Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Ляхович, Е. А. Мосман, А. А. Шарапов,
О характеристических классах Q -многообразий,
Функц. анализ и его прил., 2008, том 42, вы-
пуск 1, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:29:33

Основная теорема. Оператор Рака $R^\circ(m, l)$ действует по формуле

$$(R^\circ(m, l)f)(|A_2 A_4|, \tau_{24}) = (\tau_{12})^{m_1} (-\tau_{23})^{m_2} (\tau_{34})^{m_3} (\tau_{14})^m f(|A_1 A_3|, -\tau_{13}), \quad f \in L_2(C).$$

Примечание при корректуре. Ю. А. Неретин сообщил автору, что А. А. Клячко построил симплектическую форму на многообразии шарнирных многоугольников (с любым числом сторон). Наша лемма из разд. 3 следует из этой конструкции (А. А. Klyachko, in: *Algebraic Geometry and Its Applications* (Yaroslavl, 1992), Vieweg, Braunschweig, 1994, 67–84). Автор благодарит Ю. А. Неретина за это сообщение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. И. Голод, *Математические основы теории симметрий*, Ижевск, 2001.
 [2] А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, М., 1985. [3] В. А. Кнып, П. П. Пипирайте, Ю. Ф. Смирнов, *Ядерная физика*, т. 22, 1975. [4] W. Groenevelt, <http://xxx.arxiv.org/abs/math.CA/0501511>. [5] Р. С. Исмагилов, *Функц. анализ и его прил.*, **40:3** (2006), 69–72.

Московский государственный
 технический университет им. Н. Э. Баумана
 email: ismagil@serv.bmstu.ru

Поступило в редакцию
 13 марта 2006 г.

УДК 515.164.32

О характеристических классах Q -многообразий*

© 2008. С. Л. Ляхович, Е. А. Мосман, А. А. Шарапов

1. Пусть $\mathcal{T}(M) = \bigoplus_{n,m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^{(n,m)}(M)$ — тензорная алгебра, ассоциированная с гладким супермногообразием M ; здесь $\mathcal{T}^{(n,m)}(M)$ — пространство n раз контравариантных и m раз ковариантных тензорных полей на M . Элементы из $\mathcal{T}^{(1,1)}(M)$ естественным образом отождествляются с эндоморфизмами $C^\infty(M)$ -модуля $\mathcal{T}^{(1,0)}(M)$. Операция композиции эндоморфизмов наделяет $\mathcal{T}^{(1,1)}(M)$ структурой ассоциативной супералгебры над $C^\infty(M)$, для которой введем специальное обозначение $\mathcal{A}$. На алгебре $\mathcal{A}$ определен суперслед, являющийся $C^\infty(M)$ -линейным отображением $\text{Str}: \mathcal{A} \rightarrow C^\infty(M)$, обращающимся в нуль на суперкоммутаторах.

2. Нечетное векторное поле $Q \in \mathcal{T}^{(1,0)}(M)$ называется *гомологическим*, если $Q^2 = \frac{1}{2}[Q, Q] = 0$. По определению [5] пара (M, Q) называется *Q -многообразием*.

Простейшим примером Q -многообразия является нечетное касательное расслоение PTN (касательное расслоение многообразия N с обращенной четностью слоев). Суперкоммутативная алгебра функций $C^\infty(\text{PTN})$ естественным образом изоморфна внешней алгебре дифференциальных форм на N с дерамовским дифференциалом в качестве гомологического векторного поля на PTN .

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 05-01-00996-а (С. Л. Ляхович) и грантом РФФИ 06-02-17352-а (Е. А. Мосман, А. А. Шарапов).

Большой запас интересных примеров Q -многообразий доставляют алгеброиды Ли [1], а также всевозможные калибровочные теории [5], [4].

Наличие гомологического векторного поля превращает $\mathcal{T}(M)$ в ассоциативную дифференциальную алгебру относительно следующего дифференциала:

$$\delta A = L_Q A \quad \forall A \in \mathcal{T}(M),$$

где L_Q — производная Ли вдоль гомологического векторного поля Q . Свойство $\delta^2 = 0$ следует из тождества $L_Q^2 = L_{Q^2} = 0$. Группы когомологий по отношению к δ обозначим через $H_Q(M)$.

3. Пусть ∇ — симметричная связность на M с тензором кривизны $R_{XY} \in \mathcal{A}$,

$$R_{XY} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad \forall X, Y \in \mathcal{T}^{(1,0)}(M).$$

Отметим следующие полезные соотношения, характеризующие геометрию Q -многообразий со связностью:

$$\nabla_Q Q = 0, \quad \nabla_Q \Lambda = \frac{1}{2} R_{QQ} + \Lambda^2, \quad \nabla_X R_{QQ} = 2(R_{[X, Q]Q} - \nabla_Q R_{QX}), \quad (1)$$

где X — произвольное векторное поле, а $\Lambda \in \mathcal{A}$ — нечетный эндоморфизм $\mathcal{T}^{(1,0)}(M)$, определенный равенством $\Lambda(X) = \nabla_X Q$.

4. Универсальными коциклами Q -многообразия M назовем δ -коциклы $\mathcal{C}_\nabla[Q] \in \mathcal{T}(M)$, являющиеся полиномами от гомологического векторного поля Q , тензора кривизны R и их ковариантных производных до некоторого конечного порядка [4]. Термин «универсальный» подчеркивает то обстоятельство, что условие замкнутости $\delta(\mathcal{C}_\nabla[Q]) = 0$ является исключительно следствием гомологичности векторного поля Q и не апеллирует к конкретному виду Q , ∇ и M . Например, тензорные степени гомологического векторного поля $Q^{\otimes n} \in \mathcal{T}^{(n,0)}(M)$ исчерпывают все универсальные коциклы, не зависящие от связности. Другой пример универсальных коциклов — функции $\text{Str}((R_{QQ})^{2n}) \in C^\infty(M)$, $n \in \mathbb{N}$, являющиеся значениями характеров Понтрягина касательного расслоения TM на гомологическом векторном поле Q . (О характеристических классах супервекторных расслоений см. [2].)

5. Характеристические классы Q -многообразий — это элементы из $H_Q(M)$, отвечающие универсальным коциклам.

Предложение 1. Характеристические классы Q -многообразий не зависят от выбора симметричной связности ∇ , т.е. являются инвариантами самого Q -многообразия.

Доказательство. Приведем доказательство для случая скалярных характеристических классов. Пусть $\mathcal{C}_{\nabla_0}[Q]$ и $\mathcal{C}_{\nabla_1}[Q]$ — два универсальных коцикла на (M, Q) , отличающиеся друг от друга лишь выбором связности. Рассмотрим прямое произведение супермногообразия M и линейного суперпространства $\mathbb{R}^{1,1}$ с одной четной координатой t и одной нечетной координатой θ . Снабдим супермногообразие $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}^{1,1}$ гомологическим векторным полем $\widetilde{Q} = Q + \theta \partial_t$ и связностью $\widetilde{\nabla} = \nabla_t \oplus \nabla'$, где $\nabla_t = t \nabla_1 + (1-t) \nabla_0$ — однопараметрическое семейство связностей на M , а ∇' — плоская связность на $\mathbb{R}^{1,1}$. По свойству универсальности функция $\mathcal{C}_{\widetilde{\nabla}}[\widetilde{Q}]$ замкнута относительно дифференциала $\widetilde{\delta} = L_{\widetilde{Q}}$. Поскольку $\theta^2 = 0$, видим, что $\mathcal{C}_{\widetilde{\nabla}}[\widetilde{Q}] = \mathcal{C}_{\nabla_t}[Q] + \theta \Psi_{\nabla_t}[Q]$, где $\Psi_{\nabla_t}[Q]$ — некоторое выражение, зависящее от Q и ∇_t . Условие замкнутости $\widetilde{\delta}(\mathcal{C}_{\widetilde{\nabla}}[\widetilde{Q}]) = 0$

эквивалентно тогда следующим требованиям:

$$\delta(\mathcal{C}_{\nabla_t}[Q]) = 0, \quad \partial_t \mathcal{C}_{\nabla_t}[Q] = \delta(\Psi_{\nabla_t}[Q]).$$

Интегрируя второе выражение по t от нуля до единицы, получим $\mathcal{C}_{\nabla_1}[Q] - \mathcal{C}_{\nabla_0}[Q] = \delta \int_0^1 dt \Psi_{\nabla_t}[Q]$. Таким образом, коциклы $\mathcal{C}_{\nabla_0}[Q]$ и $\mathcal{C}_{\nabla_1}[Q]$ когомологичны. $\square$

Первая нетривиальная серия характеристических классов Q -многообразий была построена в работе [4]. Универсальные коциклы, представляющие эти классы, используют первые ковариантные производные гомологического векторного поля и имеют следующую структуру:

$$C^\infty(M) \ni \mathcal{C}_{\nabla}^n[Q] = \text{Str}(\Lambda^{4n-3}) + (\text{члены, зависящие от кривизны}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

В этой же работе была установлена связь класса $\mathcal{C}_{\nabla}^1[Q]$ с однопетлевыми аномалиями в методе БВ-квантования калибровочных теорий. В частном случае гомологических векторных полей, отвечающих алгеброидам Ли [1], конструкция (2) воспроизводит характеристические классы алгеброидов Ли, введенные в работе [3].

6. В настоящей заметке мы предъявляем новую серию характеристических классов, представители которой существенно зависят от вторых ковариантных производных гомологического векторного поля.

Предложение 2. Пусть X — векторное поле. Положим $A_X \equiv \nabla_X \Lambda - R_{XQ} \in \mathcal{A}$ и отождествим элементы из $\mathcal{T}^{(0,n)}(M)$ с полями n -форм на TM . Тогда формы

$$\mathcal{C}_n(X_1, \dots, X_n) = \text{Str}(A_{X_1} A_{X_2} \cdots A_{X_n}) \quad (3)$$

являются универсальными коциклами в смысле определения из разд. 4.

Доказательство. Из соотношений (1) легко следует, что

$$\nabla_Q A_X - A_{[Q,X]} = -[\Lambda, A_X], \quad \forall X \in \mathcal{T}^{(1,0)}(M).$$

По определению дифференциала δ имеем

$$\begin{aligned} (\delta \mathcal{C}_n)(X_1, \dots, X_n) &= \nabla_Q(\mathcal{C}_n(X_1, \dots, X_n)) - \sum_{k=1}^n (-1)^{\varepsilon_k} \mathcal{C}_n(X_1, \dots, [Q, X_k], \dots, X_n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{\varepsilon_k} \text{Str}(A_{X_1} \cdots (\nabla_Q A_{X_k} - A_{[Q,X_k]}) \cdots A_{X_n}) \\ &= - \sum_{k=1}^n (-1)^{\varepsilon_k} \text{Str}(A_{X_1} \cdots [\Lambda, A_{X_k}] \cdots A_{X_n}) \\ &= - \text{Str}([\Lambda, A_{X_1} \cdots A_{X_n}]) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_k = \sum_{s=1}^{k-1} (\varepsilon(X_s) + 1)$, и мы воспользовались свойством цикличности суперследа. $\square$

Можно показать, что в общем случае коциклы (3) нетривиальны и не когомологичны универсальным коциклам, зависящим лишь от поля Q и его первых ковариантных производных.

Авторы признательны Д. А. Лейтесу за полезные комментарии по тексту статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Ю. Вайнтроб, УМН, **52:2** (1997), 161–163. [2] А. А. Воронов, Ю. И. Манин, И. Б. Пенков, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 32, ВИНТИ, М., 1988, 3–25. [3] R. L. Fernandes, Adv. Math., **170:1** (2002), 119–179. [4] S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, Nucl. Phys. B, **703** (2004), 419–453. [5] A. S. Schwarz, Comm. Math. Phys., **158** (1993), 373–396.

Томский государственный университет
e-mail: sl@phys.tsu.ru

Томский государственный университет
e-mail: moosmann@mail.ru

Томский государственный университет
e-mail: sharapov@phys.tsu.ru

Поступило в редакцию
30 мая 2006 г.

УДК 512.772.5

Соотношение топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}^*$

© 2008. И. И. ШНЕЙБЕРГ

1. В работах [5], [6] естественно возникает алгебраическая конструкция, позволяющая получить продолжение по родам решений вида, указанного в [1], уравнения WDVV, начиная с так называемых сН-алгебр. Существует еще несколько подходов к продолжению решений уравнения WDVV по родам, наиболее изученный из которых — теория Громова–Виттена [3].

Одним из стандартных способов сравнения теорий продолжения по родам решений уравнения WDVV заключается в сравнении универсальных соотношений, которым, помимо WDVV, удовлетворяют различные компоненты полных потенциалов. В частности, в теории Громова–Виттена любое соотношение между естественными стратами в гомологиях пространства модулей кривых определяет универсальное дифференциальное уравнение на компоненты потенциала.

2. В этой статье мы рассматриваем единственное на настоящий момент известное соотношение между стратами, включающее в себя ψ -классы в двух и более точках, — соотношение топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$, см. [2]:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} - 3 \text{Diagram 2} - \frac{13}{5} \text{Diagram 3} - \frac{4}{5} \text{Diagram 4} + \frac{4}{5} \text{Diagram 5} \\
 & - \frac{23}{120} \text{Diagram 6} - \frac{5}{120} \text{Diagram 7} + \frac{3}{120} \text{Diagram 8} - \frac{7}{15} \text{Diagram 9} - \frac{1}{15} \text{Diagram 10} \\
 & + \frac{1}{15} \text{Diagram 11} - \frac{1}{72} \text{Diagram 12} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$