Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Фейгин, Бозонные формулы для аффинных функций ветвления, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 1, 63–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2891>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:25:16

УДК 517.986.5

Бозонные формулы для аффинных функций ветвления*

© 2008. Е. Б. Фейгин

Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — аффинная нескрученная¹⁾ алгебра Каца–Мууди, $\mathfrak{g}_{\text{fin}}$ — соответствующая простая конечномерная алгебра,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\text{fin}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d,$$

где K — центральный элемент и $[d, x \otimes t^i] = -ix \otimes t^i$ для $x \in \mathfrak{g}$. Зафиксируем картановское разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$, где

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\text{fin}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$$

и $\mathfrak{h}_{\text{fin}}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}_{\text{fin}}$. Положим также

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K, \quad \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_{\text{fin}} \oplus \mathbb{C}K.$$

Пусть $P_k^+ \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$ — множество доминантных интегрируемых весов алгебры $\mathfrak{g}$ уровня k . Обозначим через $P_k'^+ \hookrightarrow \mathfrak{h}'^*$ образ множества P_k^+ при ограничении $\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}'^*$, $\lambda \mapsto \lambda'$. Для $\lambda \in P_k^+$ обозначим через L_λ неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ , а через $L_{\lambda'}$ — представление алгебры $\mathfrak{g}'$, которое совпадает с L_λ как векторное пространство, а действие алгебры $\mathfrak{g}'$ является ограничением действия алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть $\lambda_1 \in P_{k_1}'^+$, $\lambda_2 \in P_{k_2}'^+$. Рассмотрим разложение тензорного произведения $\mathfrak{g}'$ -модулей

$$L_{\lambda_1'} \otimes L_{\lambda_2'} = \bigoplus_{\mu' \in P_{k_1+k_2}'^+} L_{\mu'} \otimes C_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\mu'}. \quad (1)$$

Заметим, что пространство $C_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\mu'}$ может быть отождествлено с пространством старших векторов $\mathfrak{h}'$ -веса μ' в $L_{\lambda_1'} \otimes L_{\lambda_2'}$. Для того чтобы определить характер пространства $C_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\mu'}$, мы полагаем $\lambda_1(d) = \lambda_2(d) = \mu(d) = 0$ (заметим, что для любого $\lambda' \in P_k'^+$ существует $\bar{\lambda} \in P_k^+$, такой, что $\bar{\lambda}(d) = 0$ и $\bar{\lambda}|_{\mathfrak{h}'} = \lambda'$). Таким образом мы фиксируем градуировочный оператор d на $L_{\lambda_1'} \otimes L_{\lambda_2'}$. Положим

$$c_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\mu'}(q) = \text{ch}_q C_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\mu'} = \text{Tr } q^d|_{C_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\mu'}}.$$

*Работа была частично поддержана грантами РФФИ 06-01-00037 и НШ 4401.2006.2.

¹⁾В работе рассматриваются только нескрученные аффинные алгебры. Таким образом, в дальнейшем, говоря об аффинных алгебрах, мы имеем в виду их нескрученный вариант.

Эти функции называются функциями ветвления алгебры $\mathfrak{g}$. Заметим, что в конформной теории поля функции ветвления появляются как характеры пространств состояний косет-теорий. Эти характеры отличаются от $c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q)$ на множитель $q^{\Delta_{\lambda'_1} + \Delta_{\lambda'_2} - \Delta_{\mu'}}$, где $\Delta_{\lambda'}$ — конформный вес, соответствующий весу λ' (см. [4]).

Существуют разные подходы к изучению функций $c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q)$ ([1], [10], [12], [3], [14], [15], [16], [5], [6]). Эти подходы дают формулы разных типов в некоторых частных случаях. В нашей работе мы используем гомологическую технику для получения двух бозонных формул для $c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q)$ в случае общей аффинной алгебры Каца–Муди. Опишем кратко наши результаты.

Напомним теорему Гарланда–Леповского:

$$H_p(\mathfrak{n}_-, L_\mu) \simeq \bigoplus_{\substack{w \in W \\ l(w)=p}} \mathbb{C}_{w*\mu}, \quad (2)$$

где W — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}$, $w*\mu = w(\mu + \rho) - \rho$ и $l(w)$ — длина элемента w . Заметим, что формула (2) устанавливает изоморфизм $\mathfrak{h}$ -модулей, где через $\mathbb{C}_{w*\mu}$ обозначен одномерный $\mathfrak{h}$ -модуль веса $w*\mu$. Из нее мы получаем, что для $\mu, \nu \in P_k^+$ гомологии $H_p(\mathfrak{n}_-, L_\mu)^\nu$ являются нулевыми при $p > 0$ или $\mu \neq \nu$ (верхний индекс обозначает соответствующее $\mathfrak{h}$ -весовое подпространство). Кроме того,

$$H_0(\mathfrak{n}_-, L_\mu)^\mu \simeq \mathbb{C}_\mu.$$

Таким образом, из (1) получаем

$$H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'} \simeq C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'} \delta_{0,p}$$

и, значит,

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \text{ch}_q H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'} = c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q). \quad (3)$$

Подсчитаем теперь ту же эйлерову характеристику, используя БГГ-резольвенту

$$\cdots \rightarrow F_p \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow L_{\lambda_1} \rightarrow 0 \quad (4)$$

для L_{λ_1} , где $F_p = \bigoplus_{l(w)=p} M_{w*\lambda_1}$ и $M_{w*\lambda_1}$ — соответствующий модуль Верма. Тензорно умножив БГГ-резольвенту на L_{λ_2} , мы получим $U(\mathfrak{n}_-)$ -свободную резольвенту

$$\cdots \rightarrow F_p \otimes L_{\lambda_2} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \otimes L_{\lambda_2} \rightarrow L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2} \rightarrow 0 \quad (5)$$

для $L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2}$. Таким образом, гомологии $H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'}$ могут быть вычислены как гомологии комплекса

$$\cdots \rightarrow [\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} (F_p \otimes L_{\lambda_2})]^{\mu'} \rightarrow \cdots \rightarrow [\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} (F_0 \otimes L_{\lambda_2})]^{\mu'} \rightarrow 0, \quad (6)$$

и эйлерова характеристика (3) дается формулой

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \sum_{l(w)=p} q^{(w*\lambda_1)d} \text{ch}_q(L_{\lambda_2})^{(\mu - w*\lambda_1)'}. \quad (7)$$

Мы получили первую бозонную формулу для $c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q)$.

Для того чтобы получить вторую бозонную формулу, мы заменяем «произведение» $L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2}$ на «отношение» $L_{\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*$ и рассматриваем гомологии $H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*)$, $\lambda_1 \in P_{k_1}^+$, $\mu \in P_{k_1+k_2}^+$. Мы показываем, что

$$H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2} = 0 \quad \text{при } p > 0$$

и

$$H_0(\mathfrak{n}_-, L_{\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2} \simeq (C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'})^*.$$

Таким образом,

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \operatorname{ch}_q H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2} = c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q^{-1}).$$

Используя БГГ-резольвенту для L_{μ} , мы переписываем эту эйлерову характеристику в терминах характеров пространств $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{U}(\mathfrak{n}_-)} (M_{w*\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*))^{\lambda'_2}$ и, таким образом, получаем следующую формулу:

$$c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \sum_{l(w)=p} q^{-(w*\mu)(d)} \operatorname{ch}_q(L_{\lambda_1})^{(w*\mu-\lambda_2)'} \quad (8)$$

В случае $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ это выражение совпадает с известной формулой из работ [1], [10], [12] в виде, приведенном в [5].

Работа организована следующим образом.

В §1 мы фиксируем основные обозначения для аффинных алгебр Каца–Муди. В §2 мы получаем первую бозонную формулу для функций ветвления $c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q)$, используя гомологии $H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'}$. В §3 мы получаем вторую бозонную формулу для $c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q)$, используя гомологии «отношения» $H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2}$.

§1. Аффинные алгебры Каца–Муди

В этом параграфе мы зафиксируем основные обозначения для аффинных алгебр Каца–Муди, следуя книгам [9], [11].

Пусть $\mathfrak{g}_{\text{fin}}$ — простая конечномерная алгебра Ли с картановским разложением $\mathfrak{g}_{\text{fin}} = \mathfrak{n}_{\text{fin}} \oplus \mathfrak{h}_{\text{fin}} \oplus (\mathfrak{n}_-)_{\text{fin}}$. Рассмотрим соответствующую аффинную алгебру Каца–Муди

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\text{fin}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d,$$

где K — центральный элемент и $[d, x \otimes t^i] = -ix \otimes t^i$.

Зафиксируем картановское разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$, где

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\text{fin}} \otimes 1 \oplus \mathfrak{g}_{\text{fin}} \otimes t\mathbb{C}[t],$$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\text{fin}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d,$$

$$\mathfrak{n}_- = (\mathfrak{n}_-)_{\text{fin}} \otimes 1 \oplus \mathfrak{g}_{\text{fin}} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}],$$

и положим $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_{\text{fin}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_{\text{fin}} \oplus \mathbb{C}K \hookrightarrow \mathfrak{g}'$.

Пусть $\alpha_i^{\vee} \in \mathfrak{h}$, $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$, $i = 1, \dots, n$, — простые корень и корни. Заметим, что $\alpha_i^{\vee}$ образуют базис в $\mathfrak{h}_{\text{fin}} \otimes 1 \oplus \mathbb{C}K$. Обозначим через $\mathfrak{sl}_2^{(i)}$ алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2$ с

базисом $e_i, \alpha_i^\vee, f_i$, где $e_i, f_i, i = 1, \dots, n$, — образующие Шевалле, $e_i \in \mathfrak{n}, f_i \in \mathfrak{n}_-$. Заметим, что

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где Δ_+ и Δ_- — множества положительных и отрицательных корней и $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = \alpha(h)x \text{ для любого } h \in \mathfrak{h}\}$. Пространства $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ порождены e_i и f_i соответственно. Пусть

$$\mathfrak{u}_-^{(i)} = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta_- \\ \alpha \neq -\alpha_i}} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (9)$$

Заметим, что

$$\mathfrak{g}_{-\alpha_i} \simeq \mathfrak{n}_- / \mathfrak{u}_-^{(i)}.$$

Обозначим через P_k^+ множество интегрируемых доминантных весов алгебры $\mathfrak{g}$ уровня k ,

$$P_k^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda(K) = k\},$$

и пусть $P_k'^+ \hookrightarrow \mathfrak{h}'^*$ обозначает образ этого множества при проекции $\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}'^*$, $\lambda \mapsto \lambda'$. Для $\lambda \in P_k^+$ пусть L_λ — интегрируемый $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом λ и старшим вектором $v_\lambda \in L_\lambda$, таким, что

$$\mathfrak{n}v_\lambda = 0, \quad \mathfrak{U}(\mathfrak{n}_-)v_\lambda = L_\lambda, \quad h(v_\lambda) = \lambda(h)v_\lambda, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

Обозначим через $L_{\lambda'}$ представление алгебры $\mathfrak{g}'$, являющееся ограничением действия алгебры $\mathfrak{g}$ ($L_{\lambda'}$ и L_λ совпадают как векторные пространства). Для $\alpha \in \mathfrak{h}'^*$ положим

$$(L_\lambda)^\alpha = \{v \in L_\lambda : hv = \alpha(h)v \text{ для любого } h \in \mathfrak{h}'\}.$$

Отметим также, что модуль L_λ градуирован оператором d . Соответствующие характеры (струнные функции) определяются формулой

$$\text{ch}_q(L_\lambda)^\alpha = \text{Tr } q^d|_{(L_\lambda)^\alpha}.$$

Зафиксируем $\lambda'_1 \in P_{k_1}'^+, \lambda'_2 \in P_{k_2}'^+$ и рассмотрим разложение тензорного произведения $\mathfrak{g}'$ -модулей на неприводимые компоненты:

$$L_{\lambda'_1} \otimes L_{\lambda'_2} = \bigoplus_{\mu' \in P_{k_1+k_2}'^+} C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'} \otimes L_{\mu'}. \quad (10)$$

Каждое пространство $C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}$ может быть отождествлено с подпространством старших векторов $\mathfrak{h}'$ -веса μ' в $L_{\lambda'_1} \otimes L_{\lambda'_2}$. Для того чтобы определить его характер, необходимо зафиксировать действие оператора d на каждом $\mathfrak{g}'$ -модуле $L_{\lambda'}$. Заметим, что если $\lambda|_{\mathfrak{h}'} = \bar{\lambda}|_{\mathfrak{h}'}$, то $L_{\lambda'} \simeq L_{\bar{\lambda}'}$. Таким образом, действие d на $L_{\lambda'}$ зависит от выбора $\lambda(d)$. Нам удобно выбрать нормализацию $\lambda_1(d) = \lambda_2(d) = \mu(d) = 0$. Этот выбор определяет характеры пространств $L_{\lambda'_1} \otimes L_{\lambda'_2}$ и $C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}$. Характер $\text{ch}_q C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}$ называется функцией ветвления алгебры $\mathfrak{g}$ и обозначается через $c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q)$,

$$c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q) = \text{Tr } q^d|_{C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}}.$$

Отметим, что пространства $C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}$ появляются в конформной теории поля как пространства состояний косет-теорий [4]. Напомним основные определения. Конструкция Сугавары задает структуру представления алгебры Вирасоро Vir с образующими L_n на каждом $L_{\lambda'}$. В частности, для оператора L_0 имеем

$$L_0 v_{\lambda} = \Delta_{\lambda'} v_{\lambda}, \quad [L_0, x \otimes t^i] = -ix \otimes t^i$$

(константа $\Delta_{\lambda'}$ называется конформным весом). Применяя ГКО-конструкцию [7], мы получаем действие алгебры Вирасоро на тензорном произведении $L_{\lambda'_1} \otimes L_{\lambda'_2}$, коммутирующее с диагональным действием алгебры $\mathfrak{g}'$. А именно,

$$L_n^{\text{GKO}} = L_n^{(1)} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes L_n^{(2)} - L_n^{\text{diag}},$$

где $L_n^{(1)}$, $L_n^{(2)}$ и L_n^{diag} — операторы Сугавары, действующие на $L_{\lambda'_1}$, $L_{\lambda'_2}$ и $L_{\lambda'_1} \otimes L_{\lambda'_2}$ соответственно. Таким образом, мы получили структуру Vir -модуля на $C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}$ и равенство

$$\text{Tr } q^{L_0} |_{C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}} = c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q) q^{\Delta_{\lambda'_1} + \Delta_{\lambda'_2} - \Delta_{\mu'}},$$

где левая часть является характером пространства состояний соответствующей косет-модели.

В дальнейшем нам понадобится теорема Гарланда–Леповского о гомологиях алгебры $\mathfrak{n}_-$. Напомним основные формулировки.

Пусть W — группа Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденная простыми отражениями s_i . Обозначим через $l(w)$ длину элемента $w \in W$. Напомним, что $*$ -действие группы W на $\mathfrak{h}^*$ дается формулой $w * \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, где $\rho(\alpha_i^{\vee}) = 1$. Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1.1. (а) Если $\lambda \in P_k^+$ и $w * \lambda \in P_k^+$, то $w = e$.

(б) Если $(w * \lambda)\alpha_i^{\vee} \leq -1$ для некоторого $\lambda \in P_k^+$, то $l(s_i w) < l(w)$.

Доказательство. Для доказательства п. (а) перепишем равенство $w * \lambda = \lambda_1$ в виде $w(\lambda + \rho) = \lambda_1 + \rho$. Тогда если $\lambda, \lambda_1 \in P_k^+$, то

$$(\lambda + \rho)\alpha_i^{\vee} > 0, \quad (\lambda_1 + \rho)\alpha_i^{\vee} > 0 \quad \text{для любого } i.$$

Таким образом, $\lambda + \rho$ и $\lambda_1 + \rho$ являются элементами доминантной камеры Вейля и, значит, $\lambda = \lambda_1$. Но из равенства $w * \lambda = \lambda$ следует, что $w = e$ (см., например, лемму 3.2.5 в [11]).

Докажем п. (б). Для этого заметим, что неравенство $(w * \lambda)\alpha_i^{\vee} \leq -1$ равносильно неравенству

$$(\lambda + \rho)(w^{-1}\alpha_i^{\vee}) \leq 0.$$

Мы получаем, что $w^{-1}\alpha_i^{\vee} = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^{\vee}$, причем $c_j \leq 0$. Таким образом, $l(w^{-1}s_i) < l(w)$. Лемма доказана. $\square$

Следующая теорема доказана в [8]:

Теорема. Для любого $\lambda \in P_k^+$ имеется изоморфизм $\mathfrak{h}$ -модулей

$$H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda}) \simeq \bigoplus_{\substack{w \in W \\ l(w)=p}} \mathbb{C}_{w * \lambda},$$

где $\mathbb{C}_{w * \lambda}$ — одномерный $\mathfrak{h}$ -модуль веса $w * \lambda$.

В дальнейшем нам понадобится БГГ-резольвента интегрируемого неприводимого представления L_λ ([2], [11]). Напомним, что БГГ-резольвента — это точная последовательность $\mathfrak{g}$ -модулей и $\mathfrak{g}$ -гомоморфизмов

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{\substack{w \in W \\ l(w)=p}} M_{w*\lambda} \rightarrow \cdots \rightarrow M_\lambda \rightarrow L_\lambda \rightarrow 0, \quad (11)$$

где M_μ — модуль Верма.

§2. Первая гомологическая бозонная формула

Лемма 2.1. Для любых $\lambda_1 \in P_{k_1}^+$, $\lambda_2 \in P_{k_2}^+$ и $\mu \in P_{k_1+k_2}^+$

$$C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'} \simeq H_0(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'}, \quad H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'} = 0 \quad \text{при } p > 0.$$

Доказательство. Напомним, что если $\lambda \in P_k^+$ и $e \neq w \in W$, то $w * \lambda \notin P_k^+$ и $(w * \lambda)' \notin P_k^{+'}$. Таким образом, из теоремы Гарланда–Леповского получаем, что $H_p(\mathfrak{n}_-, L_\lambda)^\mu = 0$, если $p \neq 0$ или $\lambda \neq \mu$. Теперь наша лемма следует из разложения (10) и равенства

$$H_0(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'} \simeq \bigoplus_{\substack{\bar{\mu} \in P_k^+ \\ \bar{\mu}|_{\mathfrak{h}'} = \mu'}} H_0(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\bar{\mu}}. \quad \square$$

Следствие 2.1. Для любых $\lambda_1 \in P_{k_1}^+$, $\lambda_2 \in P_{k_2}^+$ и $\mu \in P_{k_1+k_2}^+$ выполняется равенство

$$c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \text{ch}_q H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'}. \quad (12)$$

Вычислим теперь эйлерову характеристику (12) с помощью БГГ-резольвенты модуля L_{λ_1} . Умножив тензорно последовательность (11) на L_{λ_2} , мы получим $U(\mathfrak{n}_-)$ -свободную резольвенту для $L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2}$. Таким образом, гомологии следующего комплекса совпадают с гомологиями $H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})$:

$$\cdots \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} (L_{\lambda_2} \otimes F_1) \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} (L_{\lambda_2} \otimes F_0) \rightarrow 0, \quad (13)$$

где $F_p = \bigoplus_{l(w)=p} M_{w*\lambda_1}$. Перепишем (13) в виде

$$\cdots \rightarrow (\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} F_1) \otimes L_{\lambda_2} \rightarrow (\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} F_0) \otimes L_{\lambda_2} \rightarrow 0. \quad (14)$$

Лемма 2.2. Имеет место равенство

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \text{ch}_q H_p(\mathfrak{n}_-, L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})^{\mu'} = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \sum_{l(w)=p} q^{(w*\lambda_1)d} \text{ch}_q (L_{\lambda_2})^{(\mu-w*\lambda_1)'}$$

Доказательство. Напомним, что $F_p = \bigoplus_{l(w)=p} M_{w*\lambda_1}$. Значит,

$$\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} F_p = \bigoplus_{l(w)=p} \mathbb{C}_{w*\lambda_1}.$$

Теперь наша лемма следует из равенства эйлеровой характеристики комплекса (14) и правой части формулы (12). $\square$

Предложение 2.1. *Справедлива следующая бозонная формула для функций ветвления:*

$$c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \sum_{\substack{w \in W \\ l(w)=p}} q^{(w * \lambda_1)d} \text{ch}_q(L_{\lambda_2})^{(\mu - w * \lambda_1)'}. \quad (15)$$

Доказательство. Применим следствие 2.1 и лемму 2.2. $\square$

Замечание 2.1. Мы можем использовать резольвенту модуля L_{λ_2} вместо резольвенты модуля L_{λ_1} . Этот подход приведет к другой формуле для $c_{\lambda'_1 \lambda'_2}^{\mu'}(q)$, которая получается перестановкой весов λ_1 и λ_2 в правой части формулы (15).

§3. Вторая гомологическая бозонная формула

В этом параграфе мы изучаем гомологии $H_p(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)$, заменяя тензорное произведение $L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2}$ (см. предыдущий параграф) на «отношение» $L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*$. Заметим, что хотя представление $L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*$ не принадлежит категории $\mathcal{O}$ (собственные значения оператора d не ограничены снизу), оно является интегрируемым. Поэтому мы сначала устанавливаем некоторые утверждения об общих интегрируемых модулях.

Лемма 3.1. *Пусть M — интегрируемый $\mathfrak{g}$ -модуль. Тогда*

$$H_n(\mathfrak{n}_-, M) \simeq H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_n(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)) \oplus H_1(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-1}(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)).$$

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{u}_-^{(i)}$ является идеалом и $\mathfrak{n}_-/\mathfrak{u}_-^{(i)} \simeq \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. Значит, второй член спектральной последовательности Серра–Хохшильда, ассоциированной с парой $\mathfrak{u}_-^{(i)} \hookrightarrow \mathfrak{n}_-$, равен

$$E_{p,q}^2 = H_p(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_q(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)).$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$.

Так как M интегрируем, он является прямой суммой неприводимых конечномерных $\mathfrak{sl}_2^{(i)}$ -модулей. Это же верно для $\Lambda^q(\mathfrak{u}_-^{(i)}) \otimes M$, а также для $H_q(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)$. Для неотрицательного целого числа s обозначим через π_s неприводимый $\mathfrak{sl}_2$ -модуль со старшим весом s ($\dim \pi_s = s + 1$) и зафиксируем старший и младший векторы v_s и u_s . Пусть $\pi_s \hookrightarrow H_q(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)$ — прямое слагаемое и

$$\alpha_p \in \Lambda^p(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}) \otimes \pi_s$$

— цепь, представляющая некоторый класс в

$$H_p(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, \pi_s) \hookrightarrow H_p(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_q(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)).$$

Положим

$$\alpha_0 = v_s, \quad \alpha_1 = f_i \otimes u_s.$$

Пусть $\beta_p \in \Lambda^p(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}) \otimes \Lambda^q(\mathfrak{u}_-^{(i)}) \otimes M$ — цепи вида

$$\beta_0 = x_0, \quad \beta_1 = f_i \otimes x_1,$$

которые представляют α_p (т. е. x_0 представляет v_s и x_1 представляет u_s). Обозначим также через $d_{\mathfrak{n}_-}$ ($d_{\mathfrak{u}_-^{(i)}}$) дифференциал в стандартном комплексе для

$H_n(\mathfrak{n}_-, M)$ ($H_n(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)$). Мы утверждаем, что $d_{\mathfrak{n}_-}\beta_p = 0$. Действительно, для $p = 0$ это следует из того, что $v_s \in H_q(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)$. Пусть теперь $p = 1$. Тогда

$$d_{\mathfrak{n}_-}\beta_1 = d_{\mathfrak{n}_-}(f_i \otimes x_1).$$

Мы знаем, что $d_{\mathfrak{u}_-^{(i)}}x_1 = 0$ и $f_i x_1 = 0$ (так как x_1 представляет младший вектор). Получаем $d_{\mathfrak{n}_-}\beta_1 = 0$. Но из равенства $d_{\mathfrak{n}_-}\beta_p = 0$ следует, что дифференциалы $d_2, d_3, \dots$ в спектральной последовательности Серра–Хохшильда тривиальны и $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 3.1. Пусть M — интегрируемый $\mathfrak{g}$ -модуль уровня k . Тогда

$$H_0(\mathfrak{n}_-, M)^\lambda = 0, \quad \text{если } \lambda \notin P_k^+.$$

Доказательство. Из леммы 3.1 получаем

$$H_0(\mathfrak{n}_-, M) \simeq H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_0(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))$$

для всех $i = 1, \dots, n$. Напомним, что $H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, \pi_s)$ является одномерным пространством $\alpha_i^\vee$ -веса s . Учитывая то, что $H_0(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M)$ изоморфен прямой сумме конечномерных $\mathfrak{sl}_2^{(i)}$ -модулей, мы получаем $\lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ для любого λ , являющегося весом пространства $H_0(\mathfrak{n}_-, M)$. Значит, $\lambda \in P_k^+$. $\square$

Предложение 3.1. Пусть M — интегрируемый $\mathfrak{g}$ -модуль уровня k . Тогда

- (а) $H_n(\mathfrak{n}_-, M)^{w*\lambda} = 0$ при $w \in W$, $\lambda \in P_k^+$, $l(w) > n$;
- (б) $H_n(\mathfrak{n}_-, M)^{w*\lambda} \simeq H_{n-l(w)}(\mathfrak{n}_-, M)^\lambda$ при $w \in W$, $\lambda \in P_k^+$, $l(w) \leq n$.

Доказательство. Мы докажем (а) и (б) одновременно, используя тот факт, что

$$H_n(\mathfrak{n}_-, M)^\mu \simeq H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_n(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^\mu \oplus H_1(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-1}(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^\mu,$$

и индукцию по n . Случай $n = 0$ вытекает из следствия 3.1. Предположим, что утверждение леммы верно для всех $m < n$. Мы будем считать, что $l(w) > 0$ (в противном случае утверждения (а) и (б) тривиальны). Заметим, что существует i , такое, что

$$(w * \lambda)\alpha_i^\vee \leq -1. \quad (16)$$

Имеем

$$H_n(\mathfrak{n}_-, M)^{w*\lambda} \simeq H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_n(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^{w*\lambda} \oplus H_1(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-1}(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^{w*\lambda}.$$

Условие (16) дает равенство

$$H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_n(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^{w*\lambda} = 0$$

и, значит,

$$H_n(\mathfrak{n}_-, M)^{w*\lambda} \simeq H_1(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-1}(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^{w*\lambda} \simeq H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-1}(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^{(s_i w)*\lambda}, \quad (17)$$

так как

$$H_1(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, \pi_s)^\alpha \simeq H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, \pi_s)^{s_i * \alpha}$$

для всех α . Мы также знаем, что

$$\begin{aligned} H_{n-1}(\mathfrak{n}_-, M)^{(s_i w)*\lambda} \\ \simeq H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-1}(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^{(s_i w)*\lambda} \oplus H_1(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-2}(\mathfrak{u}_-^{(i)}, M))^{(s_i w)*\lambda}. \end{aligned}$$

Используя соотношение $((s_i w) * \lambda) \alpha_i^\vee = -(w * \lambda) \alpha_i^\vee - 2 \geq -1$ (см. (16)), получаем

$$H_1(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-2}(\mathfrak{u}, M))^{(s_i w) * \lambda} = 0$$

(так как $H_1(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, \pi_s)^t = 0$ для всех $t \geq -1$). Таким образом,

$$H_{n-1}(\mathfrak{n}_-, M)^{(s_i w) * \lambda} \simeq H_0(\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_{n-1}(\mathfrak{u}_-, M))^{(s_i w) * \lambda}. \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем

$$H_n(\mathfrak{n}_-, M)^{w * \lambda} \simeq H_{n-1}(\mathfrak{n}_-, M)^{(s_i w) * \lambda}. \quad (19)$$

Заметим также, что из изоморфизма (16) и леммы 1.1 следует равенство $l(s_i w) = l(w) - 1$.

Пусть $n < l(w)$. Тогда итерацией изоморфизма (19) получаем

$$H_n(\mathfrak{n}_-, M)^{w * \lambda} \simeq H_0(\mathfrak{n}_-, M)^{w' * \lambda}$$

для некоторого w' , такого, что $l(w') > 0$. Теперь п. (а) вытекает из следствия 3.1. Для доказательства п. (b) также достаточно несколько раз применить (19). $\square$

Обозначим через $\omega: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ инволюцию Шевалле: $e_i \mapsto -f_i$, $f_i \mapsto -e_i$, $h \mapsto -h$ ($h \in \mathfrak{h}$). Для $\mathfrak{g}$ -модуля V обозначим через V^ω представление алгебры $\mathfrak{g}$, которое совпадает с V как векторное пространство, а действие $\mathfrak{g}$ подкручено с помощью ω .

Лемма 3.2. Пусть M есть $\mathfrak{g}$ -модуль, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Тогда

$$H_n(\mathfrak{n}_-, M)^\lambda \simeq H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, M \otimes M_\lambda^\omega),$$

где M_λ — модуль Верма.

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм

$$H_n(\mathfrak{n}_-, M)^\lambda \simeq H_n(\mathfrak{b}_-, \mathfrak{h}, M \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}),$$

где $\mathbb{C}_{-\lambda}$ — одномерный $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}$ -модуль с тривиальным действием алгебры $\mathfrak{n}_-$. Утверждение нашей леммы следует из изоморфизма

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}_-}^{\mathfrak{g}}(M \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}) \simeq M \otimes M_\lambda^\omega. \quad \square$$

В дальнейшем мы изучаем гомологии $H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda_2}$ для тройки весов $\lambda_1 \in P_{k_1}^+$, $\lambda_2 \in P_{k_2}^+$, $\mu \in P_{k_1+k_2}^+$. Заметим, что $L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*$ является интегрируемым $\mathfrak{g}$ -модулем. Из леммы 3.2 получаем изоморфизм

$$H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda_2} \simeq H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes M_{\lambda_2}^\omega).$$

Предложение 3.2. Существует спектральная последовательность $\bar{E}_{p,q}^r$ с

$$\bar{E}_{p,q}^1 = \bigoplus_{w: l(w)=p} H_q(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{w * \lambda_2},$$

такая, что $\bar{E}_{p,q}^r$ сходится к $H_\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*)$. Кроме того, $\bar{E}_{p,q}^1 = 0$ при $p > q$.

Доказательство. Утверждение $\bar{E}_{p,q}^1 = 0$ при $p > q$ следует из п. (а) предложения 3.1.

Рассмотрим БГГ-резольвенту

$$\cdots \rightarrow F_\lambda(2) \rightarrow F_\lambda(1) \rightarrow F_\lambda(0) \rightarrow L_\lambda \rightarrow 0, \quad F_\lambda(p) = \bigoplus_{w: l(w)=p} M_{w*\lambda}.$$

Напомним, что $(L_\lambda^*)^\omega \simeq L_\lambda$ для всех $\lambda \in P_k^+$. Таким образом, получаем двойственную БГГ-резольвенту

$$\cdots \rightarrow F_\lambda^\omega(2) \rightarrow F_\lambda^\omega(1) \rightarrow F_\lambda^\omega(0) \rightarrow L_\lambda^* \rightarrow 0, \quad F_\lambda^\omega(p) = \bigoplus_{w: l(w)=p} M_{w*\lambda}^\omega.$$

Это дает нам точную последовательность

$$\cdots \rightarrow L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes F_{\lambda_2}^\omega(1) \rightarrow L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes F_{\lambda_2}^\omega(0) \rightarrow L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^* \rightarrow 0. \quad (20)$$

Для того чтобы установить связь между

$$H_q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*) \quad \text{и} \quad H_q(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{w*\lambda_2},$$

мы используем бикомплекс $K_{p,q}$, ассоциированный с (20):

$$K_{p,q} = [\Lambda^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes F_{\lambda_2}^\omega(p)]^0$$

(пространство $\mathfrak{h}$ -инвариантов). Для первого члена соответствующей спектральной последовательности имеем

$$\bar{E}_{p,q}^1 = H_q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes F_{\lambda_2}^\omega(p)),$$

и $\bar{E}_{p,q}^r$ сходится к $H_\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*)$. Из определения $F_{\lambda_2}^\omega(p)$ и леммы 3.2 получаем

$$\bar{E}_{p,q}^1 = \bigoplus_{w: l(w)=p} H_q(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{w*\lambda_2}.$$

Предложение доказано. □

Следствие 3.2. $H_0(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2} \simeq (C_{\lambda'_1 \lambda'_2}^\mu)^*$.

Доказательство. Заметим, что $H_0(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2}$ изоморфно

$$\bigoplus_{\substack{\bar{\lambda}_2 \in P_k^+ \\ \bar{\lambda}_2|_{\mathfrak{h}'} = \lambda'_2}} H_0(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\bar{\lambda}_2}.$$

Зафиксируем некоторый вес $\bar{\lambda}_2$ с $\bar{\lambda}_2|_{\mathfrak{h}'} = \lambda'_2$. Используя спектральную последовательность из предложения 3.2, получаем

$$H_0(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\bar{\lambda}_2} = \bar{E}_{0,0}^1$$

и $\bar{E}_{n,0}^1 = 0$ при $n > 0$. Таким образом, $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{E}_{0,0}^r = \bar{E}_{0,0}^1$. Кроме того,

$$\bar{E}_{0,0}^\infty \simeq H_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*) \simeq H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu^* \otimes L_{\lambda_1} \otimes L_{\bar{\lambda}_2}^*).$$

Теперь для доказательства нашего следствия достаточно использовать изоморфизмы

$$H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu^* \otimes L_{\lambda_1} \otimes L_{\bar{\lambda}_2}^*)^* \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(L_\mu, L_{\lambda_1} \otimes L_{\bar{\lambda}_2}^*)^*$$

и

$$\bigoplus_{\substack{\bar{\lambda}_2 \in P_k^+ \\ \bar{\lambda}_2|_{\mathfrak{h}'} = \lambda_2'}} H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu^* \otimes L_{\lambda_1} \otimes L_{\bar{\lambda}_2})^* \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{g}'}(L_{\mu'}, L_{\lambda_1'} \otimes L_{\bar{\lambda}_2'})^*. \quad \square$$

Рассмотрим частный случай $H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda_2}$ при $\lambda_2 = 0$ и $\mu = \lambda_1$.

Лемма 3.3. $H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_\mu^*)^0 = 0$ при $n > 0$.

Доказательство. Рассмотрим на L_μ^* фильтрацию

$$(L_\mu^*)_m = \text{span}\langle e_{i_1} \dots e_{i_s} v_\mu^*, s \leq m, 1 \leq i_l \leq n \rangle,$$

где v_μ^* — младший вектор представления L_μ^* . Получаем фильтрацию

$$([\Lambda^n(\mathfrak{n}_-) \otimes L_\mu \otimes L_\mu^*]^0)_m = [\Lambda^n(\mathfrak{n}_-) \otimes L_\mu \otimes (L_\mu^*)_m]^0.$$

Рассмотрим ассоциированную спектральную последовательность с

$$E_{n,m}^1 = [H_{n+m}(\mathfrak{n}_-, L_\mu) \otimes (L_\mu^*)_m / (L_\mu^*)_{m-1}]^0.$$

Из изоморфизма $H_{n+m}(\mathfrak{n}_-, L_\mu) \simeq \bigoplus_{w: l(w)=n+m} \mathbb{C} w * \mu$ вытекает, что

$$E_{n,m}^1 = \bigoplus_{w: l(w)=n+m} [(L_\mu^*)_m / (L_\mu^*)_{m-1}]^{-w * \mu}.$$

Но

$$(L_\mu^*)^{-w * \mu} \simeq (L_\mu^*)^{-w\mu + \rho - w\rho} \simeq (L_\mu^*)^{-\mu + w^{-1}\rho - \rho} = 0,$$

так как $w^{-1}\rho - \rho < 0$ при $l(w) > 0$. Таким образом, $E_{n,m}^1 = 0$ при $n + m \neq 0$. Лемма доказана. $\square$

В следующей лемме мы вычисляем гомологии $H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_\nu^*)$ для весов $\mu, \nu \in P_{k_1+k_2}^+$.

Лемма 3.4. Пусть $\mu, \nu \in P_{k_1+k_2}^+$. Тогда

$$\dim H_{2n}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_\nu^*) = \delta_{\mu, \nu} \# \{w \in W : l(w) = n\}.$$

Кроме того, $H_{2n-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_\nu^*) = 0$.

Доказательство. Используя изоморфизм $(L_\nu^*)^\omega \simeq L_\nu$, получаем резольвенту

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{\substack{w_1, w_2 \in W \\ l(w_1) + l(w_2) = p}} M_{w_1 * \mu} \otimes M_{w_2 * \nu}^\omega \rightarrow \cdots \rightarrow M_\mu \otimes M_\nu^\omega \rightarrow L_\mu \otimes L_\nu^* \rightarrow 0.$$

Заметим, что эта резольвента является $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ -свободной. Значит, комплекс $G_\bullet$ с

$$G_p = \bigoplus_{\substack{w_1, w_2 \in W \\ l(w_1) + l(w_2) = p}} [\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})} (M_{w_1 * \mu} \otimes M_{w_2 * \nu}^\omega)]^0$$

вычисляет $H_p(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_\nu^*)$. Легко видеть, что $G_p = \bigoplus_{\substack{l(w_1) + l(w_2) = p \\ w_1 * \mu = w_2 * \nu}} \mathbb{C}_0$. Так как

$\mu, \nu \in P_{k_1+k_2}^+$, условие $w_1 * \mu = w_2 * \nu$ эквивалентно $w_1 = w_2$, $\nu = \mu$. Таким образом, $G_{2n-1} = 0$, $n \geq 1$, и $\dim G_{2n} = \delta_{\mu, \nu} \# \{w \in W : l(w) = n\}$. Лемма доказана. $\square$

Предложение 3.3. *Естественное отображение*

$$\tau: H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes M_{\lambda_2}^\omega) \rightarrow H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*)$$

тривиально при $n > 0$.

Доказательство. Используя изоморфизм

$$H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes M_{\lambda_2}^\omega) \simeq H_n(\mathfrak{b}_-, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes \mathbb{C}_{\lambda_2}^*),$$

достаточно доказать, что отображение

$$\tau': H_n(\mathfrak{b}_-, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes \mathbb{C}_{\lambda_2}^*) \rightarrow H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*)$$

тривиально. Заметим, что τ' получается из естественного вложения

$$\iota: [\Lambda^n(\mathfrak{b}_-/\mathfrak{h}) \otimes L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes \mathbb{C}_{\lambda_2}^*]^0 \hookrightarrow [\Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*]^0. \quad (21)$$

Таким образом, наше предложение равносильно тому, что любая цепь

$$c \in [\Lambda^n(\mathfrak{b}_-/\mathfrak{h}) \otimes L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*]^0 \hookrightarrow [\Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*]^0$$

определяет тривиальный класс в $H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*)$.

В силу леммы 3.4 достаточно показать, что любая цепь из

$$[\Lambda^n(\mathfrak{n}_-) \otimes L_\mu \otimes L_\mu^*]^0 \hookrightarrow [\Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*]^0$$

определяет тривиальный класс в $H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_2}^*)$ при $n > 0$. Но по лемме 3.3

$$H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_\mu^*)^0 = 0 \quad \text{при } n > 0.$$

Предложение доказано □

Теорема 3.1. *Для любых $\lambda_1 \in P_{k_1}^+$, $\lambda_2 \in P_{k_2}^+$, $\mu \in P_{k_1+k_2}^+$ и $n > 0$*

$$H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda_2} = 0.$$

Доказательство. Мы используем спектральную последовательность из предложения 3.2:

$$\bar{E}_{p,q}^1 = \bigoplus_{w: l(w)=p} H_q(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{w*\lambda_2} \simeq \bigoplus_{l(w)=p} H_q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes M_{w*\lambda_2}^\omega).$$

Заметим, что, согласно следствию 3.2, $\bar{E}_{0,0}^1 \simeq (C_{\lambda_1'\lambda_2'}^{\mu'})^*$ и, значит,

$$\bar{E}_{k,k}^1 \simeq \bigoplus_{w: l(w)=k} (C_{\lambda_1'\lambda_2'}^{\mu'})^*. \quad (22)$$

Кроме того, из предложений 3.1 и 3.2 получаем

$$\bar{E}_{p,n+p}^1 \simeq \bar{E}_{0,n}^1, \quad \bar{E}_{p,q}^1 = 0 \quad \text{при } p > q. \quad (23)$$

Мы хотим показать, что $\bar{E}_{0,n}^1 = 0$, $n > 0$. (Вследствие (23) это эквивалентно $\bar{E}_{p,q}^1 = 0$ при $p \neq q$.) Заметим, что это равенство согласовано с тем, что пространства $\bar{E}_{k,k}^1$ и $H_{2k}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_1}^*)$ изоморфны (лемма 3.4 и формула (22)).

Мы докажем утверждение $\bar{E}_{0,2n-1}^1 = 0$, $\bar{E}_{0,2n}^1 = 0$ индукцией по $n \geq 1$. Пусть сначала $n = 1$. Из предложения (3.3) следует, что отображение

$$\bar{E}_{0,2}^1 \rightarrow H_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_1}^*)$$

тривиально и, значит, $\bar{E}_{0,2}^\infty = 0$. Получаем, что $\bar{E}_{1,1}^\infty = \bar{E}_{1,1}^1$, так как

$$\bar{E}_{1,1}^1 \simeq H_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_1}^*) \simeq \bar{E}_{1,1}^\infty \oplus \bar{E}_{2,0}^\infty.$$

Таким образом, дифференциал $d_1: \bar{E}_{1,1}^1 \rightarrow \bar{E}_{0,1}^1$ тривиален и

$$\bar{E}_{0,1}^1 = \bar{E}_{0,1}^\infty = H_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_1}^*) = 0.$$

Из предложения 3.1 получаем, что $\bar{E}_{1,2}^1 = 0$ и

$$\bar{E}_{0,2}^1 = \bar{E}_{0,2}^\infty = 0.$$

Предположим теперь, что $\bar{E}_{0,s}^1 = 0$ при $s \leq 2(n-1)$. Тогда $\bar{E}_{p,s+p}^1 = 0$ при $s \leq 2(n-1)$, $p \geq 0$. Заметим, что отображение

$$\bar{E}_{0,2n}^1 \rightarrow H_{2n}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_1}^*)$$

тривиально и поэтому $\bar{E}_{0,2n}^\infty = 0$. Напомним, что дифференциал d_r действует из $\bar{E}_{p,q}^r$ в $\bar{E}_{p-r,q+r-1}^r$. Получаем

$$\bar{E}_{p,q}^r = \bar{E}_{p,q}^1 \quad \text{при } p+q \leq 2n.$$

Так как

$$H_{2n}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^* \otimes L_{\lambda_1}^*) \simeq \bar{E}_{n,n}^1,$$

то $\bar{E}_{n,n}^1 = \bar{E}_{n,n}^\infty$, а значит, дифференциал $d_n: \bar{E}_{n,n}^1 \rightarrow \bar{E}_{0,2n-1}^1$ тривиален. Таким образом,

$$0 = \bar{E}_{0,2n-1}^\infty = \bar{E}_{0,2n-1}^n = \bar{E}_{0,2n-1}^1$$

($\bar{E}_{0,2n-1}^\infty = 0$, поскольку по предположению индукции $\bar{E}_{p,q}^\infty = 0$ при $p+q = 2n-1$, $(p,q) \neq (2n-1,0)$). Из равенства $\bar{E}_{0,2n-1}^1 = 0$ следует, что $\bar{E}_{1,2n}^1 = 0$ и

$$0 = \bar{E}_{0,2n}^\infty = \bar{E}_{0,2n}^1.$$

Теорема доказана. □

Следствие 3.3. Для любых $\lambda_1 \in P_{k_1}^+$, $\lambda_2 \in P_{k_2}^+$, $\mu \in P_{k_1+k_2}^+$ и $n > 0$

$$H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda_2'} = 0.$$

Теорема 3.2. Пусть $\lambda_1 \in P_{k_1}^+$, $\lambda_2 \in P_{k_2}^+$, $\mu \in P_{k_1+k_2}^+$. Тогда

$$c_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\mu'}(q^{-1}) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \sum_{\substack{w \in W \\ l(w)=p}} q^{(w*\mu)d} \text{ch}_{q^{-1}}(L_{\lambda_1})^{(w*\mu-\lambda_2)'}. \quad (24)$$

Другое выражение для функций ветвления может быть получено, если переставить местами λ_1 и λ_2 в правой части.

Доказательство. Рассмотрим гомологии $H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda_2'}$. Из следствия 3.2 и теоремы 3.1 получаем

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \text{ch}_q H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda_2'} = c_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\mu'}(q^{-1}).$$

Заметим, что гомологии следующего комплекса (построенного с помощью БГГ-резольвенты L_μ) совпадают с $H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2}$:

$$\cdots \rightarrow D_2 \rightarrow D_1 \rightarrow D_0 \rightarrow 0, \quad D_p = \bigoplus_{w: l(w)=p} (\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} (M_{w*\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*))^{\lambda'_2}. \quad (25)$$

Кроме того,

$$(\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} (M_{w*\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*))^{\lambda'_2} \simeq (\mathbb{C}_{w*\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2}$$

и поэтому

$$\mathrm{ch}_q(\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{n}_-)} (M_{w*\mu} \otimes L_{\lambda_1}^*))^{\lambda'_2} = q^{(w*\mu)d} \mathrm{ch}_q(L_{\lambda_1}^*)^{(-w*\mu+\lambda_2)'}$$

Таким образом, эйлерова характеристика комплекса (25) равна

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \sum_{w: l(w)=p} q^{(w*\mu)d} \mathrm{ch}_{q^{-1}}(L_{\lambda_1})^{(w*\mu-\lambda_2)'}$$

Но эйлерова характеристика этого комплекса совпадает с суммой

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathrm{ch}_q H_n(\mathfrak{n}_-, L_\mu \otimes L_{\lambda_1}^*)^{\lambda'_2}.$$

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Bagger, D. Nemeschansky, S. Yankielowicz, *Virasoro algebras with central charge $c > 1$* , Phys. Rev. Lett., **60**:5 (1988), 389–392.
- [2] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$ -modules*, in: Lie Groups and Their Representations, Summer school of the Bolyai Janos Math. Soc. (ed. Gelfand), Halsted Press, 1975, 21–64.
- [3] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M. Okado, *Exactly solvable SOS models: local heights probabilities and theta function identities*, Nucl. Phys. B, **290**:2 (1987), 231–273; *Exactly solvable SOS models II: proof of the star-triangle relation and combinatorial identities*, in: Conformal Field Theory and Solvable Lattice models (Kyoto, 1986), Adv. Stud. Pure Math., vol. 16, Academic Press, Boston, MA, 1988, 17–122.
- [4] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] E. Feigin, *Infinite fusion products and $\mathfrak{sl}_2$ cosets*, <http://xxx.lanl.gov/abs/math.QA/0603226>.
- [6] O. Foda, M. Okado, S. O. Warnaar, *A proof of polynomial identities of type $\widehat{\mathfrak{sl}(n)_1} \otimes \widehat{\mathfrak{sl}(n)_1} / \widehat{\mathfrak{sl}(n)_2}$* , J. Math. Phys., **37** (1996), 965–986.
- [7] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Comm. Math. Phys., **103**:1 (1986), 105–119.
- [8] H. Garland, J. Lepowsky, *Lie algebra homology and the Macdonald–Kac formulas*, Invent. Math., **34** (1976), 37–76.
- [9] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [10] D. Kastor, E. Martinec, Z. Qiu, *Current algebra and conformal decrete series*, Phys. Lett. B, **200**:4 (1988), 434–440.
- [11] S. Kumar, *Kac–Moody Groups, Their Flag Varieties and Representation Theory*, Progress in Mathematics, vol. 204, Birkhauser, Boston, MA, 2002.
- [12] F. Ravanini, *An infinite class of new conformal field theories with extended algebras*, Modern. Phys. Lett. A, **3**:4 (1988), 397–412.

- [13] A. Rocha-Caridi, *Vacuum vector representations of the Virasoro algebra*, in: Vertex Operators in Mathematical Physics (Berkeley, Calif., 1983), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 3, Springer-Verlag, New York, 1985, 451–473.
- [14] A. Schilling, *Multinomials and polynomial bosonic forms for the branching functions of the $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_M \times \widehat{\mathfrak{su}}(2)_N / \widehat{\mathfrak{su}}(2)_{M+N}$ conformal coset models*, Nucl. Phys. B, **467** (1996), 247–271.
- [15] A. Schilling, *Polynomial fermionic forms for the branching functions of the rational coset conformal field theories $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_M \times \widehat{\mathfrak{su}}(2)_N / \widehat{\mathfrak{su}}(2)_{M+N}$* , Nucl. Phys. B, **459** (1996), 393–436.
- [16] A. Schilling, M. Shimozono, *Fermionic formulas for level-restricted generalized Kostka polynomials and coset branching functions*, Comm. Math. Phys., **220**:1 (2001), 105–164.

Физический институт РАН им. П. Н. Лебедева
Независимый московский университет
e-mail: evgfeig@mccme.ru

Поступило в редакцию
15 мая 2006 г.