подгруппы G_0 в пространстве H удовлетворяет условиям предложения 2, то каждому почти инвариантному вектору $h \in H$, удовлетворяющему условию (3.1), отвечает нетривиальный 1-коцикл $a_h: G \rightarrow \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — пространство представления U группы $G = \mathbb{R}_+^* \ltimes G_0$, связанного с T . А именно, $a_h(g) = U(g)f(r) - f(r)$, где $f(r) = e^{-r}h$.

Доказательство. Если $g \in G_0$, то $U(g)f(r) = e^{-r}T_r(g)h$, а потому $\|U(g)f - f\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-2r} \|T_r(g)h - h\|^2 r^{-1} dr$. Отсюда и из условия предложения 2 следует, что $\|U(g)f - f\| < \infty$, т.е. $a_h(g) \in \mathcal{H}$ при $g \in G_0$. Если $g = r_0 \in \mathbb{R}_+^*$, то $U(g)f = e^{-r_0}h$, а потому $U(g)f - f = (e^{-r_0} - e^{-r})h$. Отсюда вытекает, что $a_h(g) \in \mathcal{H}$ при $g \in \mathbb{R}_+^*$. Таким образом, a_h является 1-коциклом. Поскольку $f \notin \mathcal{H}$, этот коцикл нетривиален. $\square$

Напомним, что неприводимое унитарное представление локально компактной группы G называется *особым*, если группа когомологий группы G со значениями в пространстве этого представления нетривиальна. По теореме работы [8] особое представление неотделимо от единичного представления в топологии Фелла. Таким образом, в предложении 3 содержится простая и явная конструкция особого представления для рассматриваемого класса групп — ср. с [1], где особое представление для простых групп Ли ранга 1 строится как предел представлений дополнительной серии. В дальнейшем мы считаем выполненными условия предложения 1 на представления T группы G_0 .

§4. Счетные тензорные произведения и представления групп $l^\infty(G_0)$

Следующее определение широко известно.

Определение 1. Счетной тензорной степенью гильбертова пространства H со стабилизирующим единичным вектором $h \in H$ называется пополнение индуктивного предела конечных тензорных степеней $\bigotimes_{i=1}^n H$ пространства H при их изометрическом вложении: $x \in \bigotimes_{i=1}^n H \mapsto x \otimes h \in \bigotimes_{i=1}^{n+1} H$. Будем обозначать это пополнение через $\tilde{H} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (H, h)$ или, коротко, через $\bigotimes_{i=1}^{\infty} H$.

Другими словами, $\tilde{H}$ есть гильбертово пространство, полученное пополнением по норме пространства $\lim \text{ind}_{n \rightarrow \infty} \bigotimes_{i=1}^n H$.

Элементы $\bigotimes_{i=1}^n x_i$ из подпространств $\bigotimes_{i=1}^n H \subset \tilde{H}$ естественно задавать в виде бесконечных произведений, стабилизирующихся на n -м шаге:

$$y_n = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes h \otimes h \otimes \cdots, \quad \text{где } x_k \in H; \quad (4.1)$$

они образуют тотальное подмножество в $\tilde{H}$.

Лемма. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - h\| < \infty$, то последовательность $\{y_n\}$, где y_n имеют вид (4.1), сходится по норме пространства $\tilde{H}$.

Пределы таких последовательностей $\{y_n\}$ будем записывать в форме бесконечных произведений $y = \bigotimes_{n=1}^{\infty} x_n$, где $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - h\| < \infty$, и в дальнейшем при описании пространства $\tilde{H}$ ограничиваться только такими элементами из $\tilde{H}$ и их конечными линейными комбинациями.

Введем группу $l^{\infty}(G_0)$ (или, коротко, l^{∞}) всех бесконечных ограниченных последовательностей $g = \{g_1, g_2, \dots\}$ элементов из G_0 с покомпонентным умножением, где все элементы g_n , $n = 1, 2, \dots$, принадлежат некоторому зависящему от g компактному $K(g) \subset G_0$. Построим, исходя из суммируемого унитарного представления T группы G_0 в пространстве H , унитарные представления группы $l^{\infty}(G_0)$.

Теорема 1. *Если представление T подгруппы G_0 в пространстве H суммируемо, то для каждой неотрицательной суммируемой числовой последовательности $\{r_n\}$ ($\sum r_n < \infty$) и для каждого вектора $h \in H$, почти инвариантного относительно представления T , корректно определено унитарное представление группы $l^{\infty}(G_0)$ в пространстве $\tilde{H}_{\{r_n\},h} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (H, h)$ операторами вида $\tilde{T}_{\{r_n\},h}(g) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} T_{r_n}(g_n)$ при $g = \{g_1, g_2, \dots\}$, т. е.*

$$\tilde{T}_{\{r_k\},h}(g) \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} (T_{r_n}(g_n) f_n).$$

При этом, если представление T группы G_0 неприводимо, а представления T_r попарно не эквивалентны, то представления $\tilde{T}_{\{r_n\},h}$ группы $l^{\infty}(G_0)$ также неприводимы и попарно не эквивалентны.

Доказательство. Определение корректно, поскольку из сходимости в $\tilde{H}_{\{r_n\},h}$ последовательности $\{y_n\}$, $y_n = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes h \otimes h \otimes \dots$, следует, что для любой последовательности $g = \{g_1, g_2, \dots\} \in l^{\infty}(G_0)$ последовательность $\{T_{r_1}(g_1)x_1 \otimes \dots \otimes T_{r_n}(g_n)x_n \otimes h \otimes h \otimes \dots\}$ также сходится.

Унитарность операторов $\tilde{T}_{\{r_n\},h}$ следует из унитарности операторов T_{r_n} .

Предположим далее, что представления $\tilde{T}_{\{r_n\},h}$ и $\tilde{T}_{\{r'_n\},h'}$ эквивалентны. Тогда очевидно, что $\{r_n\} = \{r'_n\}$ и каждый сплетающий оператор A этих представлений изометрично отображает подпространства $\bigotimes^n H$ на себя и кратен на них единичным операторам E_n , $A = c_n E_n$, где $|c_n| = 1$. Отсюда следует, что A преобразует тензорную степень $\bigotimes_{i=1}^{\infty} h \in \tilde{H}_{\{r_n\},h}$ в тензорную степень $\bigotimes_{i=1}^{\infty} (ch)$, где $|c| = 1$. Очевидно, что $\bigotimes_{i=1}^{\infty} (ch) \in \tilde{H}_{\{r_n\},h'}$ тогда и только тогда, когда $h' = ch$. $\square$

Построенные представления $\tilde{H}_{\{r_n\},h}$ группы $l^{\infty}(G_0)$ будут в дальнейшем служить компонентами прямого интеграла представлений группы токов G_0^X . Более точно, можно рассматривать определенное выше представление группы $l^{\infty}(G_0)$ как представление группы токов G_0^X .

Теорема 2. *Выделим счетную последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in X$, и зафиксируем положительную последовательность $\{r_k\}$, такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$. В условиях теоремы 1 каждому такому набору $\{r_k, x_k\}$ и каждому вектору $h \in H$, почти инвариантному относительно суммируемого представления T группы G_0 , отвечает унитарное представление $\tilde{T}_{\{r_n\},h}$ группы токов G_0^X в пространстве $\tilde{H}_{\{r_n\},h} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (H, h)$ операторами вида $\tilde{T}_{\{r_n\},h}(g(\cdot)) =$*

$\bigotimes_{n=1}^{\infty} T_{r_n}(g(x_n))$, т. е.

$$\tilde{T}_{\{r_n\},h}(g(\cdot)) \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} (T_{r_n}(g(x_n)) f_n).$$

При этом если представление T группы G_0 неприводимо, а представления T_r попарно не эквивалентны, то представления $\tilde{T}_{\{r_n\},h}$ группы G_0^X также неприводимы и попарно не эквивалентны.

В самом деле, достаточно заметить, что ограничение элемента группы G_0^X на выбранный набор точек $\{x_k\}$ есть элемент группы $l^\infty(G_0)$. Поэтому полученные представления группы G_0^X существенно зависят от набора точек $\{x_n\}$ и последовательности $\{r_n\}$. Отметим, что гильбертовы пространства, в которых эти представления действуют, зависят только от почти инвариантного вектора $h \in H$.

§5. Лебегова мера в пространстве распределений

Переходим к центральной части нашей конструкции, включающей описание некоторой сигма-конечной меры, инвариантной относительно замечательной бесконечномерной группы. Сама по себе эта мера впервые была обнаружена в работе [5] и частично исследована в [10], однако в этих работах она определялась с помощью плотности относительно некоторой вероятностной меры; лишь позже стала ясной связь этой сигма-конечной меры с гамма-процессом и устойчивыми процессами Леви (см. также [9]). Новый аппроксимационный подход к этой мере дан в недавней работе [7], где описаны ее связи с другими мерами (с мерами Пуассона–Дирихле) и смежными задачами. Заметим, что роль этой меры в излагаемых вопросах, в комбинаторике и в теории чисел сравнима с ролью гауссовой меры в математической физике и бесконечномерном анализе. В этой работе нам понадобится лишь факт существования этой меры и некоторые ее свойства.

Рассмотрим конус вещественных положительных конечных атомических мер на X

$$D_+(X) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} r_k \delta_{x_k}, r_k > 0, \sum_k r_k < \infty \right\}.$$

Элементы из $D_+(X)$ будем кратко обозначать через $\xi = \{r_k, x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема-определение. *Существует сигма-конечная (бесконечная) мера ν на конусе $D_+(X)$, конечная на любом компакте и однозначно определяемая своим преобразованием Лапласа*

$$F(f) \equiv \int_{D_+(X)} \exp \left(- \sum_k r_k f(x_k) \right) d\nu(\xi) = \exp \left(- \int_X \log f(x) dm(x) \right).$$

где f — произвольная неотрицательная измеримая функция на (X, m) с конечным интегралом от логарифма.

Замечание. Преобразование Лапласа корректно определено для широкого класса сигма-конечных мер, и имеет место теорема единственности мер с заданным преобразованием Лапласа. Доказательство существования такой меры может быть проведено несколькими различными способами: прямым построением

гамма-процесса с последующим введением плотности [10], аппроксимационной конструкцией и определением с помощью мер Пуассона–Дирихле [7].

Имеется характеристическое описание этой меры, особенно важное для нас. Предположим, что фиксировано многообразие X и нормированная неотрицательная мера m на нем.

Теорема 3. *Меру ν на конусе $D_+(X)$ полностью характеризуют следующие два свойства.*

1) (Проективная инвариантность относительно группы мультипликаторов.) Если $a(x)$ — неотрицательная измеримая ограниченная функция на X со сходящимся интегралом $\int_X \log a(x) dm(x) = c \geq 0$, то оператор M_a умножения элементов $\xi \in D_+(X)$ на $a(x)$ ($M_a \sum_k r_k \delta_{x_k} = \sum_k a(x_k) r_k \delta_{x_k}$) умножает меру ν на $\exp c$. В частности, если $c = 0$, мера ν инвариантна относительно мультипликатора.

2) Инвариантность и эргодичность относительно группы всех преобразований пространства (X, m) , сохраняющих меру.

Выполнение этих свойств для меры ν вытекает из приведенной формулы для преобразования Лапласа этой меры.

Заметим, что если заменить константу $\exp c$ в условии 1) на константу $\exp \theta c$, $\theta > 0$, то мы получим важное однопараметрическое семейство мер ν_θ , $\theta > 0$. Эти меры находятся в естественном соответствии с мерами Пуассона–Дирихле $PD(\theta)$ на бесконечномерном симплексе (см. [7]). Если не налагать условия нормированности меры m , то число $m(X) = \delta$ будет дополнительным параметром этого семейства, который не столь существен.

Меру ν естественно назвать бесконечномерной лебеговой мерой, поскольку она обобщает свойства инвариантности конечномерной лебеговой меры на неотрицательном октанте. Новым в бесконечномерном случае является эргодичность относительно группы мультипликаторов, которую выделим особо.

Теорема 4. *Группа мультипликаторов $\mathcal{M}$ действует эргодично на конусе $D_+(X)$ с мерой ν .*

§6. Построение представления группы токов

Перейдем к построению неприводимого представления группы токов $G^X = (\mathbb{R}_+^* \ltimes G_0)^X$, инвариантного относительно группы преобразований многообразия X , сохраняющих меру m . Фиксируем суммируемое унитарное представление T группы G_0 в гильбертовом пространстве H и вектор $h \in H$, почти инвариантный относительно этого представления. Теоремой 2 для каждого элемента $\xi = \{r_k, x_k\}_{k=1}^\infty \in D_+(X)$ было определено представление $\tilde{T}_{\{r_n\}, h}$ группы токов G_0^X в пространстве $\tilde{H}_{\{r_n\}, h} = \bigotimes_{i=1}^\infty (H, h)$. Носитель этого представления — последовательность $\{x_k\}$, $x_k \in X$, а само представление зависит от последовательности $\{r_k\}$. Иначе говоря, мы рассмотрели представление, пропущенное через гомоморфизм ограничения группы G_0^X на подмножество $\{x_k\} \subset X$:

$$G_0^X \rightarrow l^\infty(G_0).$$

Разумеется, эти представления не используют меру ν и не являются инвариантными относительно группы преобразований пространства X , сохраняющих меру m . Кроме того, это пока представления группы G_0^X , а не группы G^X .

Перейдем теперь к описанию унитарного представления U группы $G^X = (\mathbb{R}_+^* \ltimes G_0)^X$, ассоциированного с суммируемым представлением T подгруппы G_0 в пространстве H .

Возьмем прямой интеграл по мере ν гильбертовых пространств $\tilde{H}_{\{r_k\},h} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (H, h)$,

$$\mathcal{H} = \int_{D_+} \tilde{H}_{\xi,h} d\nu(\xi), \quad \tilde{H}_{\xi,h} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (H, h),$$

т.е. пространство сечений $F(\xi) = F(\{r_k, x_k\})$ расслоения над пространством $D_+(X)$ дискретных мер, где слоем над каждой точкой $\xi = \{r_k, x_k\}$ является счетное тензорное произведение $\tilde{H}_{\{r_k\},h} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} H_{r_k}$, $H_{r_k} = H$, со стабилизирующим вектором h . (От последовательности $\{x_k\}$ этот слой как гильбертово пространство не зависит, но само представление зависит.) Действие группы G_0^X уже определено в каждом слое этого расслоения; оно индуцирует унитарное представление $U(r_0(\cdot))$ этой группы на всем пространстве $\mathcal{H}$. Остается определить операторы $U(r_0(\cdot))$ представления группы $\mathbb{R}^X$. Зададим их формулой

$$(U(r(\cdot))F)(\{r_k, x_k\}) = e^{\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x)} F(\{r_0(x_k)r_k, x_k\})$$

для любого $r(\cdot) \in \mathbb{R}_+^X$, т.е. операторы $U(r_0(\cdot))$ переставляют слои расслоения и индуцируют тем самым представление группы $\mathbb{R}^X$ на всем пространстве $\mathcal{H}$. Их унитарность вытекает из инвариантности меры ν относительно действия мультипликаторов. Вместе с операторами группы G_0^X эти операторы порождают искомое унитарное представление группы токов G^X .

Теорема 5. *Если представление T группы G_0 неприводимо, а представления T_r попарно не эквивалентны, то заданное выше унитарное представление U группы G^X неприводимо. Оно инвариантно относительно группы преобразований базы X , сохраняющих меру t .*

Неприводимость представления следует из эргодичности меры ν относительно группы мультипликаторов (см. выше). Остальные свойства также определяются свойствами меры ν .

Таким образом, параметрами нашей конструкции для групп указанного вида служат суммируемое неприводимое унитарное представление T группы G_0 и связанный с T почти инвариантный вектор в пространстве представления. Мы увидим, что в некоторых классических случаях эти параметры определяются однозначно.

§7. Пример — одномерное расширение группы Гейзенберга

Пусть $G = \mathbb{R}_+^* \ltimes N$, где N — группа Гейзенберга порядка $2n - 1$, реализованная как группа пар (t, z) , $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, с законом умножения $(t_1, z_1)(t_2, z_2) = (t_1 + t_2 - \operatorname{Im} z_1 z_2^*, z_1 + z_2)$. Элементы $r \in \mathbb{R}_+^*$ и $(t, z) \in N$ связаны соотношением $r(t, z)r^{-1} = (r^2 t, rz)$.

С точностью до перехода от представлений T к представлениям T_r имеются два бесконечномерных унитарных неприводимых суммируемых представления T группы N (см. [12], [1]). Первое действует в гильбертовом пространстве H^+

целых аналитических функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-zz^*} d\mu(z). \quad (7.1)$$

Операторы этого представления:

$$(T(t_0, z_0)f)(z) = e^{\zeta_0 - zz_0^*} f(z + z_0), \quad \text{где } \zeta_0 = it_0 - \frac{1}{2}z_0 z_0^*. \quad (7.2)$$

Второе действует в пространстве H^- целых антианалитических функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с такой же нормой (7.1) операторами вида $(T(t_0, z_0)f)(z) = e^{\bar{\zeta}_0 - z_0 z^*} f(z + z_0)$.

Условию почти инвариантности и даже более сильному условию (3.1) удовлетворяют все, с точностью до множителя, мономы $z^k = z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}}$ и $\bar{z}^k = \bar{z}_1^{k_1} \dots \bar{z}_{n-1}^{k_{n-1}}$ в пространствах H^+ и H^- соответственно. Поэтому почти инвариантные векторы линейно порождают всюду плотные подмножества в этих пространствах.

Таким образом, неприводимые унитарные представления группы токов N^X параметризуются парами (ξ, h) : элементом $\xi \in D_+(X)$ и почти инвариантным вектором h в H^+ или в H^- , причем все эти представления попарно не эквивалентны. Соответственно каждое неприводимое унитарное представление группы токов $G^X = (\mathbb{R}_+^* \ltimes N)^X$ — группы токов одномерного расширения группы Гейзенберга — задается по нашей схеме почти инвариантным вектором в H^+ или H^- , и все эти представления попарно не эквивалентны.

§8. Основной пример — максимальные параболические подгруппы P групп ранга 1

Эти подгруппы представимы в виде полупрямого произведения $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, а потому описание неприводимых унитарных представлений группы токов P^X сводится к описанию суммируемых неприводимых представлений соответствующей подгруппы P_0 . Приведем это описание для разных случаев.

8.1. $P \subset SL(2, \mathbb{R})$ ($SL(2, \mathbb{R}) \cong SU(1, 1)$). В этом особенно простом случае P есть подгруппа нижних треугольных матриц. Ее подгруппа P_0 изоморфна $\{\pm 1\} \oplus \mathbb{R}$ и обладает, с точностью до перехода к представлениям T_r , двумя суммируемыми одномерными представлениями: $T^\pm(\epsilon, x) = e^{\pm ix}$. Отсюда следует, что ассоциированные с ними представления подгруппы P и ее группы токов P^X реализуются в прямых интегралах одномерных пространств — в прямом интеграле по мере $r^{-1}dr$ на полуоси одномерных пространств H_r и соответственно в прямом интеграле по мере ν одномерных пространств $\tilde{H}_{\{r_n\}, h}$.

8.2. $P \subset O(n, 1)$, $n \geq 2$. В этом случае подгруппа P_0 есть полупрямое произведение, $P_0 = D_0 \ltimes \mathbb{R}^{n-1}$, где $D_0 = \{\pm 1\} \oplus O(n-1)$, и существует единственное, с точностью до перехода к представлениям T_r , суммируемое неприводимое представление этой подгруппы. Его удобно реализовать в пространстве L^2 функций $f(\omega)$ на единичной сфере в $\mathbb{R}^{n-1}$. Операторы представлений таковы: $(T(\gamma)f)(\omega) = e^{i\langle \gamma, \omega \rangle} f(\omega)$ при $\gamma \in \mathbb{R}^{n-1}$, $(T(\epsilon, u)f)(\omega) = f(\epsilon \omega u)$ при $(\epsilon, u) \in D_0$. В частном случае $n = 2$ сфера сводится к паре точек и пространство L^2 одномерно. В пространстве представления имеется единственный почти инвариантный вектор относительно операторов T : $f(\omega) = \text{const}$. Таким образом, мы получаем одно неприводимое унитарное представление группы P^X .

8.3. $P \subset U(n, 1)$, $n > 1$. В этом случае подгруппа P_0 есть полупрямое произведение, $P_0 = D_0 \ltimes N$, где $D_0 = U(1) \oplus U(n-1)$, а N — группа Гейзенберга порядка $2n-1$. Элементы $(\epsilon, u) \in D_0$ и $(t, z) \in N$ связаны соотношением $(\epsilon, u)^{-1}(t, z)(\epsilon, u) = (t, \bar{\epsilon}zu)$. Имеются, с точностью до перехода к представлениям T_r , два счетных набора суммируемых представлений подгруппы P_0 . Один из них возникает при разложении пространства $\tilde{H}$ всех функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой (7.1) в прямую сумму, $\tilde{H} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m$, подпространств, инвариантных, неприводимых и попарно не эквивалентных относительно представления группы P_0 . Операторы представления подгруппы N в пространстве $\tilde{H}$ задаются формулой (7.2), а операторы подгруппы представления D_0 имеют вид $(T(\epsilon, u)f)(z) = f(\bar{\epsilon}zu)$ при $(\epsilon, u) \in D_0$. Представление группы P_0 в каждом подпространстве H_m суммируемо и обладает единственным почти инвариантным вектором $\phi_m(z) = l_m^{n-2}(zz^*)$, где $l_m^{n-2}(x)$ — полином Лагерра, см. [13].

Другое семейство неприводимых суммируемых представлений группы P_0 возникает при разложении на неприводимые подпространства того же пространства $\tilde{H}$, на котором операторы представления подгруппы N задаются формулой $(T(t_0, z_0)f)(z) = e^{\bar{z}_0 z} f(z + z_0)$.

Представления $\tilde{T}$ максимальной параболической группы P , ассоциированные с этими суммируемыми представлениями подгруппы P_0 , неприводимы, попарно не эквивалентны и обладают нетривиальными 1-коциклами $a(g) = \tilde{T}(g)f(r, z) - f(r, z)$, где $f(r, z) = e^{-r}\phi_m(z)$.

Теорема 6. *Представления $U(g(\cdot))$ группы токов P^X , ассоциированные с этими суммируемыми неприводимыми представлениями подгруппы P_0 , неприводимы и попарно не эквивалентны.*

Среди всех суммируемых представлений подгруппы $P_0 \subset U(n, 1)$ имеются, с точностью до перехода к представлениям T_r , ровно два представления $T^{\pm}$, такие, что связанные с ними представления параболической подгруппы P продолжаются до унитарных представлений всей группы $U(n, 1)$. При $n > 1$ они реализуются соответственно в пространстве целых аналитических и целых антианалитических функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ и остаются неприводимыми при ограничении на подгруппу Гейзенберга. Возникает вопрос, продолжаемы ли ассоциированные с ними представления группы токов P^X до хотя бы проективных представлений группы $U(n, 1)^X$. Поскольку такое продолжение (если оно существует) сводится к доопределению представления группы P^X на единственном элементе (инволюции), то вопрос состоит в том, можно ли построить такой оператор инволюции. Аналогичный вопрос возникает и для группы $O(n, 1)^X$. Его обсуждение будет проведено в другой статье.

§9. Связь с пространством Фока

Все известные представления группы токов реализованы в работах [5], [11] в пространстве Фока или в экспоненте гильбертова пространства. Одночастичным пространством в этой реализации является гильбертово пространство $L^2(X; \tilde{H})$ квадратично интегрируемых функций со значениями в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$, в котором действует *особое* представление группы коэффициентов (см. выше).

В силу неприводимости рассматриваемых представлений для предлагаемой здесь интегральной модели представлений групп токов существует единственный (с точностью до скалярного оператора) изоморфизм с фоковской моделью этих представлений. Явный его вид довольно сложен. Поясним схематически различие между фоковской и интегральной моделью.

Прежде всего для реализации представлений групп токов, свободных полей и т. п. необходимо то или иное корректное понятие непрерывного симметрического тензорного произведения гильбертовых пространств или тензорного интеграла пространств по некоторой базе X . Иначе говоря, необходимо придать точный смысл пространству, описываемому символическим выражением

$$\int_X^{\otimes} H_{\alpha} dm(\alpha),$$

где X — база интеграла (т.е. пространство параметров полевых операторов). Можно считать, что все гильбертовы компоненты H_{α} отождествлены с одним и тем же пространством — гильбертовым пространством H ; оно является скорее виртуальным или «бесконечно малым», а интеграл есть «непрерывная бесконечная тензорная степень» этого пространства. Общепринятое с давних пор и идущее от квантовой теории поля понимание этого интеграла состоит в переходе к фоковской модели, т.е. к экспоненте от одночастичного пространства, которое удобнее всего интерпретировать как гильбертово пространство $L_m^2(X; H)$ квадратично интегрируемых функций по мере m со значениями в некотором гильбертовом пространстве H :

$$\int_X^{\otimes} H dm = EXP [L_m^2(X; H)].$$

Наиболее частая аналитическая трактовка экспоненты состоит в том, что это пространство L^2 функций относительно меры, отвечающей гауссовскому процессу (белому шуму), а одночастичное пространство состоит из линейных функционалов от траекторий.

Предлагаемое здесь понимание непрерывного тензорного произведения совсем иное: мы заменяем базу интеграла X с мерой m конусом положительных дискретных мер на базе, т.е. конусом $D_+(X)$ с сигма-конечной мерой ν . Каждой точке (или траектории) $\xi = \{r_k, x_k\} \in D_+(X)$, где $x_k \in X$, $r_k > 0$, $\sum_k r_k < \infty$, мы сопоставляем счетное тензорное произведение (по k) гильбертовых пространств H_{r_k} , а затем берем прямой интеграл этих счетных тензорных произведений по мере ν . Можно сказать, что наша конструкция заменяет непрерывное тензорное произведение прямым интегралом счетных тензорных произведений.

Применим эту идею к классу рассматриваемых в статье групп и представлений их групп токов.

Пусть $G = \mathbb{R}_+^* \ltimes G_0$, T — суммируемое неприводимое унитарное представление подгруппы G_0 в пространстве H и $\tilde{T}$ — ассоциированное с T особое представление группы G в пространстве $\tilde{H}$. Тогда трактовка непрерывного тензорного произведения состоит в следующем:

$$\int_X^{\otimes} \tilde{H} dm \equiv \int_{D_+(X)}^{\oplus} \bigotimes_{k=1}^{\infty} H_{r_k} d\nu(\xi);$$

здесь $\xi = \{r_k, x_k\} \in D_+(X)$, а в пространствах H_{r_k} действуют соответствующие представления группы токов G_0^X (как представления группы $l^\infty(G)$ в ограничении элемента на точки x_k , $k = 1, \dots$; группа токов $(\mathbb{R}^*)^X$ эргодически действует на $(D_+(X), \nu)$ как на базе и сплетает представления в слоях H_{r_k}).

По-видимому, эта модель тензорного произведения имеет более широкие применения; но еще предстоит понять более подробно, как выглядят привычные операторы в фоковском пространстве в терминах этой модели.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$* , УМН, **61**:5 (2006), 1–88.
- [2] M. I. Graev, A. M. Vershik, *The basic representation of the current group $O(n, 1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure*, Indag. Math., **16**:3/4 (2005), 499–529.
- [3] I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Models of representations of current groups*, in: Representations of Lie groups and Lie algebras, Akad. Kiadó, Budapest, 1985, 121–179.
- [4] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Неприводимые представления группы G^X и когомологии*, Функц. анализ и его прил., **8**:2 (1974), 67–69.
- [5] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций*, УМН, **28**:5 (1973), 83–128.
- [6] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, связанная с унитарной подгруппой*, Функц. анализ и его прил., **17**:2 (1983), 70–72.
- [7] А. М. Вершик, *Существует ли бесконечномерная мера Лебега?*, Труды МИРАН, **259** (2007).
- [8] А. М. Вершик, С. И. Карпушев, *Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции*, Матем. сб., **119**:4 (1982), 521–533.
- [9] А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, *Фоковские факторизации и разложения пространства L^2 над общими процессами Леви*, УМН, **58**:3 (351) (2003), 3–50.
- [10] N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor, *An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process*, J. Funct. Anal., **185**:1 (2001), 274–296.
- [11] H. Araki, *Factorisable representations of the current algebra*, Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A, **5**:3 (1970), 361–422.
- [12] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, М., Наука, 1987.
- [13] Г. Бейтмен, Л. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Физматгиз, М., 1974.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
e-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Институт системных исследований РАН, Москва
e-mail: graev_36@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
3 сентября 2007 г.