Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Дудко, Н. И. Нессонов, Проективные характеристики бесконечной обобщенной симметрической группы, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 1, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2893>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 08:15:59

представления, Наука, М., 1974. [4] Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, УМН, **46:2** (1991), 85–143. [5] З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975. [6] J. M. G. Fell, Acta Math., **106:3–4** (1961), 233–280. [7] M. J. Dupré, R. M. Gillette, *Banach Bundles, Banach Modules and Automorphisms of C^* -Algebras*, Pitman Publishing Inc., Boston, 1983. [8] A. Grothendieck, in: Dix Exposés sur la cohomology des schemas, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 46–66.

Белорусский государственный университет
Университет в Белостоке
e-mail: antonevich@bsu.by

Поступило в редакцию
25 августа 2006 г.

Белорусский государственный университет
e-mail: itrubnikov@gmail.com

УДК 512.547.4

Проективные характеры бесконечной обобщенной симметрической группы

© 2008. А. В. Дудко, Н. И. Нессонов

Обобщенная симметрическая группа B_m^∞ по определению является полупрямым произведением $S(\infty) \ltimes \mathbb{Z}_m^\infty$, где $S(\infty)$ — группа всех конечных перестановок натурального ряда, а $\mathbb{Z}_m^\infty$ — множество последовательностей элементов из $\mathbb{Z}_m$ с конечным числом ненулевых координат, на котором задано естественное действие группы $S(\infty)$. В данной заметке анонсируется полная классификация *проективных факторпредставлений конечного типа* группы B_m^∞ , которым с помощью известной конструкции (см. [4]) сопоставляются *обычные* факторпредставления ее накрывающей

$$\begin{aligned} \tilde{B}_m^\infty = \langle \tilde{s}_i, \tilde{w}_j \mid \tilde{s}_i^2 = 1; \tilde{w}_i^m = 1; (\tilde{s}_i \tilde{s}_{i+1})^3 = 1; \tilde{s}_i \tilde{w}_i = \tilde{w}_{i+1} \tilde{s}_i; \\ \tilde{s}_i \tilde{w}_j = \vartheta \tilde{w}_j \tilde{s}_i, j \neq i, i+1; (\tilde{s}_i \tilde{s}_j)^2 = \nu, |i-j| > 1; \tilde{w}_i \tilde{w}_j = \mu \tilde{w}_j \tilde{w}_i, i \neq j \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ϑ, ν, μ — центральные элементы, удовлетворяющие условию $\vartheta^{(2,m)} = \nu^2 = \mu^{(2,m)} = 1$, где $(2, m)$ — наименьший общий делитель чисел 2 и m . Аналогичная задача для группы $S(\infty)$ решена Назаровым [5] (см. также [3]). Понятно, что для любого унитарного факторпредставления π группы $\tilde{B}_m^\infty$ операторы $\pi(\vartheta), \pi(\nu), \pi(\mu)$ могут отличаться только знаком от единичного оператора. С другой стороны, упорядоченный триплет $c(\pi) = (\pi(\vartheta), \pi(\nu), \pi(\mu))$ можно рассматривать как элемент второй группы когомологий

$$\mathcal{H}^2(B_m^\infty, T) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2^3, & \text{если } m = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } m = 2k - 1, \end{cases}$$

где T — одномерный тор, определяющий конкретное *центральное расширение*. При взятии тензорного произведения представлений соответствующие триплеты перемножаются.

1. Обычные представления группы B_m^∞ описаны независимо в [1] и [2]. Для вычисления характера обычного представления параметризуем, в первую очередь, классы сопряженных элементов. Произвольный элемент $g \in B_m^\infty$ имеет

вид $g = sw$, где $s \in S(\infty)$, $w = (w_i^{d_i}) \in \mathbb{Z}_m^\infty$. Пусть $\mathbb{N}/s$ — множество орбит перестановки s и $s^{(p)}$ — цикл, совпадающий с s на орбите p . Для $p \in \mathbb{N}/s$ положим $w(p) = \prod_{i \in p} w_i^{d_i}$. Если $|p|$ — количество точек орбиты p , то неупорядоченное множество пар $\{|p|, w(p)\}_{p \in \mathbb{N}/s}$ является полным инвариантом сопряженности в группе B_m^∞ .

Теорема 1. Пусть π — факторпредставление конечного типа группы B_m^∞ . Тогда существуют две последовательности $\alpha = \{\alpha_i\}$, $\beta = \{\beta_i\}$ невозрастающих положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum(\alpha_j + \beta_j) \leq 1$, две последовательности $\hat{\alpha} = \{\hat{\alpha}_i\}$, $\hat{\beta} = \{\hat{\beta}_i\}$ характеров группы $\mathbb{Z}_m$ и нормированная положительно определенная функция ζ на $\mathbb{Z}_m$, такие, что значения соответствующего представлению π характера $\chi_{\beta\hat{\beta}}^{\alpha\hat{\alpha}}$ задаются формулой

$$\chi_{\beta\hat{\beta}}^{\alpha\hat{\alpha}}(sw) = \prod_{p \in \mathbb{N}/s} \left\{ \sum_j [\alpha_j^{|p|} \hat{\alpha}_i(w(p)) + (-1)^{|p|-1} \beta_j^{|p|} \hat{\beta}_i(w(p))] + \delta_p \zeta(w(p)) \right\}, \quad (2)$$

$$\text{где} \quad \delta_p = \begin{cases} 1 - \sum(\alpha_j + \beta_j) & \text{при } |p| = 1, \\ 0 & \text{при } |p| > 1, \end{cases}$$

2. Базисные представления группы $\tilde{B}_m^\infty$. Пусть $\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ — элементы алгебры 2×2 -комплексных матриц $M_2(\mathbb{C})$ и tr_2 — нормированный след на $M_2(\mathbb{C})$. Зададим представление F на образующих, положив $F(\tilde{s}_k) = \mathcal{I}$, $F(\tilde{w}_k) = (-1)^k \mathcal{J}$. Так как $\mathcal{J}\mathcal{J} = -\mathcal{I}\mathcal{I}$, то $c(F) = (I, -I, I)$. Пусть, далее, $B = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} M_i$ и $\tau = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \tau_i$, где $M_i = M_2(\mathbb{C})$, $\tau_i = \text{tr}_2$, $\mathcal{M}_{2n-1} = \mathcal{K}^{\otimes(n-1)} \otimes \mathcal{I} \otimes \mathcal{E}^{\otimes \infty}$, $\mathcal{M}_{2n} = \mathcal{K}^{\otimes(n-1)} \otimes \mathcal{J} \otimes \mathcal{E}^{\otimes \infty}$. Мы рассматриваем B как $\star$ -подалгебру Π_1 -фактора M , построенного по представлению Гельфанда–Найма–Сигала алгебры B для состояния τ . Определим отображения $\Pi, \Phi: \tilde{B}_m^\infty \rightarrow B$ на образующих с помощью следующих соотношений:

$$\Pi(\tilde{s}_k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{M}_k - \mathcal{M}_{k+1}), \quad \Pi(\tilde{w}_k) = (-1)^k \mathcal{M}_k, \quad (3)$$

$$\Phi(\tilde{s}_k) = \frac{1}{\sqrt{2k}}(\sqrt{k-1}\mathcal{M}_{k-1} - \sqrt{k+1}\mathcal{M}_k) \quad (\text{см. [5]}), \quad \Phi(\tilde{w}_k) = \mathcal{E}^{\otimes \infty}. \quad (4)$$

Прямая проверка показывает, что Π и Φ расширяются до Π_1 -факторпредставлений группы $\tilde{B}_m^\infty$, для которых $c(\Pi) = (-I, -I, -I)$, $c(\Phi) = (-I, I, I)$. В случае нечетного m ввиду условий на центральные элементы ϑ, ν, μ из формулы (1) остается только одно представление Φ . Любой другой неединичный триплет $c(T)$ можно получить в виде произведения не более трех разных множителей $c(\Pi)$, $c(\Phi)$, $c(F)$. Соответствующие характеры тензорных произведений представлений Π, Φ, F и представления Гельфанда–Найма–Сигала, построенные по ним, будем называть базисными.

Теорема 2. Базисные представления являются факторпредставлениями.

3. Классификация характеров группы $\tilde{B}_m^\infty$. Рассматривая B_m^∞ как группу с образующими s_i, w_j , удовлетворяющими соотношениям для $\tilde{s}_i, \tilde{w}_j$ из (1) при $\vartheta = \nu = \mu = 1$, определим гомоморфизм $\text{pr}: \tilde{B}_m^\infty \rightarrow B_m^\infty$ на образующих:

$\text{pr}(v) = 1$ для $v = \vartheta$, ν , μ , $\text{pr}(\tilde{s}_i) = s_i$ и $\text{pr}(\tilde{w}_i) = w_i$. Если $\mathbf{b} \in \tilde{B}_m^\infty$, $\text{pr}(\mathbf{b}) = sw$, то $\mathbf{b} = \prod_{p \in \mathbb{N}/s} \mathbf{b}_p$, где $\mathbf{b}_p \in \text{pr}^{-1}(s^{(p)}w(p))$.

Теорема 3. Пусть π — факторпредставление конечного типа группы $\tilde{B}_m^\infty$, χ_π — соответствующий след и $\pi_{\mathbf{b}}$ — базисное представление, для которого $c(\pi_{\mathbf{b}}) = c(\pi)$. Тогда существуют α , β , $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ (см. теорему 1), такие, что

$$\chi_\pi(\mathbf{b}) = \chi_{\pi_{\mathbf{b}}}(\mathbf{b}) \chi_{\beta\hat{\beta}}^{\alpha\hat{\alpha}}(\text{pr}(\mathbf{b})), \quad \text{где } \mathbf{b} \in \tilde{B}_m^\infty. \quad (5)$$

Заметим, что при заданных χ_π и $\chi_{\pi_{\mathbf{b}}}$ характер $\chi_{\beta\hat{\beta}}^{\alpha\hat{\alpha}}$ из последнего соотношения определяется неединственным образом. Эта неоднозначность связана со свойствами множества нулей функции χ_π и для каждого из расширений описывается явно.

Набросок доказательства теоремы 3. Характеры факторпредставлений называют *неразложимыми*. Доказательство *неразложимости* характера χ_π , определенного согласно (5), опирается на теорему 2 и использует соображения мультипликативности.

Основную идею доказательства обратного утверждения мы, опуская технические построения, объясним для триплетов $(-I, I, I)$ и $(-I, -I, I)$.

Если π — факторпредставление группы $\tilde{B}_m^\infty$ и $c(\pi) = (-I, I, I)$, то, опираясь на свойства классов сопряженных элементов, можно показать, что

$$\chi_\pi(\mathbf{b}) = 0, \text{ когда перестановка } s \text{ из } sw = \text{pr}(\mathbf{b}) \text{ имеет цикл четной длины.} \quad (6)$$

Отсюда можно вывести свойство *мультипликативности* характера χ_π : $\chi_\pi(\mathbf{b}) = \prod_{p \in \mathbb{N}/s} \chi_\pi(\mathbf{b}_p)$, которое в случае $(-I, -I, I)$ нарушается. Следовательно, представление Гельфанда–Найма–Сигала, построенное по $\chi_\Phi \otimes \chi_\pi$, является обычным факторпредставлением группы B_m^∞ . Согласно теореме 1, $\chi_\Phi \otimes \chi_\pi = \chi_{\beta\hat{\beta}}^{\alpha\hat{\alpha}}$. Из (6) можно получить следующие важные соотношения:

$$\{\mathbf{b} \in \tilde{B}_m^\infty \mid \chi_\Phi(\mathbf{b}) = 0\} \subset \{\mathbf{b} \in \tilde{B}_m^\infty \mid \chi_\pi(\mathbf{b}) = 0\}, \quad \alpha_k = \beta_k, \quad \hat{\alpha}_k = \hat{\beta}_k \quad \forall k. \quad (7)$$

Таким образом, χ_π однозначно восстанавливается по $\chi_{\beta\hat{\beta}}^{\alpha\hat{\alpha}}$. Опираясь на (7), с помощью несложных вычислений можно убедиться, что $\chi_\pi = \chi_\Phi \otimes \chi_0^{2\alpha\hat{\alpha}}$.

При доказательстве аналогов свойств (6), (7) для факторпредставления π с $c(\pi) = (-I, -I, I)$ мы, следуя подходу Окунькова [6], вводим операторы $\mathcal{O}_i = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=i+1}^{i+n} t_{(ik)}$, где $t_{(ik)} = (-1)^{k-i-1} \pi(\tilde{s}_{k-1} \cdots \tilde{s}_{i+1} \tilde{s}_i \tilde{s}_{i+1} \cdots \tilde{s}_{k-1})$. Если ξ — циклический отделяющий вектор для π , соответствующий следу χ_π , и $\text{pr}(\mathbf{b}) = sw$, то для любого $i(p)$ из орбиты p перестановки s

$$\chi_\pi(\mathbf{b}) = (\pi(\mathbf{b})\xi, \xi) = \pm (\mathcal{O}_{i(p_1)}^{|p_1|-1} \pi(\tilde{w}_{i(p_1)})^{d(p_1)} \mathcal{O}_{i(p_2)}^{|p_2|-1} \pi(\tilde{w}_{i(p_2)})^{d(p_2)} \cdots \xi, \xi), \quad (8)$$

где $\tilde{w} = \prod_i \tilde{w}_i^{d_i}$, $d(p) = \sum_{i \in p} d_i$. Далее доказываются следующие соотношения: $\pi(\tilde{s}_k) \mathcal{O}_{k+1} = -\mathcal{O}_k \pi(\tilde{s}_k)$; $\pi(\tilde{s}_k) \mathcal{O}_i = -\mathcal{O}_i \pi(\tilde{s}_k)$, $k \neq i-1, i$; $\pi(\tilde{w}_k) \mathcal{O}_i = -\mathcal{O}_i \pi(\tilde{w}_k)$ для любых i, k ; $\mathcal{O}_k \mathcal{O}_i = -\mathcal{O}_i \mathcal{O}_k$, $i \neq k$. Отсюда и из (8) можно получить утверждение (6) и включение из (7) (Φ заменяется на $\Phi \otimes F$). Теперь замечаем, что характеру $\chi_1 = \chi_F \otimes \chi_\pi$ соответствует представление π_1 с $c(\pi_1) = (-I, I, I)$, которое может и не быть фактором. Но фактором является W^* -алгебра, порожденная $F(\tilde{B}_m^\infty) \otimes I$ и $I \otimes \pi(\tilde{B}_m^\infty)$. Отсюда, опираясь на вид представления

F , можно вывести, что χ_1 есть среднее не более чем двух неразложимых характеров $\chi = \chi_F \otimes \chi_0^{\alpha\hat{\alpha}}$ и $\chi' = \chi_F \otimes \chi_0^{\alpha'\hat{\alpha}'}$, где $\alpha_k = \alpha'_k$, а $\hat{\alpha}_k(w_i) = -\hat{\alpha}'_k(w_i)$ на образующей $w_i \in \mathbb{Z}_m$. Теперь утверждение теоремы для рассматриваемого случая вытекает из соотношения

$$\chi_1 = \chi_F \otimes \chi_\pi = \chi_F \otimes \chi_F \otimes \chi_0^{\alpha\hat{\alpha}} = \chi_F \otimes \chi_F \otimes \chi_0^{\alpha'\hat{\alpha}'}.$$

Мы благодарны рецензенту за ряд важных рекомендаций и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Boyer, Int. J. Math. Math. Sci., **9** (2005), 1365–1379. [2] A. Dudko, N. Nessonov, <http://arxiv.org/abs/math/0510597>. [3] В. Н. Иванов, Зап. научн. сем. ПОМИ, **240** (1997), 115–135; <http://arxiv.org/abs/math/0303169>. [4] A. Morris, H. Jones, Sem. Lothar. Combin., **50**, Art. B50b (2003). [5] M. L. Nazarov, in: Representation Theory and Dynamical Systems, Adv. Soviet Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1992, 115–130. [6] А. Ю. Окуньков, Функц. анализ и его прил., **28**:2 (1994), 31–40.

Физико-технический институт низких температур, Харьков Поступило в редакцию
e-mail: artemdudko@rambler.ru 12 мая 2006 г.

Физико-технический институт низких температур, Харьков
e-mail: nessonov@ilt.kharkov.ua

УДК 517.986.4

Операторы Рака для группы движений*

© 2008. Р. С. ИСМАГИЛОВ

Введение. Классическим коэффициентам Рака посвящено большое число работ, многие из которых связаны с физическими приложениями (см. [1]–[4]). В работе автора [5] в качестве обобщения коэффициентов Рака дано определение *операторов Рака* для унитарных неприводимых представлений локально-компактных групп типа I. В данной работе мы воспроизведем это определение для представлений группы G , состоящей из движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Затем мы укажем явный вид операторов Рака для этой группы.

1. Представления группы G и их тензорные произведения. Начнем с обозначений. Элементы группы G записываем в виде $g = (u, a)$, где $u \in SO(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$ (таким образом, g — это движение $x \mapsto xu + a$). Подгруппа $SO(3)$ действует на сфере $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x, x) = 1\}$ по формуле $x \mapsto xu$; стабилизатор любой точки изоморфен группе $SO(2)$ (отождествим эту группу с $T^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$). Любое неприводимое унитарное представление группы G , нетривиальное на подгруппе $\mathbb{R}^3 \subset G$, задается парой (m, l) , где $m \in \mathbb{Z}$ и $l > 0$; обозначим его через $T^{m, l}$. Оно реализуется в пространстве $L_2(S^2)$; на подгруппе $\mathbb{R}^3$ это представление сводится к умножению на функцию $x \mapsto \exp(il(a, x))$, а на подгруппе $SO(3)$ оно индуцировано характером $z \mapsto z^m$ группы T^1 .

*Работа поддержана РФФИ, гранты 05-01-00001 и 07-01-91209 ЯФ_а.