Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Классификация неособых многомерных скобок Дубровина–Новикова, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 1, 39–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:05:18

Классификация неособых многомерных скобок Дубровина–Новикова*

© 2008. О. И. Мохов

§1. Введение

В данной работе решена хорошо известная проблема Дубровина–Новикова, поставленная еще в 1984 г. в [1], — проблема классификации *многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа*, т. е. теоретико-полевых скобок Пуассона вида

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = \sum_{\alpha=1}^n (g^{ij\alpha}(u(x))\delta_{\alpha}(x-y) + b_k^{ij\alpha}(u(x))u_{\alpha}^k(x)\delta(x-y)), \quad (1.1)$$

где $u = (u^1, \dots, u^N)$ — локальные координаты на некотором гладком N -мерном многообразии M или в области $\mathbb{R}^N$; $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$ — независимые переменные; коэффициенты $g^{ij\alpha}(u)$, $b_k^{ij\alpha}(u)$ — гладкие функции локальных координат $(u^1, \dots, u^N)$, $1 \leq i, j, k \leq N$, $1 \leq \alpha \leq n$; $u(x) = (u^1(x), \dots, u^N(x))$ — гладкие функции (N -компонентные поля) n независимых переменных $x^1, \dots, x^n$ со значениями в многообразии M ; $u_{\alpha}^k(x) = \partial u^k / \partial x^{\alpha}$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\delta_{\alpha}(x-y) = \partial \delta(x-y) / \partial x^{\alpha}$. Условие кососимметричности и тождество Якоби для скобки Пуассона вида (1.1) накладывают на коэффициенты $g^{ij\alpha}(u)$ и $b_k^{ij\alpha}(u)$ жесткие ограничения, о которых будет сказано ниже. Общий класс скобок Пуассона вида (1.1) был введен Дубровиным и Новиковым в [2] (одномерный случай $n = 1$) и [1] (многомерный случай произвольного n) в связи с гамильтоновой теорией систем гидродинамического типа, и такие скобки Пуассона называют также *многомерными скобками Дубровина–Новикова*. Естественный дифференциально-геометрический гамильтонов подход к *системам гидродинамического типа*, т. е. эволюционным системам однородных квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка, предложенный в [1], [2], связан с общим классом скобок Пуассона вида (1.1). Если $\det(g^{ij\alpha}(u)) \neq 0$ для всех α , то скобка (1.1) называется *невыврожденной*. Одномерные невырожденные скобки Пуассона гидродинамического типа были полностью классифицированы в 1983 г. Дубровиным и Новиковым в [2], где доказано, что все такие скобки Пуассона приводятся к постоянному виду локальной заменой координат и характеризуются единственным инвариантом — сигнатурой метрики скобки. Этот гамильтонов подход привел в дальнейшем к созданию замечательной и очень плодотворной теории интегрируемых одномерных систем гидродинамического типа (см. [3], [4]), и в настоящее время можно считать, что свойства

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00054) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4182.2006.1).

гамильтоновости и интегрируемости одномерных систем гидродинамического типа хорошо изучены (хотя и в одномерном случае еще осталось много важных нерешенных проблем). Случай же многомерных систем гидродинамического типа гораздо сложнее и пока практически не изучен с точки зрения общих свойств гамильтоновости и интегрируемости (см. [5]). В многомерном случае очень серьезные проблемы возникают уже при изучении простейшего естественного инвариантного класса подходящих локальных гамильтоновых структур (1.1). В [1] Дубровин и Новиков поставили задачу классификации невырожденных многомерных скобок Пуассона вида (1.1), показав, что для них, в отличие от одномерных, утверждение о приведении к постоянному виду локальной заменой координат заведомо неверно, так как, в частности, двумерная невырожденная скобка Пуассона гидродинамического типа, порождаемая алгеброй Ли векторных полей на плоскости и связанная с двумерной эйлеровой гидродинамикой, не может быть приведена к постоянному виду локальной заменой координат (в этом случае имеются ненулевые тензорные препятствия). В этой же работе была предпринята неудачная попытка получить классификацию этих скобок в случае $N = 1$ и первом нетривиальном случае $n = N = 2$ (в [6] автором данной статьи было показано, что эти результаты работы [1] ошибочны). Полная классификация однокомпонентных ($N = 1$, n любое) и двухкомпонентных ($N = 2$, n любое) невырожденных скобок Пуассона вида (1.1) получена в [6], где получена также полная классификация для $1 \leq N \leq 4$, для чего пришлось развить мощный алгебраический аппарат, но решить задачу для произвольного числа компонент N алгебраическими методами пока не удается. В общем случае невырожденные многомерные скобки Пуассона гидродинамического типа нельзя привести к постоянному виду локальными заменами координат в отличие от одномерного случая, но в соответствии с результатами Дубровина и Новикова [1] и автора данной статьи [6] всегда существуют специальные локальные координаты, в которых такая скобка Пуассона является линейной по полям (вообще говоря, линейной неоднородной). Линейные по полям многомерные скобки Пуассона гидродинамического типа определяются специальными бесконечномерными алгебрами Ли (*алгебрами Ли гидродинамического типа*) и специальными 2-коциклами на этих бесконечномерных алгебрах Ли (для неоднородных линейных скобок), классификация которых при $n \geq 2$ получена в [6] при $1 \leq N \leq 4$. (Линейные по полям одномерные скобки Дубровина–Новикова и связанные с ними алгебраические структуры изучены в [7].) Задача классификации многомерных невырожденных скобок Пуассона гидродинамического типа для произвольного числа компонент оставалась совершенно неприступной. В данной работе дифференциально-геометрическими методами получена классификация всех неособых невырожденных многомерных скобок Пуассона вида (1.1) для любого числа компонент N и любого n . Ключевую роль в решении этой задачи сыграла теория согласованных метрик, построенная автором в [8].

§2. Многомерные однородные скобки первого порядка и скобки Дубровина–Новикова

Требование билинейности и выполнения тождества Лейбница для скобки вида (1.1), т.е. произвольной *многомерной однородной скобки первого порядка*,

эквивалентно условию, что на произвольных функционалах I и J на пространстве полей $u(x)$ скобка имеет вид

$$\{I, J\} = \sum_{\alpha=1}^n \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij\alpha}(u(x)) \frac{d}{dx^\alpha} + b_k^{ij\alpha}(u(x)) u_\alpha^k(x) \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} d^n x, \quad (2.1)$$

где d/dx^α — полная производная по независимой переменной x^α :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + u_\alpha^i \frac{\partial}{\partial u^i} + u_{\beta\alpha}^i \frac{\partial}{\partial u_\beta^i} + \cdots + u_{\beta_1 \dots \beta_s \alpha}^i \frac{\partial}{\partial u_{\beta_1 \dots \beta_s}^i} + \cdots, \\ u_{\beta_1 \dots \beta_s}^i &= \frac{\partial^s u^i}{\partial x^{\beta_1} \dots \partial x^{\beta_s}}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

по повторяющимся верхнему и нижнему индексам предполагается суммирование, причем в данном случае суммирование по $\beta_1, \dots, \beta_s$ идет по всем различным упорядоченным наборам $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_s$ этих индексов.

Класс скобок вида (2.1) инвариантен относительно локальных замен координат $(u^1, \dots, u^N)$. При этом для каждого α коэффициенты $g^{ij\alpha}(u)$ и $b_k^{ij\alpha}(u)$ скобки преобразуются как дифференциально-геометрические объекты. Для любой скобки вида (2.1) коэффициент $g^{ij\alpha}(u)$ для каждого α является контравариантным тензором ранга 2 на многообразии M . Для невырожденной скобки вида (2.1) можно для каждого α ввести коэффициенты $\Gamma_{ij}^{k\alpha}(u)$ по формулам $\Gamma_{ij}^{k\alpha}(u) = -g_{is}^\alpha(u) b_j^{sk\alpha}(u)$, где $g_{is}^\alpha(u)$ — ковариантный тензор ранга 2, обратный к тензору $g^{ij\alpha}(u)$, $g^{ij\alpha}(u) g_{jk}^\alpha(u) = \delta_k^i$. При этом для любой невырожденной скобки вида (2.1) для каждого α коэффициенты $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ преобразуются как коэффициенты аффинной связности на многообразии M . Таким образом, невырожденная скобка вида (2.1) задается n произвольными невырожденными контравариантными тензорами $g^{ij\alpha}(u)$ ранга 2, $1 \leq \alpha \leq n$, и n произвольными аффинными связностями $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$, $1 \leq \alpha \leq n$, на многообразии M .

Отметим, что среди скобок вида (2.1) имеются, в частности, простые, но важные скобки, не зависящие от полей $u(x)$, — *постоянные скобки (скобки постоянного вида)*. Такие скобки выделяются условиями $g^{ij\alpha}(u) = \text{const}$, $b_k^{ij\alpha}(u) = 0$. Задача, которую мы решаем в данной статье, — выяснить, к какому простейшему каноническому виду можно привести скобки Пуассона вида (2.1) локальными заменами координат. Прежде всего, укажем общие соотношения на коэффициенты скобки Пуассона вида (2.1) [9].

Теорема 2.1 [9]. *Скобка (2.1) является скобкой Пуассона, т. е. кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения на коэффициенты:*

$$g^{ij\alpha} = g^{ji\alpha}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial g^{ij\alpha}}{\partial u^k} = b_k^{ij\alpha} + b_k^{ji\alpha}, \quad (2.4)$$

$$\sum_{(\alpha, \beta)} (g^{s i \alpha} b_s^{j r \beta} - g^{s j \beta} b_s^{i r \alpha}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\sum_{(i,j,r)} (g^{si\alpha} b_s^{jr\beta} - g^{sj\beta} b_s^{ir\alpha}) = 0, \quad (2.6)$$

$$\sum_{(\alpha,\beta)} \left[g^{si\alpha} \left(\frac{\partial b_s^{jr\beta}}{\partial u^q} - \frac{\partial b_q^{jr\beta}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij\alpha} b_q^{sr\beta} - b_s^{ir\alpha} b_q^{sj\beta} \right] = 0, \quad (2.7)$$

$$g^{si\beta} \frac{\partial b_q^{jr\alpha}}{\partial u^s} - b_s^{ij\beta} b_q^{sr\alpha} - b_s^{ir\beta} b_q^{js\alpha} = g^{sj\alpha} \frac{\partial b_q^{ir\beta}}{\partial u^s} - b_s^{jia} b_q^{sr\beta} - b_q^{is\beta} b_s^{jr\alpha}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u^k} \left[g^{si\alpha} \left(\frac{\partial b_s^{jr\beta}}{\partial u^q} - \frac{\partial b_q^{jr\beta}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij\alpha} b_q^{sr\beta} - b_s^{ir\alpha} b_q^{sj\beta} \right] \\ & + \sum_{(i,j,r)} \left[b_q^{si\beta} \left(\frac{\partial b_k^{jr\alpha}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jr\alpha}}{\partial u^k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial u^q} \left[g^{si\beta} \left(\frac{\partial b_s^{jr\alpha}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_k^{jr\alpha}}{\partial u^s} \right) \right. \\ & \left. + b_s^{ij\beta} b_k^{sr\alpha} - b_s^{ir\beta} b_k^{sj\alpha} \right] + \sum_{(i,j,r)} \left[b_k^{si\alpha} \left(\frac{\partial b_q^{jr\beta}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jr\beta}}{\partial u^q} \right) \right] = 0. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Соотношения (2.3) и (2.4) эквивалентны кососимметричности скобки (2.1), а соотношения (2.5)–(2.9) эквивалентны выполнению тождества Якоби для кососимметричной скобки вида (2.1).

Знаки $\sum_{(\alpha,\beta)}$ и $\sum_{(i,j,k)}$ означают суммирование по всем циклическим перестановкам указанных индексов, т.е. в данном случае индексов (α, β) и (i, j, k) соответственно. В теореме 2.1 невырожденность скобки не предполагается и не накладывается никаких дополнительных условий на коэффициенты скобки (2.1). Более того, эта теорема остается справедливой для важного случая (например, в теории цепочек), когда индексы пробегают бесконечное множество (например, всех целых чисел), а все функции и коэффициенты скобки зависят от произвольного конечного числа переменных (в одномерном случае подобное наблюдение было сделано Дорфман в [10]). В одномерном случае общие соотношения на коэффициенты скобки Пуассона гидродинамического типа (без условия невырожденности) были указаны в [11], где имеется неточность в формулах, исправленная в [12] при построении нелокального обобщения одномерных скобок Дубровина–Новикова. Из соотношений теоремы 2.1, в частности, немедленно следует

Лемма 2.1. *Для каждой многомерной скобки Пуассона вида (2.1) для каждого α соответствующее слагаемое в правой части формулы (2.1) является одномерной скобкой Пуассона гидродинамического типа, т.е. любая многомерная скобка Пуассона вида (2.1) всегда является суммой одномерных скобок Пуассона по каждой из независимых переменных x^α .*

При этом в многомерном случае при $n \geq 2$ на коэффициенты этих одномерных скобок Пуассона соотношения теоремы 2.1 накладывают дополнительные нетривиальные ограничения.

Прежде всего рассмотрим соотношения (2.3)–(2.9) в одномерном случае (при $n = 1$). Очевидно, что в одномерном случае соотношение (2.6) является следствием соотношения (2.5), и, кроме того, в этом случае соотношение (2.8) следует из соотношений (2.7), (2.5) и (2.4). В невырожденном одномерном случае

($\det(g^{ij\alpha}(u)) \neq 0$, $x = x^\alpha$) мы получаем следующее: соотношение (2.3) дает симметричность невырожденного тензора $g^{ij\alpha}$, т. е. $g^{ij\alpha}$ — риманова или псевдориманова контравариантная метрика на многообразии M ; соотношение (2.4) означает, что связность $\Gamma_{ij}^{k\alpha} = -g_{is}^\alpha b_j^{sk\alpha}$ согласована с метрикой $g^{ij\alpha}$, т. е. ковариантная производная метрики равна нулю; соотношение (2.5) эквивалентно симметричности связности $\Gamma_{ij}^{k\alpha}$, т. е. $\Gamma_{ij}^{k\alpha} = \Gamma_{ji}^{k\alpha}$; соотношение (2.7) в точности означает, что связность плоская, т. е. тензор римановой кривизны связности равен нулю; соотношение (2.9) при $\alpha = \beta$ и для невырожденной метрики $g^{ij\alpha}$ следует из соотношений (2.5) и (2.7). Это доказывает теорему Дубровина–Новикова [2]: невырожденная одномерная скобка Пуассона гидродинамического типа однозначно определяется произвольной плоской метрикой $g^{ij}(u)$ и приводится к постоянно-му виду в плоских координатах этой метрики, при этом $\Gamma_{ij}^k(u) = -g_{is}(u)b_j^{sk}(u)$ — связность Леви-Чивиты, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$.

Таким образом, в силу леммы 2.1 и теоремы Дубровина–Новикова для невырожденных одномерных скобок Пуассона вида (1.1) [2] все тензоры $g^{ij\alpha}(u)$ являются плоскими метриками (метриками нулевой римановой кривизны), а каждая соответствующая аффинная связность $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ согласована со своей метрикой $g^{ij\alpha}(u)$ и имеет нулевое кручение и нулевую риманову кривизну, т. е. аффинная связность $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ является связностью Леви-Чивиты и однозначно определяется плоской метрикой $g^{ij\alpha}(u)$. Следовательно, каждая невырожденная скобка Пуассона вида (2.1) однозначно определяется плоскими метриками $g^{ij\alpha}(u)$, которые в многомерном случае связаны дополнительными жесткими ограничениями, и наша задача сводится к классификации допустимых наборов плоских метрик $g^{ij\alpha}(u)$, $1 \leq \alpha \leq n$.

§3. Тензорные препятствия и тензорные соотношения

Рассмотрим тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u) = \Gamma_{jk}^{i\beta}(u) - \Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$, определяемые для каждой пары различных индексов α и β . Эти тензоры являются препятствиями к приведению невырожденных многомерных скобок Пуассона вида (2.1) к постоянно-му виду, т. е. невырожденная скобка Пуассона вида (2.1) приводится локальной заменой координат к постоянной скобке тогда и только тогда, когда все препятствующие тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u)$ тождественно равны нулю. Действительно, если хотя бы один из этих тензоров не равен тождественно нулю, то скобка Пуассона не может быть приведена к постоянному виду локальной заменой координат, так как для любой постоянной скобки коэффициенты всех связностей $\Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$ тождественно равны нулю и, следовательно, в этих координатах все тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u)$ равнялись бы тождественно нулю. Обратное утверждение также очевидно: если все тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u)$ тождественно равны нулю, то все связности $\Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$ равны друг другу и, следовательно, все они равны нулю в плоских координатах метрики $g^{ij1}(u)$, а все метрики постоянны в этих координатах в силу согласованности метрик с соответствующими связностями.

Следующая теорема дает полный набор тензорных соотношений, определяющих класс невырожденных скобок Пуассона вида (2.1).

Теорема 3.1 [6]. *Плоские невырожденные метрики $g^{ij\alpha}(u)$ определяют многомерную скобку Пуассона вида (2.1) тогда и только тогда, когда выполнены соотношения*

$$T^{ijk\alpha\beta}(u) = T^{kji\alpha\beta}(u), \quad (3.1)$$

$$\sum_{(i,j,k)} T^{ijk\alpha\beta}(u) = 0, \quad (3.2)$$

$$T^{ijs\alpha\beta}(u)T_{st}^{r\alpha\beta}(u) = T^{irs\alpha\beta}(u)T_{st}^{j\alpha\beta}(u), \quad (3.3)$$

$$\nabla_r^\alpha T^{ijk\alpha\beta}(u) = 0, \quad (3.4)$$

где $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u) = \Gamma_{jk}^{i\beta}(u) - \Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$, $T^{ijk\alpha\beta}(u) = g^{ks\beta}(u)g^{ir\alpha}(u)T_{rs}^{j\alpha\beta}(u)$, знак $\sum_{(i,j,k)}$ означает суммирование по всем циклическим перестановкам индексов (i, j, k) , ∇_r^α — ковариантная производная, задаваемая связностью $\Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$, и $\Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$ — связность Леви-Чивиты, порождаемая метрикой $g^{ij\alpha}(u)$.

Соотношения (3.1) и (3.3) были найдены Дубровиным и Новиковым в [1]. В работе автора [6] было доказано, что этот набор тензорных соотношений не является полным, и найдена полная система тензорных соотношений (3.1)–(3.4) для невырожденных скобок Пуассона вида (2.1). Соотношения (3.2) и (3.4) являются весьма существенными и играют важную роль при классификации многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа.

Если все метрики $g^{ij\alpha}$ невырожденные, то из теоремы 2.1 мы получаем, что при $\alpha \neq \beta$ условие (2.5) дает соотношение (3.1) на препятствующие тензоры; условие (2.6) эквивалентно соотношению (3.2); условие (2.7) эквивалентно соотношению (3.3); условие (2.8) эквивалентно соотношению (3.4); условие (2.9) в случае невырожденных метрик является прямым следствием соотношений (2.3)–(2.8) (в общем случае это не так — условие (2.9) является существенным в случае вырожденных метрик).

Несложно получить полную классификацию всех однокомпонентных скобок Пуассона вида (2.1). Докажем, что при $N = 1$ и любом n все препятствующие тензоры тождественно равны нулю. Действительно, в однокомпонентном случае соотношения (2.3), (2.5), (2.7) и (2.9) выполняются автоматически, соотношение (2.4) дает $\partial g^\alpha / \partial u = 2b^\alpha(u)$, а из соотношения (2.6) мы получаем, что $g^\alpha(u)b^\beta(u) = g^\beta(u)b^\alpha(u)$, при этом соотношение (2.8) следует из (2.4) и (2.6). Таким образом, в однокомпонентном случае при любом n для любых индексов α и β мы имеем $\Gamma^\alpha(u) = -b^\alpha(u)/g^\alpha(u) = -b^\beta(u)/g^\beta(u) = -(1/(2g^\alpha(u)))\partial g^\alpha / \partial u = -(1/(2g^\beta(u)))\partial g^\beta / \partial u = \Gamma^\beta(u)$, т.е. $g^\alpha(u) = c^\alpha g(u)$, где $g(u)$ — произвольная ненулевая функция, а c^α — произвольные ненулевые константы. Соответственно все препятствующие тензоры $T^{\alpha\beta}(u) = \Gamma^\beta(u) - \Gamma^\alpha(u)$ тождественно равны нулю, а все многомерные однокомпонентные скобки Пуассона вида (2.1) приводятся к постоянному виду локальной заменой единственной координаты $u = u^1$ (в вырожденном случае, если $g^\alpha(u) = 0$, то и $b^\alpha(u) = 0$ в силу соотношения (2.4)).

§ 4. Линейные скобки Пуассона гидродинамического типа, бесконечномерные алгебры Ли и фробениусовы алгебры

Каждая плоская метрика $g^{ij\alpha}(u)$ может быть приведена к постоянному виду локальной заменой координат. Приведем одну из метрик (для определенности

первую) произвольной невырожденной скобки Пуассона вида (2.1) к постоянному виду.

Теорема 4.1. *Если $g^{ij1} = \text{const}$ у невырожденной многомерной скобки Пуассона вида (2.1), то либо эта скобка Пуассона является постоянной в данных локальных координатах, либо у нее имеются ненулевые тензорные препятствия и она вовсе не может быть приведена к постоянному виду локальными заменами координат.*

Если в данных координатах $\Gamma_{jk}^{i\alpha} = 0$ при всех α , то $b_k^{ij\alpha} = 0$ при всех α и скобка Пуассона является постоянной в силу соотношения (2.4). Если для какого-то α не все коэффициенты связности $\Gamma_{jk}^{i\alpha}$ равны нулю, то и препятствующий тензор $T_{jk}^{i1\alpha}$, в данных локальных координатах совпадающий с $\Gamma_{jk}^{i\alpha}$, не равен нулю, а следовательно, данная скобка Пуассона не может быть приведена к постоянному виду локальными заменами координат.

Следующая важная теорема является простым следствием теоремы 3.1.

Теорема 4.2 ([1], [6]). *Если $g^{ij1} = \text{const}$ у невырожденной многомерной скобки Пуассона вида (2.1), то все остальные метрики линейны по локальным координатам u^i , а скобка Пуассона линейна по полям $u(x)$:*

$$g^{ij\alpha}(u) = (b_k^{ij\alpha} + b_k^{j\alpha})u^k + g_0^{ij\alpha}, \quad b_k^{ij\alpha} = \text{const}, \quad g_0^{ij\alpha} = \text{const}, \quad 2 \leq \alpha \leq n.$$

Пусть метрика g^{ij1} постоянна. Тогда в этих координатах $\Gamma_{jk}^{i1} = 0$. Из соотношения (3.4) следует, что в этих координатах $T^{ijk1\alpha} = \text{const}$ при всех α . Докажем, что и все коэффициенты $b_k^{ij\alpha}$ также постоянны в этих координатах. Действительно,

$$\begin{aligned} b_k^{ij\alpha} &= -g^{is\alpha}\Gamma_{sk}^{j\alpha} = -g^{is\alpha}\Gamma_{ks}^{j\alpha} = -g^{is\alpha}T_{ks}^{j1\alpha} \\ &= -g_{kq1}g^{is\alpha}g^{qr1}T_{rs}^{j1\alpha} = -g_{kq1}T^{qji1\alpha} = \text{const}. \end{aligned}$$

Мы использовали здесь симметричность всех связностей $\Gamma_{jk}^{i\alpha}$. Теперь линейность всех метрик в этих локальных координатах и линейность скобки по полям следуют из соотношения (2.4).

При $N \geq 3$ теорема 4.2 была доказана Дубровиным и Новиковым в [1]. Исследование случаев $N = 1$ и $N = 2$ в [1] ошибочно, так как основано на полученном в [1] неполном наборе соотношений на препятствующие тензоры, который не является достаточным для того, чтобы скобка (2.1) была скобкой Пуассона. В полном виде теорема 4.2 доказана автором в [6].

Приведем здесь кратко в нужном нам виде общую схему (см. [13]), восходящую к Софусу Ли и касающуюся взаимосвязей между алгебрами Ли и пуассоновыми структурами, линейно (возможно, неоднородно) зависящими от координат (скобки Ли–Пуассона). В общем бесконечномерном случае опишем специальные бесконечномерные алгебры Ли, отвечающие произвольным пуассоновым структурам, коэффициенты которых линейно (возможно, неоднородно) зависят от полевых переменных $u^i(x)$ и их производных $u_{(k)}^i$, $(k) = (k_1, \dots, k_n)$, где $u_{(k)}^i = \partial^{|k|}u^i/(\partial(x^1)^{k_1} \dots \partial(x^n)^{k_n})$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$. Оператор M^{ij} , определяющий скобку Пуассона (*пуассонову структуру*)

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} M^{ij} \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} d^n x, \quad (4.1)$$

называется *гамильтоновым*. Рассмотрим произвольные гамильтоновы операторы, задаваемые дифференциальными операторами с коэффициентами, линейно (вообще говоря, неоднородно) зависящими от полевых переменных $u^i(x)$ и их производных, т. е. гамильтоновы операторы вида

$$M^{ij} = (a_s^{ij,(k)(p)} u_{(k)}^s + b^{ij,(p)}) \frac{d^{|p|}}{d(x^1)^{p_1} \dots d(x^n)^{p_n}}, \quad (4.2)$$

где $a_s^{ij,(k)(p)}$ и $b^{ij,(p)}$ — константы. Рассмотрим бесконечномерное пространство S последовательностей $(\xi_1, \dots, \xi_N)$, где $\xi_i \in C^\infty(T^n)$ — гладкие функции на n -мерном торе. Тогда для ξ и η из пространства S

$$(\xi, M(\eta)) \equiv \int_{T^n} \xi_i M^{ij} \eta_j d^n x = \int_{T^n} u^s [\xi, \eta]_s d^n x + \int_{T^n} \xi_i b^{ij,(p)} \eta_{j(p)} d^n x. \quad (4.3)$$

Таким образом, на пространстве S определены билинейная операция $[\cdot, \cdot]$,

$$(\xi, \eta) \mapsto \zeta = [\xi, \eta] \in S, \quad \zeta_s = [\xi, \eta]_s = \sum_{i,j,(k),(p)} (-1)^{|k|} a_s^{ij,(k)(p)} (\xi_i \eta_{j(p)})_{(k)}, \quad (4.4)$$

и билинейная форма

$$\omega(\xi, \eta) = \int_{T^n} \xi_i b^{ij,(p)} \eta_{j(p)} d^n x. \quad (4.5)$$

Оператор M^{ij} вида (4.2) кососимметричен тогда и только тогда, когда на пространстве S кососимметричны билинейная операция (4.4) и билинейная форма (4.5), т. е. $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$ и $\omega(\xi, \eta) = -\omega(\eta, \xi)$. Оператор M^{ij} вида (4.2) гамильтонов тогда и только тогда, когда пространство S является алгеброй Ли относительно билинейной операции (4.4), т. е. эта билинейная операция кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$, и, кроме того, билинейная форма (4.5) является 2-коциклом на этой алгебре Ли, т. е. эта билинейная форма кососимметрична и удовлетворяет тождеству замкнутости

$$(d\omega)(\xi, \eta, \zeta) \equiv \omega([\xi, \eta], \zeta) + \omega([\eta, \zeta], \xi) + \omega([\zeta, \xi], \eta) = 0. \quad (4.6)$$

Отметим, что 2-коцикл $\omega(\xi, \eta)$, определяемый гамильтоновым оператором вида (4.2), *когомологичен нулю*, т. е. $\omega(\xi, \eta) = (df)(\xi, \eta) \equiv f([\xi, \eta])$, где f есть 1-форма на алгебре Ли S , тогда и только тогда, когда этот 2-коцикл может быть уничтожен сдвигом полевых переменных $u^i \mapsto u^i - c^i$, где c^i — произвольные константы, т. е. при условии $b^{ij,(p)} = a_k^{ij,(0)(p)} c^k$.

Лемма 4.1. *Многомерная скобка Пуассона вида (2.1) линейна (возможно, неоднородно) по полям $u(x)$ тогда и только тогда, когда*

$$g^{ij\alpha}(u) = (b_k^{ij\alpha} + b_k^{ji\alpha}) u^k + g_0^{ij\alpha}, \quad b_k^{ij\alpha} = \text{const}, \quad g_0^{ij\alpha} = \text{const}, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad (4.7)$$

при этом константы $b_k^{ij\alpha}$ и $g_0^{ij\alpha}$ удовлетворяют нетривиальным квадратичным соотношениям, следующим из соотношений (2.3)–(2.9) теоремы 2.1, и определяют n согласованных алгебр $\mathcal{B}^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq n$, фробениусова и квазифробениусова типа со структурными константами $b_k^{ij\alpha}$ и симметричными билинейными формами $g_0^{ij\alpha}$ на этих алгебрах (можно считать, что на одной N -мерной алгебре с базисом $e^1, \dots, e^N$ определены n согласованных умножений и n симметричных билинейных форм: $e^i \circ^\alpha e^j = b_k^{ij\alpha} e^k$, $\langle e^i, e^j \rangle_\alpha = g_0^{ij\alpha}$,

$1 \leq \alpha \leq n$). Каждой многомерной скобке Пуассона вида (2.1), линейной (возможно, неоднородно) по полям $u(x)$, отвечает бесконечномерная алгебра Ли специального типа с 2-коциклом специального вида на ней (алгебра Ли гидродинамического типа):

$$[\xi, \eta]_k = b_k^{ij\alpha} ((\eta_i)_\alpha \xi_j - \eta_j (\xi_i)_\alpha), \quad b_k^{ij\alpha} = \text{const}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N), \quad \xi_i(x) \in C^1(T^n), \quad (4.8)$$

$$\omega(\xi, \eta) = \int g_0^{ij\alpha} (\eta_j(x))_\alpha \xi_i(x) d^n x, \quad g_0^{ij\alpha} = \text{const}. \quad (4.9)$$

Классификация многомерных скобок Пуассона вида (2.1), линейных (возможно, неоднородно) по полям $u(x)$, отвечающих им бесконечномерных алгебр Ли и допустимых 2-коциклов на них, а также порождающих их алгебр $\mathcal{B}^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq n$, фробениусова и квазифробениусова типа является отдельной важной проблемой, пока до конца не решенной. В одномерном случае эта задача была решена Балинским и Новиковым в [7], где, как важно отметить, открыта ее связь с теорией фробениусовых и квазифробениусовых алгебр, хотя и в одномерном случае остались нерешенные вопросы. В многомерном случае при $n \geq 2$ эта задача рассматривалась автором в [6], при этом была развита теория соответствующих алгебр и получены полные классификационные результаты для малого числа компонент. Результаты по этой проблеме и, в частности, по теории соответствующих квазифробениусовых алгебр будут опубликованы в отдельной статье.

Теорема 4.3. *Каждая невырожденная многомерная скобка Пуассона вида (2.1) определяется некоторой бесконечномерной алгеброй Ли вида (4.8) с некоторым 2-коциклом вида (4.9) на ней, причем*

$$b_k^{ij1} = 0, \quad \det((b_k^{ij\alpha} + b_k^{ji\alpha})u^k + g_0^{ij\alpha}) \neq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq n. \quad (4.10)$$

Теорема 4.3 немедленно следует из теоремы 4.2 и леммы 4.1. Теория бесконечномерных алгебр Ли гидродинамического типа (4.8), (4.9) и алгебр $\mathcal{B}^\alpha$ с дополнительными условиями (4.10) развита автором в [6], где получены также полные классификационные результаты для малого числа компонент.

Пример 4.1. *Скобка Пуассона, порождаемая алгеброй Ли векторных полей на n -мерном торе T^n .* В этом случае $N = n$. Коммутатор векторных полей ξ и η имеет вид

$$[\xi, \eta]_k = \xi_s \frac{\partial \eta_k}{\partial x^s} - \eta_s \frac{\partial \xi_k}{\partial x^s}, \quad (4.11)$$

где $\xi = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$, $\eta = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x))$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $x \in T^n$. Для соответствующего гамильтонова оператора M^{ij} мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{T^n} u^k [\xi, \eta]_k d^n x &= \int_{T^n} u^k \left(\xi_i \frac{\partial \eta_k}{\partial x^i} - \eta_j \frac{\partial \xi_k}{\partial x^j} \right) d^n x \\ &= \int_{T^n} \xi_i \left(u^i \frac{d}{dx^j} + u^j \frac{d}{dx^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \eta_j d^n x = \int_{T^n} \xi_i M^{ij} \eta_j d^n x, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$M^{ij} = u^i \frac{d}{dx^j} + u^j \frac{d}{dx^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = (u^i \delta^{j\alpha} + u^j \delta^{i\alpha}) \frac{d}{dx^\alpha} + \delta_k^i \delta^{j\alpha} u_\alpha^k, \quad (4.13)$$

$$g^{ij\alpha} = u^i \delta^{j\alpha} + u^j \delta^{i\alpha}, \quad b_k^{ij\alpha} = \delta_k^i \delta^{j\alpha}. \quad (4.14)$$

Из соотношений теоремы 2.1 следует, что все 2-циклы на алгебре Ли векторных полей на T^n , которые не выводят соответствующую пуассонову структуру из класса многомерных пуассоновых структур гидродинамического типа (2.1) (см. формулы (4.3) и (4.5)), когомологичны нулю. При $n \leq 2$ пуассонова структура (4.13) является невырожденной, а при $n > 2$ все метрики в (4.13) вырождены. При $n = 1$ метрика имеет вид $g(u) = 2u$, а гамильтонов оператор — вид

$$M = 2u \frac{d}{dx} + u_x. \quad (4.15)$$

При $n = 2$ обе метрики являются невырожденными и закононеопределенными:

$$(g^{ij1}) = \begin{pmatrix} 2u^1 & u^2 \\ u^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij2}) = \begin{pmatrix} 0 & u^1 \\ u^1 & 2u^2 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

а гамильтонов оператор имеет вид

$$(M^{ij}) = \begin{pmatrix} 2u^1 & u^2 \\ u^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^1} + \begin{pmatrix} 0 & u^1 \\ u^1 & 2u^2 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^2} + \begin{pmatrix} u_{x^1}^1 & u_{x^1}^2 \\ u_{x^2}^1 & u_{x^2}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Пуассонова структура (4.17) не может быть приведена к постоянному виду локальной заменой координат, так как препятствующий тензор T^{ijk12} не равен нулю тождественно:

$$\begin{aligned} T^{ijk\alpha\beta} &= g^{ks\beta} g^{ir\alpha} (\Gamma_{rs}^{j\beta} - \Gamma_{rs}^{j\alpha}) = -g^{ir\alpha} b_r^{kj\beta} + g^{ks\beta} b_s^{ij\alpha} \\ &= -g^{ik\alpha} \delta^{j\beta} + g^{ki\beta} \delta^{j\alpha} = - (u^i \delta^{k\alpha} + u^k \delta^{i\alpha}) \delta^{j\beta} + (u^i \delta^{k\beta} + u^k \delta^{i\beta}) \delta^{j\alpha} \\ &= u^i (\delta^{j\alpha} \delta^{k\beta} - \delta^{j\beta} \delta^{k\alpha}) + u^k (\delta^{j\alpha} \delta^{i\beta} - \delta^{j\beta} \delta^{i\alpha}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

В частности, $T^{11212} = u^1$.

Этот пример связан с двумерной эйлеровой гидродинамикой идеальной несжимаемой жидкости (с дальнейшей редукцией к бездивергентным векторным полям).

Теорема 4.4 [6]. *Если при $N = n = 2$ для невырожденной пуассоновой структуры вида (2.1) препятствующий тензор $T_{jk}^{i12}(u)$ не равен тождественно нулю, т.е. эта пуассонова структура не приводится к постоянному виду локальной заменой координат, то она приводится к каноническому виду, порождаемому плоскими метриками*

$$(g^{ij1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij2}) = \begin{pmatrix} 2u^2 & u^1 + u^2 \\ u^1 + u^2 & 2u^1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Обе метрики (4.19) являются закононеопределенными и поэтому, в частности, если одна из метрик двумерной двухкомпонентной невырожденной скобки Пуассона гидродинамического типа законоопределена, то эта скобка Пуассона приводится к постоянному виду. Пуассонова структура, порождаемая каноническими плоскими метриками (4.19), связана с алгеброй Ли векторных полей на двумерном торе T^2 .

В силу теоремы 4.1 очевидно, что каноническая пуассонова структура, порождаемая метриками (4.19), не может быть приведена к постоянному виду локальными заменами координат. Препятствующий тензор T^{ijk12} этой пуассоновой структуры не равен нулю: $T^{ijk12} = g^{ks2} g^{ir1} (\Gamma_{rs}^{j2} - \Gamma_{rs}^{j1}) = g^{ks2} \varepsilon^i \delta^{ir} \Gamma_{rs}^{j2} =$

$g^{ks2}\varepsilon^i\Gamma_{is}^{j2} = -\varepsilon^i b_i^{kj2}$, $\varepsilon^1 = 1$, $\varepsilon^2 = -1$, в частности, $T^{2112} = b_2^{112} = 1$. Пуассонова структура

$$\{w^i(x), w^j(y)\} = (w^i(x)\delta^{j\alpha} + w^j(x)\delta^{i\alpha})\delta_\alpha(x-y) + \delta_k^i\delta^{j\alpha}w_\alpha^k(x)\delta(x-y),$$

порождаемая алгеброй Ли векторных полей на двумерном торе T^2 (пример 4.1), приводится к каноническому виду, задаваемому метриками (4.19), локальной квадратичной заменой координат [6]:

$$w^1 = \frac{1}{2}((u^1)^2 - (u^2)^2), \quad w^2 = \frac{1}{2}(u^1 + u^2). \quad (4.20)$$

Каждая двумерная двухкомпонентная невырожденная пуассонова структура гидродинамического типа либо приводится к постоянному виду, либо порождается алгеброй Ли векторных полей на двумерном торе T^2 [6]. При $n > 2$ каждая многомерная двухкомпонентная невырожденная пуассонова структура гидродинамического типа либо приводится к постоянному виду, либо приводится локальной заменой координат и унимодулярной заменой независимых пространственных переменных x^i к двумерной канонической скобке Пуассона, задаваемой метриками (4.19) [6]. Отметим, что каждая постоянная многомерная (любой размерности) двухкомпонентная скобка Дубровина–Новикова приводится унимодулярной заменой независимых пространственных переменных x^i к не более чем трехмерной постоянной скобке Дубровина–Новикова.

§5. Согласованные метрики

Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *согласованными*, если для любой линейной комбинации этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 — произвольные константы, коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивиты и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны тем же самым линейным соотношением: $\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u)$, $R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,kl}^{ij}(u)$ [8]. Индексы коэффициентов связностей и тензоров кривизны поднимаются и опускаются соответствующими им метриками: $\Gamma_k^{ij}(u) = g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, $R_{kl}^{ij}(u) = g^{is}(u)R_{skl}^j(u)$. Если для любой линейной комбинации метрик выполняется указанное выше соотношение для связностей Леви-Чивиты, то метрики называются *почти согласованными*. Теория согласованных и почти согласованных метрик построена в работе автора [8], она тесно связана с теорией согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа (локальных и нелокальных), теорией фробениусовых многообразий и интегрируемыми системами. Напомним, что скобки Пуассона называются *согласованными*, если любая их линейная комбинация является скобкой Пуассона [14].

Теорема 5.1 [9]. *Метрики $g^{ij\alpha}(u)$, $1 \leq \alpha \leq n$, определяющие многомерную скобку Пуассона вида (2.1), попарно согласованы. Одномерные скобки Дубровина–Новикова, образующие многомерную скобку Пуассона (см. лемму 2.1), также попарно согласованы.*

Эта важная теорема немедленно следует из тензорных соотношений согласованности метрик ([8], [15]). Рассмотрим для двух произвольных псевдоримановых метрик $g^{ij\alpha}(u)$ и $g^{ij\beta}(u)$ аналог препятствующих тензоров, определявшихся ранее для плоских метрик многомерных скобок Дубровина–Новикова:

$T_{jk}^{i\alpha\beta}(u) = \Gamma_{jk}^{i\beta}(u) - \Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$, $T^{ijka\beta}(u) = g^{ks\beta}(u)g^{ir\alpha}(u)T_{rs}^{ja\beta}(u)$, $\Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$ — связность Леви-Чивиты, порождаемая метрикой $g^{ij\alpha}(u)$.

Теорема 5.2 [8], [15]. *Две метрики $g^{ij\alpha}(u)$ и $g^{ij\beta}(u)$ согласованы тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (3.1) и (3.3) теоремы 3.1, причем условие почти согласованности эквивалентно соотношению (3.1).*

Отметим, что именно соотношения (3.1) и (3.3) для плоских метрик многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа были найдены Дубровиным и Новиковым в [1].

Таким образом, описание и классификация многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа соответствует описанию и классификации важного специального подкласса согласованных одномерных скобок Пуассона гидродинамического типа, выделяемого дополнительными соотношениями (3.2) и (3.4). Задача описания согласованных одномерных скобок Пуассона гидродинамического типа, эквивалентная описанию *плоских пучков согласованных метрик* или, другими словами, *локальных квазифробениусовых многообразий*, играет важную роль в теории интегрируемых систем гидродинамического типа, теории фробениусовых многообразий, современной дифференциальной геометрии и математической физике (см. [16]). Задача описания всех неособых пар согласованных плоских метрик решена автором в [17], [18], [15], где получены нелинейные уравнения, описывающие все неособые пары согласованных плоских метрик и являющиеся нетривиальной нелинейной редукцией уравнений Ламе, определяющих все криволинейные ортогональные системы координат в плоском пространстве, доказана интегрируемость этих нелинейных уравнений методом обратной задачи и найдена явная процедура интегрирования, при которой интегрирование сведено к решению линейных задач (таким образом, получена локальная классификация полупростых квазифробениусовых многообразий); см. также [8], где эти результаты были анонсированы. Впоследствии в [19] для этих нелинейных уравнений была указана также пара Лакса.

Пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называется *неособой*, если собственные значения этой пары метрик, т.е. корни уравнения $\det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0$, различны (ситуация пары метрик общего положения).

Теорема 5.3 [8]. *Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то эти метрики согласованы тогда и только тогда, когда для аффинора $v_j^i(u) = g_1^{is}(u)g_{2,sj}(u)$ тензор Нейенхейса*

$$N_{ij}^k(u) = v_i^s(u) \frac{\partial v_j^k}{\partial u^s} - v_j^s(u) \frac{\partial v_i^k}{\partial u^s} + v_s^k(u) \frac{\partial v_i^s}{\partial u^j} - v_s^k(u) \frac{\partial v_j^s}{\partial u^i}$$

тождественно равен нулю ($g_{2,sj}(u)$ — ковариантная метрика: $g_2^{is}(u)g_{2,sj}(u) = \delta_j^i$).

В этом случае по теореме Нейенхейса [20] существуют локальные координаты (вообще говоря, комплексные), в которых аффинор $v_j^i(u)$ является диагональным: $v_j^i(u) = \lambda^i(u)\delta_j^i$. В этих локальных координатах обе метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ также обязаны быть диагональными. Действительно, собственные значения $\lambda^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, аффинора $v_j^i(u)$ совпадают с собственными значениями пары метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ и по условию являются различными: $\lambda^i(u) \neq \lambda^j(u)$

при $i \neq j$. В специальных координатах, в которых аффиноид $v_j^i(u)$ является диагональным, имеем $g_1^{ij}(u) = \lambda^i(u)g_2^{ij}(u)$. В силу симметрии метрик получаем $(\lambda^i(u) - \lambda^j(u))g_2^{ij}(u) = 0$; поэтому если $i \neq j$, то $g_1^{ij}(u) = g_2^{ij}(u) = 0$, т. е. метрики диагональны. Более того, имеет место следующая важная теорема.

Теорема 5.4 [8]. *Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то эти метрики согласованы тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ (возможно, комплексные), такие, что $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — функции одной переменной (возможно, комплексные).*

Отметим, что для произвольной пары метрик условие, что соответствующий тензор Нейенхейса тождественно равен нулю, эквивалентно почти согласованности метрик [8].

6. Классификационная теорема

Теорема 6.1. *Если для невырожденной многомерной скобки Пуассона вида (2.1) одна из метрик $g^{ij\alpha}(u)$ образует неособые пары со всеми остальными метриками этой скобки, то эта скобка Пуассона приводится к постоянному виду локальной заменой координат.*

Докажем, что все препятствующие тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u)$ тождественно равны нулю. Без ограничения общности можно считать, что метрика $g^{ij1}(u)$ образует неособые пары со всеми остальными метриками скобки. Пусть $\beta \neq 1$. По теореме 5.1 метрики $g^{ij\beta}(u)$ и $g^{ij1}(u)$ являются согласованными. По теореме 5.4 существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ (возможно, комплексные), такие, что $g^{ij\beta}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g^{ij1}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — функции одной переменной (возможно, комплексные). В этих локальных координатах получаем: $\Gamma_{jk}^{i\beta}(u) = 0$, если все индексы i, j, k различны; $\Gamma_{ik}^{i\beta}(u) = \Gamma_{ki}^{i\beta}(u) = -(1/(2g^i(u)))(\partial g^i/\partial u^k)$ для любых индексов i, k ; $\Gamma_{jj}^{i\beta}(u) = (g^i(u)/(2(g^j(u))^2))(\partial g^i/\partial u^j)$ при $i \neq j$. Для препятствующего тензора $T^{ijk1\beta}(u)$ в рассматриваемых локальных координатах получаем: $T^{ijk1\beta}(u) = 0$, если все индексы i, j, k различны; $T^{ijj1\beta}(u) = T^{iij1\beta}(u) = 0$ при $i \neq j$; $T^{iii1\beta}(u) = ((g^i(u))^2/2)(df^i(u^i)/du^i)$; $T^{jjj1\beta}(u) = ((f^j(u^j) - f^j(u^j))/2)(\partial g^j/\partial u^j)$ при $i \neq j$. Из соотношения (3.2) теоремы 3.1 следует, что $T^{iii1\beta} = 0$, $f^i(u^i) = \mu^i = \text{const}$, и $T^{ijj1\beta}(u) = 0$ при $i \neq j$, $g^i(u) = g^i(u^i)$ — функции одной переменной. Таким образом, $T^{ijk1\beta}(u) = 0$ для любого β . Поскольку для любых α и β имеет место тождество $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u) = T_{jk}^{i1\beta}(u) - T_{jk}^{i1\alpha}(u)$, получаем, что $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u) = 0$ для любых α и β .

Таким образом, все пары метрик, определяющие скобки Дубровина–Новикова, не приводимые к постоянному виду, в частности, все непостоянные канонические пары метрик (они связаны с нетривиальными алгебрами Ли гидродинамического типа и нетривиальными квазифробениусовыми алгебрами) являются *особыми*, т. е. имеют совпадающие собственные значения. В частности, для единственной непостоянной канонической пары двухкомпонентных метрик (4.19) имеем $\det(g^{ij2} - \lambda g^{ij1}) = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = u^2 - u^1$. Теория особых невырожденных многомерных (а также всех вырожденных) скобок Дубровина–Новикова и связанных с ними алгебр пока далека от завершения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *О скобках Пуассона гидродинамического типа*, Докл. АН СССР, **279**:2 (1984), 294–297.
- [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема*, Докл. АН СССР, **270**:4 (1983), 781–785.
- [3] С. П. Царев, *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа*, Изв. АН СССР, сер. матем., **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория*, УМН, **44**:6 (1989), 29–98.
- [5] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *On the integrability of $(2 + 1)$ -dimensional quasilinear systems*, Comm. Math. Phys., **248** (2004), 187–206.
- [6] О. И. Мохов, *О скобках Пуассона типа Дубровина–Новикова (ДН-скобки)*, Функц. анализ и его прил., **22**:4 (1988), 92–93.
- [7] А. А. Балинский, С. П. Новиков, *Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли*, Докл. АН СССР, **283**:5 (1985), 1036–1039.
- [8] О. И. Мохов, *Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики*, Функц. анализ и его прил., **35**:2 (2001), 24–36; <http://xxx.arxiv.org/abs/math/0005051>.
- [9] О. И. Мохов, *Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы*, УМН, **53**:3 (1998), 85–192.
- [10] I. Dorfman, *Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations*, John Wiley & Sons, Chichester, 1993.
- [11] Н. И. Гринберг, *О скобках Пуассона гидродинамического типа с вырожденной метрикой*, УМН, **40**:4 (1985), 217–218.
- [12] O. I. Mokhov, *Hamiltonian systems of hydrodynamic type and constant curvature metrics*, Phys. Lett. A, **166**:3, 4 (1992), 215–216.
- [13] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, *Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли*, Функц. анализ и его прил., **15**:3 (1981), 23–40.
- [14] F. Magri, *A simple model of the integrable Hamiltonian equation*, J. Math. Phys., **19**:5 (1978), 1156–1162.
- [15] O. I. Mokhov, *Compatible flat metrics*, J. Appl. Math., **2**:7 (2002), 337–370; <http://xxx.arxiv.org/abs/math/0201224>.
- [16] B. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*, Lecture Notes in Math., **1620** (1996), 120–348.
- [17] О. И. Мохов, *Об интегрируемости уравнений для неособых пар согласованных плоских метрик*, Теор. матем. физика, **130**:2 (2002), 233–250; <http://xxx.arxiv.org/abs/math/0005081>.
- [18] О. И. Мохов, *Плоские пучки метрик и интегрируемые редукции уравнений Ламе*, УМН, **56**:2 (2001), 221–222.
- [19] E. V. Ferapontov, *Compatible Poisson brackets of hydrodynamic type*, J. Phys. A: Math. Gen., **34** (2001), 2377–2388; <http://xxx.arxiv.org/abs/math/0005221>.
- [20] A. Nijenhuis, *X_{n-1} -forming sets of eigenvectors*, Indag. Math., **13**:2 (1951), 200–212.

Центр нелинейных исследований при Институте

теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

e-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru, mokhov@bk.ru

Поступило в редакцию

11 августа 2006 г.