Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шнейберг, Соотношение топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 1, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:18:34

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Ю. Вайнтроб, УМН, **52:2** (1997), 161–163. [2] А. А. Воронов, Ю. И. Манин, И. Б. Пенков, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 32, ВИНТИ, М., 1988, 3–25. [3] R. L. Fernandes, Adv. Math., **170:1** (2002), 119–179. [4] S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, Nucl. Phys. B, **703** (2004), 419–453. [5] A. S. Schwarz, Comm. Math. Phys., **158** (1993), 373–396.

Томский государственный университет
e-mail: sl@phys.tsu.ru

Томский государственный университет
e-mail: moosmann@mail.ru

Томский государственный университет
e-mail: sharapov@phys.tsu.ru

Поступило в редакцию
30 мая 2006 г.

УДК 512.772.5

Соотношение топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}^*$

© 2008. И. И. ШНЕЙБЕРГ

1. В работах [5], [6] естественно возникает алгебраическая конструкция, позволяющая получить продолжение по родам решений вида, указанного в [1], уравнения WDVV, начиная с так называемых сН-алгебр. Существует еще несколько подходов к продолжению решений уравнения WDVV по родам, наиболее изученный из которых — теория Громова–Виттена [3].

Одним из стандартных способов сравнения теорий продолжения по родам решений уравнения WDVV заключается в сравнении универсальных соотношений, которым, помимо WDVV, удовлетворяют различные компоненты полных потенциалов. В частности, в теории Громова–Виттена любое соотношение между естественными стратами в гомологиях пространства модулей кривых определяет универсальное дифференциальное уравнение на компоненты потенциала.

2. В этой статье мы рассматриваем единственное на настоящий момент известное соотношение между стратами, включающее в себя ψ -классы в двух и более точках, — соотношение топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$, см. [2]:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} - 3 \text{Diagram 2} - \frac{13}{5} \text{Diagram 3} - \frac{4}{5} \text{Diagram 4} + \frac{4}{5} \text{Diagram 5} \\
 & - \frac{23}{120} \text{Diagram 6} - \frac{5}{120} \text{Diagram 7} + \frac{3}{120} \text{Diagram 8} - \frac{7}{15} \text{Diagram 9} - \frac{1}{15} \text{Diagram 10} \\
 & + \frac{1}{15} \text{Diagram 11} - \frac{1}{72} \text{Diagram 12} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь мы используем язык двойственных графов (см. [2]), а именно, каждой неприводимой компоненте соответствует вершина, помеченная числом, равным роду компоненты, каждой точке (само)пересечения соответствует ребро и каждой отмеченной точке — полуинтервал. Стрелка на ребре или на полуинтервале означает, что нужно взять ψ -класс в точке, направление к которой указано стрелкой.

Дифференциальное уравнение на потенциал Громова–Виттена

$$F = \sum_{g=1}^{\infty} F_g(\{T_n^a\}), \quad n \geq 0, \quad a = 1, \dots, s,$$

со скалярным произведением η^{ij} определяется следующим стандартным соотношением (см. [2]):

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \swarrow \\ \textcircled{0} \\ \searrow \end{array} &\rightarrow \frac{\partial^2 F_2}{\partial T_{n+1}^a \partial T_{m+1}^b} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial T_n^a \partial T_0^i} \eta^{ij} \frac{\partial^2 F_2}{\partial T_0^j \partial T_0^k} \eta^{kl} \frac{\partial^2 F_0}{\partial T_0^l \partial T_m^b} \\ &\quad - \frac{\partial^2 F_2}{\partial T_{n+1}^a \partial T_0^i} \eta^{ij} \frac{\partial^2 F_0}{\partial T_0^j \partial T_m^b} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial T_{m+1}^b \partial T_0^i} \eta^{ij} \frac{\partial F_0}{\partial T_0^j \partial T_n^a}, \\ \begin{array}{c} \swarrow \\ \textcircled{0} \\ \downarrow \\ \textcircled{2} \end{array} &\rightarrow \left(\frac{\partial F_2}{\partial T_1^i} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial T_0^i \partial T_0^k} \eta^{kl} \frac{\partial F_2}{\partial T_0^l} \right) \eta^{ij} \frac{\partial^3 F_0}{\partial T_0^j \partial T_n^a \partial T_m^b}, \\ \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \textcircled{0} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \end{array} &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial^4 F_0}{\partial T_n^a \partial T_m^b \partial T_0^i \partial T_0^j} \eta^{ik} \eta^{jl} \frac{\partial F_1}{\partial T_0^k} \frac{\partial F_1}{\partial T_0^l}, \end{aligned} \quad (2)$$

и т. д. Первые два выражения сложнее всех последующих, поскольку они включают в себя формулы для поднятия ψ -классов.

3. Напомним определение сН-алгебры [5]. $\mathbb{Z}_2$ -градуированная коммутативная ассоциативная $\mathbb{C}$ -алгебра H называется сН-алгеброй, если на ней определены два линейных оператора $Q, G_- : H \rightarrow H$ и интеграл $\int : H \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

(1) $Q^2 = G_-^2 = QG_- + G_-Q = 0$, т. е. H — бикомплекс с дифференциалами Q и G_- ;

(2) $H = H_0 \oplus H_4$, где $QH_0 = G_-H_0 = 0$, а пространство H_4 представляется в виде суммы четырехмерных подпространств, порожденных векторами $e_\alpha, Qe_\alpha, G_-e_\alpha, QG_-e_\alpha$ для некоторого семейства векторов $e_\alpha \in H_4$; иными словами, $H_4 = \bigoplus_\alpha \langle e_\alpha, Qe_\alpha, G_-e_\alpha, QG_-e_\alpha \rangle$ (разложение Ходжа);

(3) Q является оператором первого порядка, т. е. удовлетворяет правилу Лейбница: $Q(ab) = Q(a)b + (-1)^{\tilde{a}}aQ(b)$ (здесь и далее $\tilde{a}$ означает четность элемента $a \in H$);

(4) G_- является оператором второго порядка, т. е. удовлетворяет 7-членному соотношению $G_-(abc) = G_-(ab)c + (-1)^{\tilde{b}(\tilde{a}+1)}bG_-(ac) + (-1)^{\tilde{a}}aG_-(bc) - G_-(a)bc - (-1)^{\tilde{a}}aG_-(b)c - (-1)^{\tilde{a}+\tilde{b}}abG_-(c)$;

(5) G_- удовлетворяет соотношению $\text{str}(G_- \circ a \cdot) = (1/12) \text{str}(G_-(a) \cdot)$ (здесь $a \cdot$ и $G_-(a) \cdot$ означают операторы умножения на a и $G_-(a)$ соответственно).

Теперь мы определим оператор $G_+ : H \rightarrow H$. Мы полагаем $G_+H_0 = 0$. Далее, учитывая разложение Ходжа, достаточно определить оператор G_+ на каждом из четырехмерных подпространств $\langle e_\alpha, Qe_\alpha, G_-e_\alpha, QG_-e_\alpha \rangle$. Мы сделаем это

следующим образом: $G_+e_\alpha = G_+G_-e_\alpha = 0$, $G_+Qe_\alpha = e_\alpha$ и $G_+QG_-e_\alpha = G_-e_\alpha$. Легко проверить, что $[G_-, G_+] = 0$ и оператор $\Pi_4 = [Q, G_+]$ является проектором на H_4 вдоль H_0 .

Мы полагаем, что интеграл на H есть четная линейная функция $\int: H \rightarrow \mathbb{C}$. Также мы требуем выполнения соотношений $\int Q(a)b = (-1)^{\tilde{a}+1} \int aQ(b)$, $\int G_-(a)b = (-1)^{\tilde{a}} \int aG_-(b)$, $\int G_+(a)b = (-1)^{\tilde{a}} \int aG_+(b)$. Используя эти свойства интеграла, легко получить следующее соотношение: $\int G_-G_+(a)b = \int aG_-G_+(b)$.

Мы можем определить скалярное произведение на H следующим образом: $(a, b) = \int ab$. Мы предполагаем, что определенное нами скалярное произведение невырожденно. Используя скалярное произведение, мы можем превратить произвольный оператор $A: H \rightarrow H$ в бивектор, который будем обозначать через $[A]$.

4. Для каждой сН-алгебры H мы можем определить потенциал F^H , продолжающий решение WDVV из [1].

Зафиксируем однородный базис $\{e_1, \dots, e_s\}$ пространства H_0 . Каждому вектору e_i мы сопоставим набор формальных переменных T_j^i ($j \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$) той же четности, что и e_i .

Потенциал F^H определяется как сумма по графам (определение графа см. в [4]), удовлетворяющим следующим условиям: графы должны быть связными и иметь вершины степени, не меньшей, чем 3. Элементам графа мы ставим в соответствие тензоры. Каждому ребру соответствует бивектор $[G_-G_+]$ или $[\text{Id}]$ (Id — тождественный оператор), причем бивектор $[\text{Id}]$ может соответствовать только петле. Каждому листу (хвосту, см. [4]) соответствует один из векторов $E_j = \sum e_i T_j^i$ ($j \geq 0$). Вершинам степени n соответствует n -форма $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \int a_1 \cdots a_n$.

Теперь рассмотрим произведение n -форм, соответствующих вершинам, и подставим в него тензорное произведение векторов на листьях и бивекторов на ребрах. При этом необходимо осуществлять распределение компонент тензоров в соответствии с тем, какой вершине инцидентны соответствующие ребра и листья. В результате каждому графу соответствует выражение, зависящее от переменных T_j^i . (Тут есть небольшая тонкость, связанная со стандартным изменением знаков в подобных выражениях в градуированном случае. Например, вместо следа нужно рассматривать суперслед; подробнее см. в [5].)

Вклад каждого графа в F^H мы рассматриваем с коэффициентом (весом), который равен произведению двух множителей. Первый множитель — это число, обратное порядку группы автоморфизмов некоторой модификации данного графа. А именно, мы помечаем каждую вершину числом инцидентных ей петель, соответствующих $[\text{Id}]$, после чего удаляем все такие петли и считаем количество автоморфизмов.

Второй множитель равен произведению неких констант, соответствующих вершинам графа. А именно, пусть вершине инцидентны листья, помеченные векторами $E_{d_1}, \dots, E_{d_l}$, g петлей, помеченных бивектором $[\text{Id}]$, и m полуребер, приходящих из ребер, помеченных бивектором $[G_-G_+]$. Вклад такой вершины равен $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,l+m}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_l^{d_l}$.

5. Определим η^{ij} как матрицу, обратную к $\eta_{ij} = (e_i, e_j)$.

Теорема. Потенциал F^H со скалярным произведением η^{ij} удовлетворяет дифференциальному уравнению, определяемому соотношением (1) топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$.

Как было доказано в [5], [6], дифференциальные уравнения подобного вида достаточно проверить в простейшем случае. В этом случае рассматриваемое дифференциальное уравнение сводится к линейному уравнению на слагаемые нулевой степени рядов, получаемых из компонент соответствующего рода ряда F^H применением дифференциальных выражений, соответствующих стратам из (1) (см. (2) при $m = n = 0$). Это линейное уравнение записывается в виде линейного уравнения на графы. С другой стороны, аксиомы сН-алгебры могут быть записаны в виде системы линейных уравнений на графы. Простейший случай дифференциального уравнения, соответствующего (1), является следствием этой системы. Абсолютно такое же рассуждение см. в [8]. Дальнейшее исследование тавтологических соотношений в рамках данного нами определения потенциала см. в [6].

6. Автор приносит благодарность С. В. Шадрину за многочисленные полезные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Barannikov, M. Kontsevich, Internat. Math. Res. Notices, **4** (1998), 201–215.
 [2] E. Getzler, in: Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998, 73–106. [3] M. Kontsevich, Y. Manin, Comm. Math. Phys., **164**:3 (1994), 525–562. [4] Ю. И. Манин, *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*, Изд-во «Факториал Пресс», М., 2002. [5] A. Losev, S. Shadrin, <http://xxx.arxiv.org/math.QA/0506039>. [6] A. Losev, S. Shadrin, I. Shneiberg, Nuclear Phys. B, **786** (2007), 267–296. [7] S. Shadrin, <http://xxx.arxiv.org/abs/math/0507106>. [8] S. Shadrin, I. Shneiberg, J. Geom. Phys., **57**:2 (2007), 597–615.

Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 e-mail: shneiberg@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
 17 сентября 2006 г.