Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Операторы Рака для группы движений, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 1, 85–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:31:20

F , можно вывести, что χ_1 есть среднее не более чем двух неразложимых характеров $\chi = \chi_F \otimes \chi_0^{\alpha\hat{\alpha}}$ и $\chi' = \chi_F \otimes \chi_0^{\alpha'\hat{\alpha}'}$, где $\alpha_k = \alpha'_k$, а $\hat{\alpha}_k(w_i) = -\hat{\alpha}'_k(w_i)$ на образующей $w_i \in \mathbb{Z}_m$. Теперь утверждение теоремы для рассматриваемого случая вытекает из соотношения

$$\chi_1 = \chi_F \otimes \chi_\pi = \chi_F \otimes \chi_F \otimes \chi_0^{\alpha\hat{\alpha}} = \chi_F \otimes \chi_F \otimes \chi_0^{\alpha'\hat{\alpha}'}.$$

Мы благодарны рецензенту за ряд важных рекомендаций и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Boyer, Int. J. Math. Math. Sci., **9** (2005), 1365–1379. [2] A. Dudko, N. Nessonov, <http://arxiv.org/abs/math/0510597>. [3] В. Н. Иванов, Зап. научн. сем. ПОМИ, **240** (1997), 115–135; <http://arxiv.org/abs/math/0303169>. [4] A. Morris, H. Jones, Sem. Lothar. Combin., **50**, Art. B50b (2003). [5] M. L. Nazarov, in: Representation Theory and Dynamical Systems, Adv. Soviet Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1992, 115–130. [6] А. Ю. Окуньков, Функц. анализ и его прил., **28**:2 (1994), 31–40.

Физико-технический институт низких температур, Харьков Поступило в редакцию
e-mail: artemdudko@rambler.ru 12 мая 2006 г.

Физико-технический институт низких температур, Харьков
e-mail: nessonov@ilt.kharkov.ua

УДК 517.986.4

Операторы Рака для группы движений*

© 2008. Р. С. ИСМАГИЛОВ

Введение. Классическим коэффициентам Рака посвящено большое число работ, многие из которых связаны с физическими приложениями (см. [1]–[4]). В работе автора [5] в качестве обобщения коэффициентов Рака дано определение *операторов Рака* для унитарных неприводимых представлений локально-компактных групп типа I. В данной работе мы воспроизведем это определение для представлений группы G , состоящей из движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Затем мы укажем явный вид операторов Рака для этой группы.

1. Представления группы G и их тензорные произведения. Начнем с обозначений. Элементы группы G записываем в виде $g = (u, a)$, где $u \in SO(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$ (таким образом, g — это движение $x \mapsto xu + a$). Подгруппа $SO(3)$ действует на сфере $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x, x) = 1\}$ по формуле $x \mapsto xu$; стабилизатор любой точки изоморфен группе $SO(2)$ (отождествим эту группу с $T^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$). Любое неприводимое унитарное представление группы G , нетривиальное на подгруппе $\mathbb{R}^3 \subset G$, задается парой (m, l) , где $m \in \mathbb{Z}$ и $l > 0$; обозначим его через $T^{m, l}$. Оно реализуется в пространстве $L_2(S^2)$; на подгруппе $\mathbb{R}^3$ это представление сводится к умножению на функцию $x \mapsto \exp(il(a, x))$, а на подгруппе $SO(3)$ оно индуцировано характером $z \mapsto z^m$ группы T^1 .

*Работа поддержана РФФИ, гранты 05-01-00001 и 07-01-91209 ЯФ_a.

Тензорное произведение $T^{m_1, l_1} \otimes T^{m_2, l_2}$ разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений; точнее,

$$T^{m_1, l_1} \otimes T^{m_2, l_2} \simeq \int_{\mathbb{Z}}^{\oplus} \int_{\Delta}^{\oplus} T^{r, s} d(r, s).$$

Здесь $\Delta = (|l_1 - l_2|, l_1 + l_2)$, а интегрирование по $\mathbb{Z}$ означает суммирование. В дальнейшем этот изоморфизм (в выборе которого имеется некоторая степень произвола) считается фиксированным.

2. Операторы Рака. Рассмотрим тензорное произведение $T^{m_1, l_1} \otimes T^{m_2, l_2} \otimes T^{m_3, l_3}$. Разложим его на неприводимые представления двумя способами. Во-первых, разложим $T^{m_1, l_1} \otimes T^{m_2, l_2}$ (как только что описано) по представлениям $T^{r, s}$; затем аналогичным образом разложим $T^{r, s} \otimes T^{m_3, l_3}$ (для любых r, s , участвующих в указанном разложении) на представления $T^{m, l}$. Чтобы записать окончательный результат, понадобится область D_1 на (s, l) -плоскости, заданная неравенствами $|l_1 - l_2| \leq s \leq l_1 + l_2$, $|s - l_3| \leq l \leq s + l_3$. Пусть $h_0 = \min\{l : (s, l) \in D_1\}$, $h_1 = \max\{l : (s, l) \in D_1\}$. Нетрудно заметить, что $h_1 = l_1 + l_2 + l_3$. Рассмотрим, далее, интервал $\Delta = (h_0, h_1)$ и для каждой точки $l \in \Delta$ введем интервал $\omega_1(l) = \{s : (s, l) \in D_1\}$.

Теперь запишем обещанное разложение:

$$T^{m_1, l_1} \otimes T^{m_2, l_2} \otimes T^{m_3, l_3} \simeq \int_{\mathbb{Z} \times \Delta} T^{m, l} \otimes I_1^{m, l} d(m, l), \quad (1)$$

где $I_1^{m, l}$ означает тождественный оператор в $L_2(\mathbb{Z} \times \omega_1(l))$.

Далее, проделаем аналогичные шаги, но со следующим изменением: сначала разложим $T^{m_2, l_2} \otimes T^{m_3, l_3}$ на представления $T^{r, s}$, а затем разложим каждое $T^{m_1, l_1} \otimes T^{r, s}$ на представления $T^{m, l}$. В итоге получаем второе разложение:

$$T^{m_1, l_1} \otimes T^{m_2, l_2} \otimes T^{m_3, l_3} \simeq \int_{\mathbb{Z} \times \Delta} T^{m, l} \otimes I_2^{m, l} d(m, l). \quad (2)$$

Здесь роль области D_1 выполняет область D_2 , задаваемая неравенствами $|l_2 - l_3| \leq s \leq l_2 + l_3$, $|s - l_1| \leq l \leq l_1 + s$; заметим, что здесь интервал Δ — тот же, что в (1). Через $I_2^{m, l}$ обозначен тождественный оператор в $L_2(\mathbb{Z} \times \omega_2(l))$, где $\omega_2(l) = \{s : (s, l) \in D_2\}$.

Из (1) и (2) получаем следующую эквивалентность:

$$\int_{\mathbb{Z} \times \Delta} T^{m, l} \otimes I_1^{m, l} d(m, l) \simeq \int_{\mathbb{Z} \times \Delta} T^{m, l} \otimes I_2^{m, l} d(m, l). \quad (3)$$

Подчеркнем, что формулы (1), (2), (3) не только утверждают эквивалентность указанных представлений; имеется в виду, что они явно задают соответствующие сплетающие операторы. Ясно, что оператор, сплетающий представления из формулы (3), задается семейством унитарных операторов $R(m, l) : L_2(\mathbb{Z} \times \omega_1(l)) \rightarrow L_2(\mathbb{Z} \times \omega_2(l))$. Это и есть (по определению) набор операторов Рака.

Дадим более удобную реализацию этих операторов. С этой целью поставим в соответствие каждой функции $(r, s) \mapsto f(r, s)$, взятой из гильбертова пространства $L_2(\mathbb{Z} \times \omega_k(l))$, $k = 1, 2$, функцию

$$(\theta, s) \mapsto f^\circ(\theta, s) = \sum_r f(r, s) \theta^{-r}, \quad (\theta, s) \in T^1 \times \omega_k(l), \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, пространства $L_2(\mathbb{Z} \times \omega_k(l))$ заменяются унитарно-изоморфными пространствами $L_2(T^1 \times \omega_k(l))$, $k = 1, 2$, а операторы Рака $R(m, l)$ перейдут в операторы

$$R^o(m, l): L_2(T^1 \times \omega_1(l)) \rightarrow L_2(T^1 \times \omega_2(l)). \quad (4)$$

Сохраним для них название «операторы Рака». В следующем разделе содержатся приготовления для их явного вычисления.

3. Четырехугольное преобразование. Возьмем в трехмерном евклидовом пространстве упорядоченную четверку $(A_1 \cdots A_4)$ точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой); можно считать, что это тетраэдр (возможно, вырожденный, если точки лежат на одной плоскости). Любой упорядоченной паре A_j, A_k , $j < k$, поставим в соответствие число τ_{jk} следующим образом. Возьмем две оставшиеся точки A_r, A_s , упорядоченные так, что $r < s$. Рассмотрим две полуплоскости, первая из которых содержит точки A_j, A_k, A_r , вторая — точки A_j, A_k, A_s , причем точки A_j, A_k — граничные. Пусть ϕ_{jk} — величина угла, на который следует повернуть первую полуплоскость против хода часовой стрелки (для наблюдателя, чей взгляд обращен от A_j к A_k) до совпадения со второй. Уместно назвать ϕ_{jk} *ориентированным двугранным углом* тетраэдра $(A_1 \cdots A_4)$ при ребре $A_j A_k$. Положим $\tau_{jk} = \exp(i\phi_{jk})$.

Рассмотрим теперь множество всех таких четверок точек $(A_1 \cdots A_4)$, у которых длины отрезков $A_j A_{j+1}$, $j = 1, 2, 3$, и отрезка $A_1 A_4$ равны фиксированным числам l_1, l_2, l_3, l . Имеем, таким образом, замкнутые четырехугольники $(A_1 \cdots A_4)$ с фиксированными длинами сторон и с шарнирами при вершинах; четырехугольники, совместимые некоторым движением пространства (каждая вершина одного совмещается с вершиной другого с тем же обозначением), отождествляются. Полученное таким образом многообразие четырехугольников обозначим через $\mathcal{M}$.

Сейчас мы параметризуем $\mathcal{M}$, причем двумя способами. Введем числа $h_0 = \inf |A_1 A_3|$ и $h_1 = \sup |A_1 A_3|$ (здесь $\inf$ и $\sup$ берутся по всем четырехугольникам из $\mathcal{M}$) и рассмотрим цилиндр $C = (h_0, h_1) \times T^1$. Параметризуем $\mathcal{M}$ при помощи соответствия $(A_1 \cdots A_4) \mapsto (s, \theta)$, где $s = |A_1 A_3|$, $\theta = \tau_{13}$. В результате получаем диффеоморфизм $\mathcal{M} \simeq C$.

Аналогично вводится параметризация $(A_1 \cdots A_4) \mapsto (s', \theta')$, где $s' = |A_2 A_4|$, $\theta' = \tau_{24}$, и соответствующий цилиндр $C' = (h'_0, h'_1) \times T^1$, где $h'_0 = \inf |A_2 A_4|$ и $h'_1 = \sup |A_2 A_4|$. Это приводит к диффеоморфизму $\mathcal{M} \simeq C'$. Из диффеоморфизмов $\mathcal{M} \simeq C$ и $\mathcal{M} \simeq C'$ возникает диффеоморфизм $C \rightarrow C'$, $(s, \theta) \mapsto (s', \theta')$. Назовем его *четырехугольным преобразованием*. Оно обладает следующим примечательным свойством.

Лемма. *Четырехугольное преобразование $C \rightarrow C'$, $(s, \theta) \mapsto (s', \theta')$, сохраняет площади.*

(Речь идет о стандартной форме площади на обоих цилиндрах C и C' .)

4. Формула для операторов Рака. Вернемся к представлениям T^{m_k, l_k} , $k = 1, 2, 3$, и оператору Рака, указанному в (4); пара (m, l) фиксирована. Опишем его явно. Для этого рассмотрим многообразие $\mathcal{M}$, состоящее из четырехугольников $(A_1 \cdots A_4)$ со следующими длинами сторон: $|A_1 A_2| = l_1$, $|A_2 A_3| = l_2$, $|A_3 A_4| = l_3$, $|A_4 A_1| = l$. Как и в разд. 3, параметризуем $\mathcal{M}$ посредством цилиндров C и C' .

Основная теорема. Оператор Рака $R^\circ(m, l)$ действует по формуле

$$(R^\circ(m, l)f)(|A_2 A_4|, \tau_{24}) \\ = (\tau_{12})^{m_1} (-\tau_{23})^{m_2} (\tau_{34})^{m_3} (\tau_{14})^m f(|A_1 A_3|, -\tau_{13}), \quad f \in L_2(C).$$

Примечание при корректуре. Ю. А. Неретин сообщил автору, что А. А. Клячко построил симплектическую форму на многообразии шарнирных многоугольников (с любым числом сторон). Наша лемма из разд. 3 следует из этой конструкции (А. А. Klyachko, in: *Algebraic Geometry and Its Applications* (Yaroslavl, 1992), Vieweg, Braunschweig, 1994, 67–84). Автор благодарит Ю. А. Неретина за это сообщение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. И. Голод, *Математические основы теории симметрий*, Ижевск, 2001.
 [2] А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, М., 1985. [3] В. А. Кнып, П. П. Пипирайте, Ю. Ф. Смирнов, *Ядерная физика*, т. 22, 1975. [4] W. Groenevelt, <http://xxx.arxiv.org/abs/math.CA/0501511>. [5] Р. С. Исмагилов, *Функц. анализ и его прил.*, **40:3** (2006), 69–72.

Московский государственный
 технический университет им. Н. Э. Баумана
 email: ismagil@serv.bmstu.ru

Поступило в редакцию
 13 марта 2006 г.

УДК 515.164.32

О характеристических классах Q -многообразий*

© 2008. С. Л. Ляхович, Е. А. Мосман, А. А. Шарапов

1. Пусть $\mathcal{T}(M) = \bigoplus_{n,m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^{(n,m)}(M)$ — тензорная алгебра, ассоциированная с гладким супермногообразием M ; здесь $\mathcal{T}^{(n,m)}(M)$ — пространство n раз контравариантных и m раз ковариантных тензорных полей на M . Элементы из $\mathcal{T}^{(1,1)}(M)$ естественным образом отождествляются с эндоморфизмами $C^\infty(M)$ -модуля $\mathcal{T}^{(1,0)}(M)$. Операция композиции эндоморфизмов наделяет $\mathcal{T}^{(1,1)}(M)$ структурой ассоциативной супералгебры над $C^\infty(M)$, для которой введем специальное обозначение $\mathcal{A}$. На алгебре $\mathcal{A}$ определен суперслед, являющийся $C^\infty(M)$ -линейным отображением $\text{Str}: \mathcal{A} \rightarrow C^\infty(M)$, обращающимся в нуль на суперкоммутаторах.

2. Нечетное векторное поле $Q \in \mathcal{T}^{(1,0)}(M)$ называется *гомологическим*, если $Q^2 = \frac{1}{2}[Q, Q] = 0$. По определению [5] пара (M, Q) называется *Q -многообразием*.

Простейшим примером Q -многообразия является нечетное касательное расслоение PTN (касательное расслоение многообразия N с обращенной четностью слоев). Суперкоммутативная алгебра функций $C^\infty(\text{PTN})$ естественным образом изоморфна внешней алгебре дифференциальных форм на N с дерамовским дифференциалом в качестве гомологического векторного поля на PTN .

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 05-01-00996-а (С. Л. Ляхович) и грантом РФФИ 06-02-17352-а (Е. А. Мосман, А. А. Шарапов).