Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Константинов, Инвариантное упорядочение на односвязном накрытии границы Шилова симметрической области, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 1, 33–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:48:14

УДК 512.816.4

Инвариантное упорядочение на односвязном накрытии границы Шилова симметрической области

© 2008. А. Л. КОНСТАНТИНОВ

§1. Введение

Пусть G — эрмитова простая группа Ли трубчатого типа. Граница Шилова симметрической области $D = G/K$ имеет вид G/P , где P — такая связная максимальная параболическая подгруппа группы G , что ее унитарный радикал абелев. В этой статье мы рассмотрим вопрос существования инвариантного упорядочения на односвязном накрытии пространства G/P , индуцированного инвариантным упорядочением на односвязном накрытии группы G .

В простейшем случае $D = \mathrm{SU}(1,1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1))$ граница Шилова есть окружность, а ее односвязное накрытие — прямая с обычным упорядочением. В случае $D = \mathrm{SU}(2,2)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2))$ граница Шилова есть четырехмерная вещественная квадрака сигнатуры $(4,2)$. Ее односвязное накрытие, диффеоморфное $S^3 \times \mathbb{R}$, рассматривалось Сигалом [5] как модель вселенной. Односвязное накрытие группы G в этом случае есть не что иное, как группа конформных преобразований этой модели. Сигал [5] также доказал существование инвариантного упорядочения на односвязном накрытии G/P для случая $G = \mathrm{SU}(n,n)$.

Используя результат Сигала, Пэнейц [6] доказал существование инвариантного упорядочения на односвязном накрытии пространства G/P для произвольной эрмитовой классической простой группы Ли G трубчатого типа. Из этого факта он вывел существование инвариантного упорядочения на односвязной накрывающей группы G . В настоящей статье проделано обратное: из существования инвариантного упорядочения на односвязной накрывающей группы G выведено существование инвариантного упорядочения на односвязном накрытии пространства G/P . Приведенное ниже доказательство является общим; в частности, оно пригодно для группы G типа E_7 (единственной особой эрмитовой простой группы Ли трубчатого типа).

Инвариантным упорядочением на группе G называется упорядочение, инвариантное относительно левых и правых сдвигов. Инвариантное упорядочение однозначно определяется множеством $S = \{g \in G : g \geq e\}$. Множество S является полугруппой, инвариантной относительно внутренних автоморфизмов. Кроме того, $S \cap S^{-1} = \{e\}$. Инвариантное упорядочение на группе Ли G называется непрерывным, если полугруппа S замкнута и топологически порождается любой своей окрестностью единицы.

С каждым непрерывным инвариантным упорядочением на группе Ли G связан инвариантный строго выпуклый конус $C(S)$ в касательной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, состоящий из всех векторов, касательных к кривым, лежащим в S . При этом

$\exp C(S) \subset S$, отображение $\exp: C(S) \rightarrow S$ является открытым в нуле и полугруппа S алгебраически порождается множеством $\exp C(S)$ [2]. Произвольный инвариантный строго выпуклый конус $C \in \mathfrak{g}$ называется *допустимым*, если существует такая полугруппа $S \subset G$, что $C = C(S)$.

Пусть H — произвольная связная подгруппа Ли группы G и $\varphi: G \rightarrow G/H$ — каноническое отображение. Инвариантное упорядочение на однородном пространстве G/H называется непрерывным, если множество $R = \{x \in G/H \mid x \geq eH\}$ замкнуто и полугруппа $\varphi^{-1}(R)$ порождается любой своей окрестностью единицы. Непрерывное инвариантное упорядочение на однородном пространстве G/H называется *групповым*, если существует такое непрерывное инвариантное упорядочение на группе G с определяющей полугруппой S , что $x \geq y$ для $x, y \in G/H$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $s \in S$, что $x = sy$.

Предложение. Для того чтобы непрерывное инвариантное упорядочение на группе G , определенное полугруппой S , задавало инвариантное упорядочение на G/H , необходимо и достаточно выполнение следующего условия: если $s, r \in S$, $sr \in H$, то $s, r \in H$.

Доказательство. Пусть групповое упорядочение на G/H определено корректно. Допустим, что $e \neq s \notin H$ и $sr \in H$, $r \in S$. Тогда $eH = srH \geq sH > eH$ — противоречие. С другой стороны, пусть групповое упорядочение не определено корректно. Это означает, что не выполнено условие антисимметричности, т. е. возможен случай $a > b$ и $b > a$. Можно считать, что $b = eH$, так как упорядочение инвариантно относительно левых и правых сдвигов. Имеем $a = rb$, $b = sa$, $s, r \in S$, $s, r \notin H$. Тогда $b = srb$ и $sr \in H$. $\square$

Если H — такая подгруппа Ли, что $\text{Ad}(H)$ — редуктивная линейная группа Ли, то условие в предложении эквивалентно тому, что $H \cap S = \{e\}$ [3].

В настоящей статье получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть G — односвязная эрмитова простая группа Ли трубчатого типа, а P — ее максимальная параболическая подгруппа, унипотентный радикал которой абелев. Тогда на однородном пространстве G/P существует ровно одна пара противоположных непрерывных инвариантных упорядочений. Эти упорядочения являются групповыми.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 пусть P_1 — некоторая параболическая подгруппа группы G , и пусть на G/P_1 существует групповое инвариантное упорядочение. Тогда подгруппа P_1 сопряжена некоторой подгруппе группы P .

§2. Предварительные замечания

Пусть $\mathfrak{g}$ — эрмитова простая алгебра Ли, и пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ — ее разложение Картана ($\mathfrak{k}$ — максимальная ad -компактная подалгебра). Центр $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ алгебры $\mathfrak{k}$ одномерен. Правильной инволюцией алгебры $\mathfrak{g}$ называется инволюция σ со следующими свойствами: $\sigma(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$, $\sigma(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, $\sigma|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{k})} = -1$. Алгебра $\mathfrak{g}$ имеет разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$, где $\sigma|_{\mathfrak{g}^0} = 1$, $\sigma|_{\mathfrak{g}^1} = -1$. С каждой правильной инволюцией σ алгебры $\mathfrak{g}$ можно связать вещественную форму $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^0 \oplus i\mathfrak{g}^1$ алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$; при этом $i\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{l}$.

В пространстве $\mathfrak{m}$ существует комплексная структура, инвариантная относительно $\mathfrak{k}$. Она может быть определена по формуле

$$Iy = [k, y], \quad y \in \mathfrak{m},$$

где k — подходящий элемент из $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$. Собственные значения оператора $\text{ad}(k)$ суть $0, \pm i$.

Теперь пусть алгебра $\mathfrak{g}$ является трубчатой. Существует такая правильная инволюция σ , что алгебра $\mathfrak{l}$, определенная в первом абзаце, изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$ [2]. Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{m}_1$ — картановское разложение алгебры $\mathfrak{l}$. Выберем элемент $k_1 \in \mathfrak{k}_1$, задающий комплексную структуру на $\mathfrak{m}_1$. Тогда элемент ik_1 лежит в $\mathfrak{m}$. Обозначим его через m . Очевидно, что оператор $\text{ad}(m)$ имеет собственные значения $0, \pm 1$.

Алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается на собственные подпространства оператора $\text{ad}(m)$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

причем подалгебра $\mathfrak{g}_0$ сопряжена подалгебре $\mathfrak{g}^0$, определенной выше, а $\mathfrak{g}_{-1}$ и $\mathfrak{g}_1$ — коммутативные унитарные подалгебры Ли. Алгебра $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ является максимальной параболической подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Ее унитарный радикал $\mathfrak{g}_1$ абелев. Все максимальные параболические подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$, унитарные радикалы которых абелевы, сопряжены.

Пример. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, n)$ комплексных матриц порядка $2n$ с нулевым следом, косоэрмитовых относительно эрмитовой формы с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}, A, B, C \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), B^* = B, C^* = C \right\}$.

Автоморфизм σ есть сопряжение посредством матрицы $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$. Элемент m представлен матрицей $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix}$. Следовательно, $\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Пусть G — односвязная эрмитова простая группа Ли с касательной алгеброй $\mathfrak{g}$. Обозначим через G_{-1}, G_0, G_1, P связные подгруппы группы G с касательными алгебрами $\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{p}$ соответственно. Очевидно, что $G_{-1} = \exp \mathfrak{g}_{-1}$, $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$. Имеется разложение $P = G_0 G_1$, где G_0 — подгруппа Леви, а G_1 — унитарный радикал. Подгруппа P — максимальная параболическая подгруппа, имеющая абелев унитарный радикал. Все максимальные параболические подгруппы группы G , радикалы которых абелевы, сопряжены подгруппе P .

§3. Доказательство теоремы 1

Пусть на односвязной эрмитовой простой группе G задано непрерывное инвариантное упорядочение с определяющей полугруппой S . На симметрическом пространстве G/G_0 существуют две пары противоположных непрерывных инвариантных упорядочений [2]; из них одна пара состоит из групповых упорядочений [3]. Любое непрерывное инвариантное упорядочение на группе G индуцирует упорядочение на G/G_0 . Так как $\text{Ad}(G_0)$ — редуктивная линейная группа Ли, то отсюда следует, что $G_0 \cap S = \{e\}$.

Рассмотрим пересечение подгруппы $P = G_0 G_1$ с полугруппой S .

Лемма 3. $S \cap P = S \cap G_1$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $g \in S \cap P$, $g = g_0 g_1$, $g_0 \in G_0$, $g_1 \in G_1$. Предположим, что $g_0 \neq e$. Элемент g_1 можно представить в виде $g_1 = \exp \xi$, $\xi \in \mathfrak{g}_1$. Тогда для любого $u \in \mathbb{R}$

$$\text{Ad}(\exp um)g = g_0 \text{Ad}(\exp um)g_1 = g_0 \exp(e_u \xi) \in S.$$

Устремляя параметр u к $-\infty$ и пользуясь замкнутостью полугруппы S , получим, что $g_0 \in S$, — противоречие, так как $S \cap G_0 = \{e\}$. $\square$

Кусочно-дифференцируемую кривую $g(t)$ на группе G назовем *допустимой*, если $g'(t) \in g(t)C(S)$ для любого t . Множество всех элементов $g \in G$, для которых существует допустимая кривая, соединяющая e с g , совпадает с S [2].

Дифференцируемую функцию φ на группе G назовем *возрастающей*, если она непостоянна и $d_g \varphi \geq 0$ на gC для любого $g \in G$. Множество возрастающих функций инвариантно относительно левых и правых сдвигов. Возрастающая функция возрастает (быть может, не строго) вдоль любой допустимой кривой. Возрастающая функция существует для любого допустимого конуса C [4].

Сдвинув функцию φ , можно добиться того, чтобы $d_e \varphi \neq 0$. Далее, с помощью внутренних автоморфизмов можно получить из φ возрастающие функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, образующие систему координат в некоторой окрестности $O(e)$ единицы группы G . Будем считать для определенности, что $\varphi_i(e) = 0$ при всех i и что $O(e)$ в координатах $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ есть шар радиуса 1 с центром в начале координат. Через $O_r(e)$ будем обозначать шар радиуса r с центром в начале координат.

Пусть $g \in S \cap G_1$ и $g(t)$ — допустимая кривая, соединяющая e с g .

Лемма 4. $g(t) \subset G_1$.

Доказательство. Имеем $g = \exp \xi$, $\xi \in \mathfrak{g}_1$. Так как $\text{Ad}(\exp um)\xi = e^u \xi$, то для любого $r < 1$ найдется такое $u \in \mathbb{R}$, что $\text{Ad}(\exp um)g \in O_r(e)$. Тогда и $\text{Ad}(\exp um)g(t) \in O_r(e)$, так как φ_i не убывает на $g(t)$. Таким образом, при $u \rightarrow -\infty$ кривая $\text{Ad}(\exp um)g(t)$ стягивается в e . Оператор $\text{Ad}(\exp um)$ действует на подгруппе G_0 тождественным преобразованием, а на подгруппе $G_{-1} = \exp \mathfrak{g}_{-1}$ следующим образом: $\text{Ad}(\exp um) \exp \eta = \exp(e^{-u} \eta)$. Значит, кривая $g(t)$ целиком лежит в G_1 . $\square$

Теперь пусть $s, r \in S$, $sr \in G_1$, и пусть $s(t)$, $r(t)$, $t \in [0, 1]$, — допустимые кривые, соединяющие e с элементами s и r соответственно. Рассмотрим следующую допустимую кривую $q(t)$: $q(t) = s(2t)$ при $t \in [0, 1/2]$, $q(t) = sr(2t - 1)$ при $t \in [1/2, 1]$. Эта допустимая кривая соединяет e с sr . По лемме 4 она целиком лежит в G_1 . Значит, $s, r \in G_1$. Следовательно, полугруппа S индуцирует групповое упорядочение на G/P .

Замечание. Приведенное доказательство существования группового инвариантного упорядочения справедливо не только для $P = G_0 G_1$, но и для любых групп вида HG_1 , где $H \subset G_0$ — связная подгруппа Ли.

Теперь докажем, что непрерывное инвариантное упорядочение на G/P единственно.

Каждому инвариантному упорядочению на G/P соответствует $\text{Ad}(P)$ -инвариантный замкнутый строго выпуклый конус в пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, которое можно отождествить с пространством $\mathfrak{g}_{-1}$. Этот конус состоит из всех векторов, касательных к кривым, лежащим в R , где $R = \{x \in G/P \mid x \geq eP\}$. Упорядочение однозначно восстанавливается по R [2].

Лемма 5. $\text{Ad}(G_0)$ -инвариантный конус D в пространстве $\mathfrak{g}_{-1}$ единствен с точностью до умножения на -1 .

Доказательство. Подгруппа $P_0 = G_0 G_{-1}$ является максимальной параболической и сопряжена подгруппе P . Более того, существует такой внутренний автоморфизм θ , что $\theta(G_0) = G_0$, $\theta(G_{-1}) = G_1$. Тогда если D есть $\text{Ad}(G_0)$ -инвариантный конус в $\mathfrak{g}_{-1}$, то $\theta(D)$ — это $\text{Ad}(G_0)$ -инвариантный конус в $\mathfrak{g}_1$. Следовательно, по конусу D в пространстве $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$ можно построить четыре $\text{Ad}(G_0)$ -инвариантных конуса $\pm D \pm \theta(D)$. Проекция любого из них на $\mathfrak{g}_{-1}$ есть $\pm D$. Но (см. [2]) в пространстве $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$ существует ровно четыре различных $\text{Ad}(G_0)$ -инвариантных конуса с непустой внутренностью. Следовательно, конус D определен с точностью до умножения на -1 . $\square$

Этот конус можно представить в явном виде. Существует взаимно однозначное соответствие между однородными пространствами типа G/P и простыми евклидовыми йордановыми алгебрами [7, с. 213]. При этом соответствии $\mathfrak{g}_{-1}$ можно представить в виде $i\mathcal{J}$ для некоторой йордановой алгебры $\mathcal{J}$, а G_0 — группа линейных преобразований алгебры $\mathcal{J}$, сохраняющая конус квадратов Ω . В этих обозначениях $\text{Ad}(G_0)$ -инвариантный конус в пространстве $\mathfrak{g}_{-1}$ есть $i\Omega$.

§4. Доказательство теоремы 2

Пусть снова на односвязной эрмитовой простой группе G задано непрерывное инвариантное упорядочение с определяющей полугруппой S . Касательный конус полугруппы S обозначим через C .

Пусть $\mathfrak{a}$ — максимальная $\mathbb{R}$ -диагонализуемая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, лежащая в $\mathfrak{m}$. Обозначим через Δ систему корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$ и через $\mathfrak{g}_\varepsilon$ — корневое подпространство, отвечающее корню ε . Известно [1], что Δ есть система корней типа C_n . Пусть ε_1 — старший корень системы Δ . Тогда пространство $\mathfrak{g}_{\varepsilon_1}$ одномерно и его базисный вектор α_1 является старшим корневым вектором алгебры $\mathfrak{g}$ [1]. Таким образом, $\mathfrak{g}_{\varepsilon_1} \cap C \neq \{0\}$ [1]. Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — канонический базис системы Δ (базис, в котором система Δ имеет вид $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \pm 2\varepsilon_i\}$), а $e_1, \dots, e_n$ — соответствующий двойственный базис алгебры $\mathfrak{a}$. Элементы $\pm e_i$ попарно сопряжены.

Пусть $\mathfrak{p}_1$ — некоторая параболическая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда найдутся такие максимальная $\mathbb{R}$ -диагонализуемая подалгебра $\mathfrak{a}$ и элемент $a \in \mathfrak{a}$, что $\mathfrak{p} = \bigoplus_{t \geq 0} \mathfrak{g}_t$, где $\mathfrak{g}_t$ — собственное подпространство оператора ada , отвечающее собственному значению t . Максимальная параболическая подалгебра $\mathfrak{p}$ с абелевым унипотентным радикалом в обозначениях предыдущего абзаца отвечает элементу $e_1 + \dots + e_n$.

Пусть P_1 и G_0 — связные подгруппы группы G с касательными алгебрами $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{g}_0$ соответственно. Тогда $\text{Ad } G_0$ — редуктивная линейная группа Ли.

Пусть $a = \sum a_i e_i$. Можно считать, что все a_i неотрицательные (в противном случае заменим элемент a на сопряженный). Если все a_i положительны, то $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$. Если же $a_k = 0$, то в подалгебре $\mathfrak{g}_0$ содержится подпространство $\mathfrak{g}_{\varepsilon_k}$, сопряженное пространству $\mathfrak{g}_{\varepsilon_1}$, и, следовательно, $\mathfrak{g}_0 \cap C \neq \{0\}$. В последнем случае G_0 пересекается с S по внутренней точке [3], а значит, и подгруппа P_1 пересекается с S по внутренней точке; следовательно, на G/P_1 не существует группового инвариантного упорядочения [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Б. Винберг, *Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли*, Функци. анализ и его прил., **14**:1 (1980), 1–13.
- [2] Г. И. Олшанский, *Выпуклые конусы в симметрических алгебрах Ли, полугруппы Ли и инвариантные причинные структуры (упорядочения) на псевдоримановых симметрических пространствах*, ДАН СССР, **265**:3 (1982), 537–541.
- [3] А. Л. Константинов, *Инвариантные упорядочения в однородных пространствах простых групп Ли*, Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, матем., мех., 2006, № 6.
- [4] Г. И. Олшанский, *Инвариантные упорядочения в простых группах Ли. Решение задачи Э. Б. Винберга*, Функци. анализ и его прил., **16**:4 (1982), 80–81.
- [5] I. E. Segal, *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy*, Academic Press, New York, 1976.
- [6] S. Paneitz, *Invariant convex cones and causality in semisimple Lie algebras and groups*, J. Funct. Anal, **43** (1981), 313–359.
- [7] J. Faraut, A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1994.

Московский государственный университет
e-mail: lelik_msu@rambler.ru

Поступило в редакцию
7 сентября 2006 г.