Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Гусейн-Заде, Ф. Дельгадо, А. Кампи-
льо, Универсальные абелевы накрытия рациональ-
ных особенностей поверхностей и мультииндекс-
ные фильтрации, *Функц. анализ и его прил.*, 2008,
том 42, выпуск 2, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2897>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовате-
льским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 07:12:30

Универсальные абелевы накрытия рациональных особенностей поверхностей и мультииндексные фильтрации*

© 2008. С. М. Гусейн-Заде, Ф. Дельгадо, А. Кампильо

В [2] и [3] были вычислены ряды Пуанкаре некоторых (мультииндексных) фильтраций на кольце ростков функций на рациональной особенности поверхности. Эти ряды Пуанкаре были выражены в виде целых частей некоторых дробностепенных рядов, интерпретация которых отсутствовала. В настоящей работе показывается, что с точностью до простой замены переменных эти дробностепенные ряды являются «редукцией» эквивариантных рядов Пуанкаре для некоторых фильтраций на кольце $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}},0}$ ростков функций на универсальном абелевом накрытии $(\tilde{\mathcal{S}}, 0)$ поверхности $(\mathcal{S}, 0)$. Мы вычисляем эти эквивариантные ряды Пуанкаре. С другой точки зрения универсальные абелевы накрытия рациональных особенностей поверхностей изучались в [7].

Пусть $(\mathcal{S}, 0)$ — изолированная рациональная особенность комплексной поверхности, и пусть $\pi: (X, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathcal{S}, 0)$ — ее разрешение (не обязательно минимальное). Здесь X — неособая комплексная поверхность, π — собственное аналитическое отображение, являющееся изоморфизмом вне начала координат в $\mathcal{S}$, исключительный дивизор $\mathcal{D} = \pi^{-1}(0)$ является дивизором с нормальными пересечениями на поверхности X , все компоненты E_σ ($\sigma \in \Gamma$) исключительного дивизора $\mathcal{D}$ изоморфны комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ и (двойственный) граф разрешения является деревом.

Пусть $\mathcal{O}_{\mathcal{S},0}$ — кольцо ростков аналитических функций на поверхности $(\mathcal{S}, 0)$. Для $\sigma \in \Gamma$, т. е. для компоненты E_σ исключительного дивизора $\mathcal{D}$, и для $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{S},0}$ обозначим через $v_\sigma(f)$ порядок нуля поднятия $f \circ \pi$ функции f на пространство X разрешения вдоль компоненты E_σ . Выберем несколько компонент $E_1, \dots, E_s$ исключительного дивизора $\mathcal{D}$ ($\{1, \dots, s\} \subset \Gamma$). Нормирования $v_1, \dots, v_s$ определяют мультииндексную фильтрацию $\{J(\underline{v})\}$ на кольце $\mathcal{O}_{\mathcal{S},0}$: для $\underline{v} = (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{Z}^s$ имеем $J(\underline{v}) := \{f \in \mathcal{O}_{\mathcal{S},0} : \underline{v}(f) \geq \underline{v}\}$ (здесь $\underline{v}(f) = (v_1(f), \dots, v_s(f)) \in \mathbb{Z}^s$ и $\underline{v}' \geq \underline{v}$, если $v'_i \geq v_i$ для всех $i = 1, \dots, s$). (Достаточно определить $J(\underline{v})$ только для неотрицательных $\underline{v}$, т. е. для $\underline{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$). Однако для приведенного ниже определения удобно считать, что $\underline{v} \in \mathbb{Z}^s$.)

Определение ряда Пуанкаре мультииндексной фильтрации можно найти, например, в [2]–[4]. Для одноиндексной фильтрации ряд Пуанкаре — это произво-

*Исследование частично поддержано грантами РФФИ-007-00593, INTAS-05-7805, NWO-RFBR 047.011.2004.026 и RFBR-JSPS 06-01-91063 (С. М. Гусейн-Заде) и грантом MTM2007-64704 (Ф. Дельгадо, А. Кампильо).

дящий ряд для размерностей факторов в фильтрации:

$$P(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \dim(J(v)/J(v+1))t^v.$$

Для мультииндексной фильтрации $\{J(\underline{v})\}$ надо взять факторы $J(\underline{v})/J(\underline{v} + \underline{1}_i)$, где $\underline{1}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 находится на i -м месте), и просуммировать их размерности с использованием формулы включения-исключения. Это приводит к следующему определению. Пусть $L(t_1, \dots, t_s) = \sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}^s} \dim(J(\underline{v})/J(\underline{v} + \underline{1})) \cdot \underline{t}^{\underline{v}}$, $\underline{1} = (1, \dots, 1)$, — ряд Лорана от переменных $t_1, \dots, t_s$ (вообще говоря, бесконечный во всех направлениях). Легко понять, что вдоль любой прямой решетки $\mathbb{Z}^s$, параллельной координатной оси, коэффициент при мономе $\underline{t}^{\underline{v}}$ один и тот же для всех $\underline{v}$ из неположительной части прямой. Отсюда следует, что

$$P'(t_1, \dots, t_s) = L(t_1, \dots, t_s) \cdot \prod_{i=1}^s (t_i - 1)$$

является степенным рядом от $t_1, \dots, t_s$, т. е. элементом кольца $\mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_s]]$. Степенной ряд

$$P_S(t_1, \dots, t_s) = \frac{P'(t_1, \dots, t_s)}{t_1 \cdots t_s - 1}$$

называется рядом Пуанкаре фильтрации $\{J(\underline{v})\}$.

Это определение может быть переформулировано в терминах интеграла по эйлеровой характеристике следующим образом. Пусть $\mathbb{P}\mathcal{O}_{S,0}$ — проективизация кольца (векторного пространства) $\mathcal{O}_{S,0}$. Интегрирование по отношению к эйлеровой характеристике по пространству $\mathbb{P}\mathcal{O}_{S,0}$ было определено, например, в [1], [2]. Будем рассматривать $\underline{t}^{\underline{v}}$ как функцию на пространстве $\mathbb{P}\mathcal{O}_{S,0}$ со значениями в группе $\mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_s]]$ степенных рядов от $t_1, \dots, t_s$ (со сложением в качестве групповой операции). Можно показать, что

$$P_S(t_1, \dots, t_s) = \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_{S,0}} \underline{t}^{\underline{v}} d\chi$$

(это следует из того факта, что для конечномерного комплексного векторного пространства эйлерова характеристика его проективизации равна его размерности).

В [2] был вычислен ряд Пуанкаре $P(t_1, \dots, t_s)$ описанной (дивизориальной) фильтрации на кольце $\mathcal{O}_{S,0}$. Пусть $(E_\sigma \circ E_\delta)$ — матрица пересечений компонент исключительного дивизора. Для $\sigma \neq \delta$ индекс пересечения $E_\sigma \circ E_\delta$ равен 1, если компоненты E_σ и E_δ пересекаются (в точке), и нулю, если они не пересекаются; индекс самопересечения $E_\sigma \circ E_\sigma$ каждой компоненты E_σ — отрицательное целое число. Пусть $d = \det(-(E_\sigma \circ E_\delta))$, и пусть $(m_{\sigma\delta}) = -(E_\sigma \circ E_\delta)^{-1}$. Все элементы $m_{\sigma\delta}$ положительны, и $m_{\sigma\delta} \in (1/d)\mathbb{Z}$. Для $\sigma \in \Gamma$ положим $\underline{m}_\sigma := (m_{\sigma 1}, \dots, m_{\sigma s}) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^s$. Пусть $\dot{E}_\sigma$ — «неособая часть» компоненты E_σ в исключительном дивизоре $\mathcal{D}$, т. е. E_σ без точек пересечения со всеми остальными компонентами исключительного дивизора $\mathcal{D}$.

Для дробностепенного ряда $S(t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{Z}[[t_1^{1/d}, \dots, t_s^{1/d}]]$ обозначим через $\text{Int } S(t_1, \dots, t_s)$ его «целую часть», т. е. сумму всех его мономов с целыми показателями степеней. В [2] было показано, что

$$P(t_1, \dots, t_s) = \text{Int} \prod_{\sigma \in \Gamma} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_\sigma})^{-\chi(\dot{E}_\sigma)}, \quad (1)$$

где $\underline{t}^{\underline{m}} := t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_s^{m_s}$, а $\chi(X)$ — эйлерова характеристика пространства X .

Аналогичная формула для ряда Пуанкаре мультииндексной фильтрации на кольце $\mathcal{O}_{S,0}$, определенной порядками роста функции на неприводимых компонентах кривой $(C, 0) \subset (S, 0)$, была получена в [3].

В [2] дробностепенной ряд

$$Q(\underline{t}) = \prod_{\sigma \in \Gamma} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_\sigma})^{-\chi(\dot{E}_\sigma)} \quad (2)$$

(или аналогичный ряд в [3]) участвовал как формальное выражение, удобное для записи формулы (1) для ряда Пуанкаре $P(t_1, \dots, t_s)$. Интерпретация этого ряда отсутствовала.

В [4] был определен эквивариантный ряд Пуанкаре «эквивариантной» фильтрации на кольце $\mathcal{O}_{V,0}$ ростков функций на ростке $(V, 0)$ комплексно-аналитического пространства с действием конечной группы G . Этот ряд Пуанкаре был вычислен для дивизорной фильтрации на кольце $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ и для фильтрации, определенной ветвями G -инвариантной особенности плоской кривой $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$, если на плоскости $\mathbb{C}^2$ имеется действие (представление) группы G .

Пусть $p: (\tilde{S}, 0) \rightarrow (S, 0)$ — универсальное абелево накрытие особенности поверхности $(S, 0)$, см., например, [6], [7]. Оно может быть описано следующим образом. Пусть $G = H_1(S \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$ — первая группа гомологий (неособой) поверхности $S \setminus \{0\}$. Порядок группы G равен определителю d минус матрицы пересечений $-(E_\sigma \circ E_\delta)$, и при этом группа G изоморфна коядру $\mathbb{Z}^\Gamma / \text{Im } I$ отображения $I: \mathbb{Z}^\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^\Gamma$, задаваемого этой матрицей. Группа G действует на ростке $(\tilde{S}, 0)$, и ограничение $p|_{\tilde{S} \setminus \{0\}}$ отображения p на дополнение к началу координат является (обычным, неразветвленным) накрытием $\tilde{S} \setminus \{0\} \rightarrow S \setminus \{0\}$ со структурной группой G . Отображение p может быть поднято до (разветвленного) накрытия $p: (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{D}}) \rightarrow (X, \mathcal{D})$, где $\tilde{X}$ — нормальная поверхность (вообще говоря, не неособая), $\tilde{X} \setminus \tilde{\mathcal{D}} \cong \tilde{S} \setminus \{0\}$:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{D}}) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (\tilde{S}, 0) \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ (X, \mathcal{D}) & \xrightarrow{\pi} & (S, 0) \end{array}$$

(можно определить $\tilde{X}$ как нормализацию расслоенного произведения $X \times_S \tilde{S}$ пространств X и $\tilde{S}$ над S).

Пусть g_σ , $\sigma \in \Gamma$, — элемент группы $G = H_1(X \setminus \mathcal{D}; \mathbb{Z})$, представленный петлей в многообразии $X \setminus \mathcal{D}$, обходящей вокруг компоненты E_σ в положительном направлении. Группа G порождена элементами g_σ для всех $\sigma \in \Gamma$. Для точки $x \in \dot{E}_\sigma$ и для точки $\tilde{x}$ из ее прообраза $p^{-1}(x)$ локально (в окрестности точки $\tilde{x}$)

отображение $p: \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}$ является изоморфизмом, а отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — разветвленным (вдоль $\mathcal{D}$) накрытием, порядок d_σ которого совпадает с порядком образующей g_σ группы G .

Лемма 1. *Порядок d_σ элемента $g_\sigma \in G$ равен наименьшему натуральному k , для которого $kt_{\delta\sigma}$ — целое число для всех $\delta \in \Gamma$.*

Доказательство. Это следует непосредственно из того факта, что $\mathbb{Z}^\Gamma / \text{Im } I \cong \text{Im } m / \mathbb{Z}^\Gamma$, где $m: \mathbb{Z}^\Gamma \rightarrow \mathbb{Q}^\Gamma$ — отображение, определяемое матрицей $(m_{\sigma\delta})$ (т.е. минус обратное к отображению I). $\square$

Пусть $R(G)$ — кольцо (виртуальных) представлений группы G . Для $\sigma \in \Gamma$ пусть α_σ — одномерное представление $G \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbf{GL}(1, \mathbb{C})$ группы G , определенное тем, что $\alpha_\sigma(g_\delta) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}m_{\sigma\delta})$ (здесь знак минус отражает тот факт, что действие элемента $g \in G$ на кольце $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}},0}$ определяется формулой $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}(x))$).

Выберем какую-либо компоненту $\tilde{E}_i$ прообраза $p^{-1}(E_i)$ компоненты E_i , и пусть $\tilde{v}_i$ — соответствующее дивизориальное нормирование на кольце $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}},0}$ ростков функций на $(\tilde{\mathcal{S}}, 0)$. На пространстве $\bigcup_\alpha \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}},0}^\alpha$ всех G -эквивариантных функций на $(\tilde{\mathcal{S}}, 0)$ (α пробегает все неэквивалентные одномерные представления группы G) нормирование $\tilde{v}_i$ не зависит от выбора компоненты $\tilde{E}_i$. В [4] был определен эквивариантный ряд Пуанкаре мультииндексной фильтрации, определенной дивизориальными нормированиями $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s$.

Теорема 1. *Эквивариантный ряд Пуанкаре $P^G(t_1, \dots, t_s)$ s -индексной фильтрации, определенной набором дивизориальных нормирований $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s\}$, дается формулой*

$$\begin{aligned} P^G(t_1, \dots, t_s) &= \prod_{\sigma \in \Gamma} (1 - \alpha_\sigma \underline{t}^{\underline{d}m_\sigma})^{-\chi(\dot{E}_\sigma)} \\ &= \prod_{\sigma \in \Gamma} (1 - \alpha_\sigma t_1^{d_1 m_{1\sigma}} \dots t_s^{d_s m_{s\sigma}})^{-\chi(\dot{E}_\sigma)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Замечание. Эквивалентная формула для одного нормирования (т.е. для $s = 1$), определенного дивизором, являющимся точкой разветвления графа разрешения, получена в [8] для более широкого класса особенностей поверхностей — так называемых фактор-склеенных (splice-quotient), особенностей.

Редукцией $\text{red } S(t_1, \dots, t_s)$ степенного ряда $S(t_1, \dots, t_s) = \sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s} s_{\underline{v}} \underline{t}^{\underline{v}} \in R(G)[[t_1, \dots, t_s]]$ ($R(G)$ — кольцо представлений группы G) назовем ряд $\sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s} (\dim s_{\underline{v}}) \underline{t}^{\underline{v}} \in \mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_s]]$.

Следствие. *Имеет место равенство $\text{red } P^G(t_1, \dots, t_s) = Q(t_1^{d_1}, \dots, t_s^{d_s})$, где $Q(t)$ — дробнотепенной ряд, определенный формулой (2).*

Доказательство теоремы 1. Для краткости будем говорить, что эффективный дивизор на $\dot{\mathcal{D}} = \bigcup \dot{E}_\sigma$ (или на $\dot{\mathcal{D}} = p^{-1}(\dot{\mathcal{D}})$) является дивизором Картье, если он есть пересечение собственного прообраза дивизора Картье на $(\mathcal{S}, 0)$ (или на $(\tilde{\mathcal{S}}, 0)$) с $\dot{\mathcal{D}}$ (или с $\dot{\mathcal{D}}$). Эквивариантный ряд Пуанкаре $P^G(t_1, \dots, t_s)$

может быть представлен в виде интеграла по отношению к эйлеровой характеристике монома $\alpha \underline{t}^{\underline{v}}$ по несвязному объединению $\coprod_{\{\alpha\}} \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathcal{S},0}^\alpha$ проективизаций пространств $\mathcal{O}_{\mathcal{S},0}^\alpha$ ростков функций на $(\tilde{\mathcal{S}}, 0)$, эквивариантных по отношению к различным одномерным представлениям α группы G . Так же, как, например, в [4], определяется отображение из $\coprod_{\{\alpha\}} \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathcal{S},0}^\alpha$ в пространство G -инвариантных эффективных дивизоров на $\dot{\mathcal{D}}$: эквивариантному ростку функции на $(\tilde{\mathcal{S}}, 0)$ ставится в соответствие пересечение собственного прообраза дивизора его нулей с исключительным дивизором $\tilde{\mathcal{D}}$. Из аналога предложения 2 из [2] следует, что прообраз любой точки при этом отображении является комплексным аффинным пространством и поэтому имеет эйлерову характеристику, равную единице. Отсюда вытекает, что эквивариантный ряд Пуанкаре $P^G(\underline{t})$ равен интегралу по эйлеровой характеристике монома $\alpha \underline{t}^{\underline{v}}$ по пространству G -инвариантных эффективных дивизоров Картье на $\dot{\mathcal{D}}$. Здесь α и $\underline{v}$ — функции (в действительности гомоморфизмы полугрупп) на пространстве G -инвариантных дивизоров Картье на $\dot{\mathcal{D}}$ со значениями в кольце представлений $R(G)$ и решетке $\mathbb{Z}_{\geq 0}$: G -инвариантный дивизор Картье определяет порядки нулей соответствующей (G -эквивариантной) функции вдоль компонент $\dot{E}_i$, а также и соответствующее одномерное представление группы G .

Таким образом, для того чтобы вычислить эквивариантный ряд Пуанкаре $P^G(\underline{t})$, надо описать пространство G -инвариантных эффективных дивизоров Картье на $\dot{\mathcal{D}}$ и соответствующие функции $\underline{v}$ и α на нем.

Лемма 2. *Любой G -инвариантный эффективный дивизор на $\dot{\mathcal{D}}$ является дивизором Картье.*

Доказательство. Достаточно показать это для дивизора $\sum_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \tilde{x}$ для точки $x \in \dot{E}_\sigma$, т. е. для G -орбиты точки из $\dot{E}_\sigma$. Группа изотропии $G_{\tilde{x}}$ точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ является циклической подгруппой группы G порядка d_σ , порожденной элементом g_σ (этот элемент действует тривиально на $p^{-1}(E_\sigma)$).

Возьмем на $(X, \mathcal{D})$ росток неособой кривой L_σ , трансверсальный к исключительному дивизору $\mathcal{D}$ в точке x . По критерию Артина (см., например, [9, лемма на с. 156]) дивизор $d \cdot L_\sigma$ является собственным прообразом дивизора Картье на $(\mathcal{S}, 0)$ (в действительности таковым является уже $d_\sigma L_\sigma$), т. е. существует функция $f_\sigma: (\mathcal{S}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, такая, что собственным прообразом дивизора ($f_\sigma = 0$) является $d \cdot L_\sigma$. Пусть $\tilde{f}_\sigma = f_\sigma \circ \pi$ — поднятие функции f_σ на пространство X разрешения, и пусть $\tilde{f}_\sigma = f_\sigma \circ \pi \circ p$ — поднятие функции f_σ на пространство $\tilde{X}$ модификации универсального абелева накрытия $(\tilde{\mathcal{S}}, 0)$ ($\tilde{f}_\sigma$ является G -инвариантной функцией на $\tilde{X}$). Опишем дивизор $(\tilde{f}_\sigma = 0)$. Пусть $\tilde{L}_{\sigma, \tilde{x}} \subset \tilde{X}$ — росток в точке $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ прообраза кривой $L_\sigma \subset X$ (относительно отображения p).

Порядок нуля функции $\tilde{f}_\sigma$ вдоль $\tilde{L}_{\sigma,\tilde{x}}$ равен d . Порядок нуля функции $\tilde{f}_\sigma$ вдоль компоненты $\dot{E}_\delta$ равен $d \cdot m_{\sigma\delta}$. Порядок ветвления отображения p над компонентой $\dot{E}_\delta$ равен d_δ . Поэтому порядок нуля функции $\tilde{f}_\sigma = \bar{f}_\sigma \circ p$ вдоль прообраза компоненты $\dot{E}_\delta$ равен $d \cdot d_\delta \cdot m_{\sigma\delta}$. Это (целое) число делится на d (поскольку $d_\delta m_{\sigma\delta}$ — целое число, см. лемму 1). Поэтому дивизор нулей функции $\tilde{f}_\sigma$ делится на d , т.е. порядок нуля этой функции вдоль любой компоненты ее множества нулей делится на d . Это означает, что корень $\sqrt[d]{\tilde{f}_\sigma}$ степени d из функции $\tilde{f}_\sigma$ (точнее, (любая) ветвь этого корня) есть корректно определенная с точностью до умножения на корень степени d из единицы G -эquivариантная комплексно-аналитическая функция на $\tilde{X}$ и, таким образом, является результатом поднятия G -эquivариантной функции на $(\tilde{S}, 0)$ (см., например, [5, с. 39]). $\square$

Следствие. Любой G -инвариантный дивизор на универсальном абелевом накрытии $(\tilde{S}, 0)$ рациональной особенности поверхности $(S, 0)$ является дивизором Картье.

Лемма 2 означает, что пространство эффективных G -инвариантных дивизоров Картье на $\dot{\mathcal{D}}$ изоморфно пространству всех эффективных дивизоров на $\dot{\mathcal{D}}$. Из доказательства леммы 2 следует, что порядок нуля G -эquivариантной функции $\tilde{f}_\sigma$ (соответствующей одной точке $x \in \dot{E}_\sigma$) вдоль компоненты $\dot{E}_i$ равен $d_i m_{\sigma i}$. Надо найти (одномерное) представление α_σ группы G , по отношению к которому функция $\tilde{f}_\sigma$ является G -эquivариантной.

Лемма 3. $\alpha_\sigma(g_\delta) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}m_{\sigma\delta})$.

Доказательство. Элемент g_δ группы G действует тривиально на прообразе $p^{-1}(\dot{E}_\delta)$ компоненты $\dot{E}_\delta$ исключительного дивизора и действует умножением на $\exp(\frac{2\pi}{d_\delta}\sqrt{-1})$ на нормальном направлении к ней. Порядок нуля функции $\tilde{f}_\sigma$ вдоль прообраза $p^{-1}(\dot{E}_\delta)$ равен $m_{\sigma\delta}d_\delta$. Поэтому

$$\frac{g_\delta \cdot \tilde{f}_\sigma}{\tilde{f}_\sigma} = \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}m_{\sigma\delta}d_\delta}{d_\delta}\right) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}m_{\sigma\delta}). \quad \square$$

Теперь теорема 1 следует из обычных рассуждений, используемых, например, в [2], [4]. Пространство эффективных дивизоров на $\dot{\mathcal{D}} = \bigcup \dot{E}_\sigma$ является прямым произведением пространств эффективных дивизоров на компонентах $\dot{E}_\sigma$. Каждое из этих пространств является несвязным объединением симметрических степеней $S^k \dot{E}_\sigma$ компонент $\dot{E}_\sigma$. Поэтому

$$P^G(t_1, \dots, t_s) = \prod_{\sigma \in \Gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \chi(S^k \dot{E}_\sigma) \cdot \alpha_\sigma^k t^{\frac{k d_\sigma}{d}} \right)$$

(это следует из того, что $\underline{t}$ и α являются гомоморфизмами полугрупп). Теперь (3) вытекает из известной формулы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi(S^k X) \cdot t^k = (1-t)^{-\chi(X)}. \quad \square$$

Аналогичный результат имеет место для фильтрации на кольце $\mathcal{O}_{\tilde{S},0}$, определенной порядками роста функции на ветвях G -инвариантной кривой $(\tilde{C}, 0) \subset (\tilde{S}, 0)$. Пусть $\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^r \tilde{C}_i$, где $\tilde{C}_i$ суть G -неприводимые G -инвариантные компоненты кривой $\tilde{C}$ (вообще говоря, каждая кривая $\tilde{C}_i$ состоит из нескольких неприводимых компонент, переставляемых элементами группы G). Каждая кривая $\tilde{C}_i$ является прообразом относительно отображения p неприводимой кривой C_i на поверхности $(S, 0)$. Кривая $\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^r \tilde{C}_i$ определяет r -индексную фильтрацию на пространстве $\bigcup_{\alpha} \mathcal{O}_{\tilde{S},0}^{\alpha}$ G -эквивариантных функций на поверхности $(\tilde{S}, 0)$ (или на пространстве $\bigcup_{\alpha} \mathcal{O}_{\tilde{C},0}^{\alpha}$ G -эквивариантных функций на кривой $(\tilde{C}, 0)$). Пусть $\varphi_i: (C, 0) \rightarrow (\tilde{S}, 0)$ — параметризация (униформизация) неприводимой компоненты кривой $\tilde{C}_i$. Для роста функции f на $(\tilde{S}, 0)$ обозначим через $\tilde{w}_i(f)$ порядок нуля функции $f \circ \varphi_i$ в начале координат: $f \circ \varphi_i(\tau) = a\tau^{\tilde{w}_i(f)} +$ члены более высокой степени, $a \neq 0$. Нормирования $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ обычным образом определяют мультииндексную фильтрацию на кольце функций на $(\tilde{S}, 0)$.

Пусть $\pi: (X, \mathcal{D}) \rightarrow (S, 0)$ — разрешение особенности поверхности $(S, 0)$, которое в то же время является разрешением («embedded resolution») кривой $(C, 0) \subset (S, 0)$, $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$. Пусть $\tilde{C}_i$ — собственный прообраз кривой C_i на X . Пусть $E_1, \dots, E_s$ — все компоненты исключительного дивизора $\mathcal{D}$ разрешения. Обозначим через $\mathring{E}_i$ «неособую часть» компоненты E_i в полном прообразе $\pi^{-1}(C)$ кривой C , т. е. E_i без точек пересечения со всеми остальными компонентами полного прообраза $\pi^{-1}(C)$ кривой C . Пусть $\underline{m}_i = (m_{i1}, \dots, m_{is}) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^s$, $\underline{d} = (d_1, \dots, d_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ и одномерное представление α_i группы G ($i = 1, \dots, s$) определены, как и выше. Те же аргументы, которые использовались при доказательстве теоремы 1, дают следующее утверждение.

Теорема 2. *Эквивариантный ряд Пуанкаре $P^G(t_1, \dots, t_r)$ r -индексной фильтрации, определяемой набором нормирований $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r\}$, дается формулой*

$$P^G(t_1, \dots, t_r) = \left(\prod_{i=1}^s (1 - \alpha_i \underline{T}^{\underline{d} \underline{m}_i})^{-\chi(\mathring{E}_i)} \right) \Big|_{T_i \mapsto \prod_j: \overline{C}_j \cap E_i = p t_j}$$

(здесь $\underline{T} = (T_1, \dots, T_s)$; в указанной подстановке $\prod_{j \in \emptyset} t_j$ предполагается равным единице).

Авторы благодарны А. Г. Александрову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. М. Гусейн-Заде, Ф. Дельгадо, А. Кампильо, *Интегрирование по эйлеровой характеристике по пространству функций и полином Александра особенности плоской кривой*, УМН, **55:6** (336) (2000), 127–128.
- [2] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade, *Poincaré series of a rational surface singularity*, Invent. Math., **155** (2004), 41–53.
- [3] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade, *Poincaré series of curves on rational surface singularities*, Comment. Math. Helv., **80:1** (2005), 95–102.
- [4] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade, *On Poincaré series of filtrations on equivariant functions of two variables*, Moscow Math. J., **7:2** (2007), 243–255.

- [5] H. B. Laufer, *Normal two-dimensional singularities*, Ann. of Math. Stud., vol. 71, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1971.
- [6] W. D. Neumann, J. Wahl, *Universal Abelian covers of surface singularities*, in: Trends in singularities, Trends Math., Birkhauser, Basel, 2002, 181–190.
- [7] T. Okuma, *Universal Abelian covers of rational surface singularities.*, J. London Math. Soc. (2), **70**:2 (2004), 307–324.
- [8] T. Okuma, *The geometric genus of splice-quotient singularities*, <http://arxiv.org/abs/math/0610464>.
- [9] H. Pinkham, *Singularités rationnelles de surfaces*, in: Séminaire sur les singularités des surfaces, Lecture Notes in Math., vol. 777, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980, 147–178.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: sabir@mccme.ru

University of Valladolid, Dept. of Algebra, Geometry and Topology
e-mail: campillo@agt.uva.es

University of Valladolid, Dept. of Algebra, Geometry and Topology
e-mail: fdelgado@agt.uva.es

Поступило в редакцию
22 октября 2007 г.