Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Усманов, Вещественные факторы типа III_0 ,
Функц. анализ и его прил., 2000, том 34, вы-
пуск 1, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:17:26

($[\delta h]$ обозначает целую часть числа δh). Из (3) вытекает, что $\mu(\bar{U}_j \cap T_{2v(j)} \bar{V}_j) > a > 0$ для некоторой последовательности $\{v(j)\}$, удовлетворяющей условиям $v(j) \in Q_j$, $2v(j) \notin Q_j$. Отсюда мы получим, что $\mu(U_j | T_{2v(j)} B_j) > a$; следовательно, положив $\tilde{B}_j = T_{-2v(j)} U_j \cap B_j$, мы определим башню $V_j = \bigsqcup_{z \in \tilde{Q}_j} T_z \tilde{B}_j$. Условия (i), (ii), (iii) выполнены по построению. Условие (iv) вытекает из свойства перемешивания (см. доказательство утверждения 7 из [7]). $\square$

Автор обязан Б. М. Гуревичу, В. И. Оселедцу, А. М. Степину и Ж.-П. Тувено за интерес к результатам и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розлин В. А.* Известия АН СССР, сер. матем., **13**, 329–340 (1949).
2. *Вершик А. М., Корнфельд И. П., Синай Я. Г.* В кн.: Динамические системы-2. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, Т. 2, ВИНТИ, М., 1985, с. 5–111.
3. *Ferenczi S.* Colloq. Math., **73**, No. 1, 35–65 (1997).
4. *Glasner E., Host B., Rudolph D.* Israel J. Math., **78**, 131–142 (1992).
5. *del Junco A., Yassawi R.* Multiple mixing and rank one group actions (to appear in Canad. J. Math.).
6. *King J., Thouvenot J.-P.* J. Anal. Math., **56**, 211–230, (1991).
7. *Рыжиков В. В.* Функт. анализ и его прил., **27**, No. 2, 63–78 (1993).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
18 февраля 1998 г.

УДК 517.986

Вещественные факторы типа III_0

© 2000. Ш. М. УСМАНОВ

Вещественной W^* -алгеброй называется вещественная $*$ -алгебра R ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H , содержащая единицу, замкнутая в слабой операторной топологии и такая, что $R \cap iR = \{0\}$. В работе получено дискретное разложение σ -конечных вещественных факторов типа III_0 (ср. [1]).

1. Предварительные сведения. Пусть R — вещественная W^* -алгебра. Напомним, что обертывающая W^* -алгебра $\mathcal{U}(R)$ для R (т.е. наименьшая W^* -алгебра, содержащая R) имеет вид $\mathcal{U}(R) = R + iR$ и R определяет на $\mathcal{U}(R)$ некоторый $*$ -антиавтоморфизм α_R периода 2: $\alpha_R(x + iy) = x^* + iy^*$, где $x, y \in R$. Соответственно и R определяется при помощи α_R : $R = \{x \in \mathcal{U}(R) : \alpha_R(x) = x^*\}$. Вещественные W^* -алгебры R и Q , порождающие одну и ту же W^* -алгебру $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}(Q) = \mathcal{U}(R) = \mathcal{U}$, $*$ -изоморфны тогда и только тогда, когда α_R и α_Q на $\mathcal{U}$ сопряжены, т.е. существует $*$ -автоморфизм $\theta \in \text{Aut } \mathcal{U}$, такой, что $\alpha_R = \theta \cdot \alpha_Q \cdot \theta^{-1}$ (см. [2, 3]). Пусть R и Q являются $*$ -изоморфными и, следовательно, $M = \mathcal{U}(R)$ и $N = \mathcal{U}(Q)$ комплексно $*$ -изоморфны и антиавтоморфизмы α_R и α_Q сопряжены с помощью этого изоморфизма; тогда будем говорить, что пары (M, α_R) и (N, α_Q) сопряжены. Вещественная $*$ -алгебра R называется вещественным фактором, если ее центр тривиален, $Z(R) = \{\mathbb{C}1\}$ (и тогда $\mathcal{U}(R)$ — комплексный фактор); R имеет тип I_{fin} (I_{∞} , II_1 , II_{∞} , III_{λ} ,

$0 \leq \lambda \leq 1$), если $\mathcal{U}(R)$ имеет тип I_{fin} (соответственно I_∞ , Π_1 , Π_∞ , Π_λ) (см. [4, 5]).

2. Пусть $M \subset B(H)$ есть σ -конечная непрерывная W^* -алгебра, G — коммутативная локально компактная группа, σ — сильно непрерывное действие группы G на M и $N = M \times_\sigma G$ — скрещенное произведение W^* -алгебры M на действие σ , т. е. W^* -алгебра на $L^2(H, G)$, порожденная операторами вида $\pi_\sigma(x)$, $x \in M$, и $\lambda_\sigma(t)$, $t \in G$, где

$$\pi_\sigma(x)\xi(s) = (\sigma_{-s}(x)\xi)(s), \quad \lambda_\sigma(t)\xi(s) = \xi(s-t), \quad \xi(s) \in L^2(H, G).$$

Пусть α есть $*$ -антиавтоморфизм M периода 2. Если α и σ коммутируют (т. е. $\alpha \cdot \sigma_t = \sigma_t \cdot \alpha$ для всех $t \in G$), то, как показано в [4, Proposition 1.1], его можно продолжить на N . А именно, на N существует $*$ -антиавтоморфизм $\bar{\alpha}$ периода 2, такой, что

$$\bar{\alpha}|_{\pi_\sigma(M)} = \pi_\sigma \cdot \alpha, \quad \bar{\alpha}(\lambda_\sigma(t)) = \lambda_\sigma(t)^* \quad \text{для всех } t \in G.$$

Пусть M есть σ -конечный фактор типа III_0 , α — его $*$ -антиавтоморфизм периода 2, R — вещественный фактор типа III_0 , порожденный α , и $\text{mod}(\alpha)$ — значение модулярного гомоморфизма Конна–Такесаки–Джиордано на α (см. [6]). Известно, что структура фактора R связана со значением $\text{mod}(\alpha)$: если $\text{mod}(\alpha) = \text{id}$, то его структура наиболее близка к структуре W^* -алгебры M . Для таких факторов дискретное разложение было построено в [3] (см. также [5]). В следующей теореме получено дискретное разложение для произвольных вещественных факторов типа III_0 .

ТЕОРЕМА 1. (1) Пусть N есть σ -конечная W^* -алгебра типа Π_∞ с непрерывным центром без минимальных проекторов, α — ее $*$ -антиавтоморфизм периода 2, не обязательно действующий тождественно на ее центре, τ — точный нормальный полуконечный α -инвариантный след на N_+ и θ есть $*$ -автоморфизм W^* -алгебры N , коммутирующий с α , действующий эргодически на ее центре и такой, что $\tau \cdot \theta \leq \lambda_0 \cdot \tau$, $0 < \lambda_0 < 1$. Тогда $R = \{x \in N \times_\theta \mathbb{Z} : \bar{\alpha}(x) = x^*\}$ — вещественный фактор типа III_0 .

(2) Для всякого σ -конечного вещественного фактора R типа III_0 существует тройка (N, θ, α) , удовлетворяющая условиям п. (1) и такая, что $R = \{x \in N \times_\theta \mathbb{Z} : \bar{\alpha}(x) = x^*\}$. Более точно, возможны два случая:

(i) если $\text{mod}(\alpha_R) = \text{id}$, то на N существует $*$ -антиавтоморфизм α_Q периода 2, такой, что $\alpha_Q(x) = x$ для всех $x \in Z(N)$ и пары $(N \times_\theta \mathbb{Z}, \bar{\alpha}_Q)$ и (M, α_R) сопряжены;

(ii) если $\text{mod}(\alpha_R) \neq \text{id}$, то N имеет вид $N_1 \oplus N_1^{\text{op}}$ (где N_1^{op} есть W^* -алгебра, обратная к N_1), $*$ -антиавтоморфизм α периода 2 действует по формуле $\alpha(x, y) = (y, x)$, где $(x, y) \in N_1 \oplus N_1^{\text{op}}$, и пары $((N_1 \oplus N_1^{\text{op}}) \times_\theta \mathbb{Z}, \bar{\alpha})$ и (M, α_R) сопряжены.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть R есть σ -конечный вещественный фактор типа III_0 , $M = \mathcal{U}(R)$ и α_R — антиавтоморфизм W^* -алгебры M периода 2, порождающий R .

(1) Если $\text{mod}(\alpha_R) = \text{id}$, то существует пара (Q, θ) , где Q — вещественная W^* -алгебра типа Π_∞ с непрерывным центром, а θ — ее $*$ -автоморфизм, эргодический на ее центре, такая, что R $*$ -изоморфен вещественному скрещенному произведению W^* -алгебры Q на θ .

(2) Если $\text{mod}(\alpha_R) \neq \text{id}$, то существует пара (N, β) , где N есть W^* -алгебра с непрерывным центром, а β — ее $*$ -антиавтоморфизм (не периода 2), такая, что R $*$ -изоморфен скрещенному произведению W^* -алгебры N на β .

3. Пусть (N, θ, α) — тройка, удовлетворяющая условиям п. (1) теоремы 1 и e — проектор из центра W^* -алгебры N ; так как θ является эргодическим на $Z(N)$, то для e существует ортогональное разложение на проекторы $\{e_n\}$, $n \in \overline{1, \infty}$, такие, что $e = \sum_{n=1}^{\infty} e_n$, $\theta^j(e_n)e = 0$ при $j \leq n$ и $\theta^n(e_n) \leq e$. Определим с помощью $\{e_n\}$ на eN производный $*$ -автоморфизм θ_e :

$$\theta_e(xe) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n(xe_n).$$

Теперь сформулируем теорему изоморфизма для вещественных факторов типа III_0 .

ТЕОРЕМА 2. (1) Пусть R_1 и R_2 — вещественные факторы типа III_0 , имеющие дискретное разложение в смысле п. 2(i) теоремы 1, $(N_1, \theta_1, \alpha_1)$, $(N_2, \theta_2, \alpha_2)$ — соответствующие тройки и $Q_i = \{x \in N_i : \alpha_i(x) = x^*\}$, $i = 1, 2$. Тогда R_1 и R_2 являются $*$ -изоморфными в том и только том случае, когда существует $*$ -изоморфизм $J: Q_1 \rightarrow Q_2$ и проекторы $e_1 \in Z(Q_1)$, $e_2 \in Z(Q_2)$, такие, что

$$J^{-1} \cdot \theta_{e_2}^{-1} \cdot J \cdot \theta_{e_1} \in \text{Int}(Q_1).$$

(2) Пусть R_1 и R_2 — вещественные факторы типа III_0 , имеющие дискретное разложение в смысле п. 2(ii) теоремы 1, и $(N_i, \theta_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2$, — соответствующие тройки. Тогда R_1 и R_2 являются $*$ -изоморфными в том и только том случае, когда существует $*$ -изоморфизм (или $*$ -антиизоморфизм) $J: N_1 \rightarrow N_2$ и проекторы $e_1 \in Z(N_1)$ и $e_2 \in Z(N_2)$, такие, что

$$J^{-1} \cdot \theta_{e_2}^{-1} \cdot J \cdot \theta_{e_1} \in \text{Int}(N_1).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть M есть σ -конечный фактор типа III_0 , такой, что на нем существует $n + 1$ классов сопряженности $*$ -антиавтоморфизмов периода 2, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — представители этих классов ($\text{mod}(\alpha_0) = \text{id}$) и R_i , $i = 0, \dots, n$, — соответствующие вещественные факторы типа III_0 . Тогда пары (M, α_i) сопряжены парам $(N_i \oplus N_i^{\text{op}} \times_{\theta_i} \mathbb{Z}, \bar{\alpha}_{N_i})$, причем N_i попарно $*$ -неизоморфны и θ_i не имеют сопряженных производных автоморфизмов на редуцированных подалгебрах, $i = 1, \dots, n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Connes A. Ann. Sci. École Norm. Sup., **6**, 133–252 (1973).
2. Stormer E. Duke Math. J., **47**, 145–153 (1980).
3. Ayupov Sh., Rakhimov A., Usmanov Sh. Jordan, real and Lie structures in operator algebras. Math. Appl., vol. 418, Kluwer Acad. Publ., 1997.
4. Stacey P. J. Proc. London Math. Soc., **47**, No. 2, 275–284 (1983).
5. Усманов Ш. М. Функци. анализ и его прил., **3**, вып. 19, 34–35 (1985).
6. Giordano T. J. Funct. Anal., **51**, 326–360 (1983).