Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Иσμαгилов, А. Г. Костюченко, Об асимптотике спектра неполуограниченного векторного оператора Штурма–Лиувилля, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 2, 11–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2898>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:28:08

Об асимптотике спектра неполуограниченного векторного оператора Штурма–Лиувилля*

© 2008. Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко

§1. Введение

Векторный оператор Штурма–Лиувилля L задается в гильбертовом пространстве вектор-функций $\mathcal{L}_2([0, +\infty), \mathbb{C}^n)$ как некоторое самосопряженное расширение минимального оператора, заданного операцией

$$y \mapsto -y'' + Q(x)y$$

в пространстве вектор-функций $C_0^\infty([0, \infty), \mathbb{C}^n)$. Здесь Q — непрерывная функция, значения которой — это эрмитова матрицы размера $n \times n$. Если оператор L полуограничен снизу, известны достаточные признаки дискретности спектра и асимптотические формулы для его распределения. В частности, в недавней работе авторов [1] были указаны такого рода формулы, содержащие не только собственные значения матриц $Q(x)$, как, скажем, в работе [2]), но и «скорости вращения» собственных векторов этой матрицы.

В данной работе рассматривается случай неполуограниченного оператора. Этот вопрос представляет некоторые сложности уже для скалярного случая (т. е. при $n = 1$); распределение спектра для этого случая изучалось в работах [3]–[6]. Мы ограничимся (ради упрощения изложения) случаем $n = 2$ и вещественной симметрической матрицей Q . Как и в упомянутой работе [1], асимптотические формулы будут содержать также «скорости вращения» собственных векторов матрицы $Q(x)$.

В §4 вводится основное средство исследования — симметрические операторы, связанные с фильтрацией гильбертова пространства. Для пары L_1, L_2 таких операторов мы вводим величины $N^\pm(L_1, L_2)$, которые можно считать еще одной характеристикой «спектрального сдвига» для L_1, L_2 . Эти величины, связанные со «спектральным потоком» (см. [7]), будут изучены подробнее в другой работе. В случае обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка мы выразим их через функции распределения корней решений соответствующих дифференциальных уравнений и оценим эти величины через коэффициенты операторов (§6).

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

*Работа первого автора поддержана грантами РФФИ 07-01-91209ЯФ_а и 07-01-00283 и грантом НШ 2372.2008.1. Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 07-01-00283 и грантом НШ 2372.2008.1.

§2. Описание результатов

Условимся задавать матрицу $Q(x)$ ее собственными векторами

$$e_1(x) = \begin{pmatrix} \cos \phi(x) \\ \sin \phi(x) \end{pmatrix}, \quad e_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin \phi(x) \\ \cos \phi(x) \end{pmatrix}$$

и соответствующими собственными значениями $q_k(x)$, $k = 1, 2$. Предполагается, что функции ϕ , q_k имеют гладкость класса C^2 (мы не останавливаемся на вопросе о классе матричных функций $Q(x)$ класса гладкости C^2 , которые можно задать таким образом).

Для любого самосопряженного оператора A введем считающую функцию $N(A, \Delta) = N(A, (\alpha, \beta))$ как число точек спектра, лежащих в интервале $\Delta = (\alpha, \beta)$ (мы не предполагаем заранее, что эта величина конечна).

Наша цель — нахождение асимптотик величин $N(L, (-h, 0))$ и $N(L, (0, h))$ при $h \rightarrow +\infty$. Разобьем исследование на случаи (А) и (В) («умеренного» и «быстрого» вращения собственных векторов $e_k(x)$).

(А) «Умеренное» вращение векторов $e_k(x)$. Запишем функции $q_k(x)$, $k = 1, 2$, в виде $q_1(x) = -u(x)$ и $q_2(x) = v(x)$. Предположим, что $u(x) > 0$ и $v(x) > 0$, $x \geq 0$. Введем функции $p(x) = u(x) - \phi'^2(x)$, $\psi(x) = \phi'^2(x)/v(x)$, $x \geq 0$, $\omega(x) = \phi''^2/v(x)$. Наложим на эти функции следующие ограничения (мы не стремимся сделать эти ограничения минимальными, предпочитая упростить формулировки):

$$p \uparrow +\infty, \quad p' \uparrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad pp'' \leq \left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)p'^2 \quad (1)$$

для некоторого положительного числа $\varepsilon < 3/2$;

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{p}} dx < \infty, \quad \int_0^\infty \sqrt{p}\psi dx < \infty, \quad \int_0^\infty (|\psi'| + |\psi''|) dx < \infty, \quad (2)$$

$$\psi \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Теорема 1. 1) При указанных ограничениях спектр оператора L дискретен и

$$N(L, (-h, 0)) \simeq \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{x_0} \sqrt{p} dx + \int_{x_0}^\infty \frac{h}{\sqrt{p} + \sqrt{p-h}} dx \right), \quad h \rightarrow +\infty,$$

где число x_0 определяется равенством $p(x_0) = h$.

2) Если выполнены дополнительные условия

$$xv'/v \geq m_0, \quad v(\sqrt{x}) \leq \gamma v(x) \quad (x \geq 0)$$

для некоторых чисел $m_0 > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$, то

$$N(L, (0, h)) \simeq \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\infty \frac{h}{\sqrt{p+h} + \sqrt{p}} dx + \int_0^{x_0^*} \sqrt{h-v} dx \right), \quad h \rightarrow +\infty,$$

где число x_0^* определено равенством $v(x_0^*) = h$.

В качестве функции p в этой теореме можно взять, например, линейную комбинацию (с положительными коэффициентами) функций x^c , $c > 2$, $x^c \exp(ax)$,

$a > 0$, $c \geq 0$, а в качестве v — функцию, достаточно быстро возрастающую по отношению к функции ϕ' — скорости вращения векторов $e_k(x)$.

(В) «Быстрое» вращение собственных векторов $e_k(x)$. Здесь функция ϕ'^2 предполагается «быстро растущей»; точные утверждения содержатся в теореме 2. Введем обозначения $s(x) = -(q_1(x) + q_2(x))/2$, $w(x) = (q_1(x) - q_2(x))/2$, $\theta(x) = w(x)/\phi'(x)$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие ограничения:

$s \uparrow +\infty$, $s' \uparrow +\infty$, $\theta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, $ss'' \leq (3/2 - \varepsilon)s'^2$;

функция θ' ограничена;

$$\int_0^{+\infty} (|\theta'| + |\theta''|) dx < \infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{s} \theta^2 dx < +\infty.$$

Тогда спектр оператора L дискретен и

$$\begin{aligned} N(L, (-h, 0)) &\simeq \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{c_0} \sqrt{s} dx + \int_{c_0}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{s} + \sqrt{s-h}} dx \right), \\ N(L, (0, h)) &\simeq \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{s+h} + \sqrt{s}} dx \right), \end{aligned} \quad h \rightarrow +\infty$$

(число c_0 в первой формуле определяется равенством $s(c_0) = h$).

Несколько слов об индексах дефекта минимального оператора, связанного с рассматриваемым дифференциальным выражением. Если в условиях теоремы 1 функция ϕ постоянна, то индексы дефекта равны $(3, 3)$; однако в общем случае (в условиях теоремы 1) вопрос открыт. Особенно интересен этот вопрос в условиях теоремы 2.

Доказательства теорем 1 и 2 будут приведены в §§ 7 и 8; ближайшие параграфы — вспомогательные.

§ 3. Простые общие сведения

Рассматриваются операторы в счетномерных комплексных гильбертовых пространствах. Область определения оператора S обозначается через $D(S)$. Напомним, что $N(S, \Delta)$ — число точек спектра самосопряженного оператора S , лежащих в интервале Δ . Возьмем теперь любой симметрический оператор S с конечными равными индексами дефекта (k, k) . Для любого интервала Δ и любого самосопряженного расширения $\tilde{S}$ определены величины $N(\tilde{S}, \Delta)$; для двух расширений эти величины отличаются не более чем на k (при фиксированном интервале Δ). Мы не будем фиксировать какое-либо из указанных расширений; вместо этого рассмотрим множество, состоящее из всех чисел $N(\tilde{S}, \Delta)$, где $\tilde{S}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора S . Это множество мы будем обозначать тем же символом $N(S, \Delta)$. Оно и будет предметом изучения.

Положим $\Delta = (a - c, a + c)$ и обозначим через $N_0(S, \Delta)$ максимальную размерность линейных подпространств $V \subset D(S)$, таких, что $\|(S - aI)x\| < c\|x\|$ при $x \in V$, $x \neq 0$; пусть максимум достигается на подпространстве V_m , $N_0(S, \Delta) = m$.

Лемма 1. $N(S, \Delta) \subset [N_0(S, \Delta), N_0(S, \Delta) + k]$.

Доказательство. (а) Пусть $\tilde{S}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора S и $N(\tilde{S}, \Delta) = n$. Пусть U — линейная оболочка собственных векторов оператора $\tilde{S}$ с собственными значениями из Δ . Ясно, что $\dim U = n$ и $\|(\tilde{S} - aI)x\| < c\|x\|$ при $x \in U$, $x \neq 0$. Пусть $\bar{S}$ — замыкание оператора S , имеющее область определения $D(\bar{S})$. Положим $U^0 = U \cap D(\bar{S})$. Тогда $\dim U^0 \geq n - k$ и на U^0 выполнено аналогичное неравенство для оператора $\bar{S}$. Но в этом случае (согласно определению замыкания) оно выполняется (с заменой $\bar{S}$ на S) и для подпространства $V \subset D(S)$, достаточно близкого к U^0 . Отсюда следует, что $m \geq n - k$, чем доказано неравенство $N(\tilde{S}, \Delta) \leq N_0(S, \Delta) + k$.

(б) Если допустить, что $n < m$, то найдется ненулевой вектор $x \in V_m$, ортогональный к U . Но для векторов с последним свойством выполняется неравенство $\|(\tilde{S} - aI)x\| \geq c\|x\|$, причем здесь можно заменить $\tilde{S}$ на S . Противоречие. Итак, $N(\tilde{S}, \Delta) \geq N_0(S, \Delta)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть A, B — полуограниченные снизу операторы с общей плотной в H областью определения D , причем $B \leq A$ и индексы дефекта этих операторов не превосходят числа k . Пусть $\tilde{A}, \tilde{B}$ — произвольные самосопряженные расширения операторов A и B . Тогда $N(\tilde{A}, (-\infty, \lambda)) \leq N(\tilde{B}, (-\infty, \lambda)) + k$ для любого числа λ .

Доказательство. Положим $N(\tilde{A}, (-\infty, \lambda)) = m$. Тогда, рассуждая так же, как в п. (а) доказательства леммы 1, получаем такое подпространство $V \subset D$, что $\dim V = m - k$ и $(Ax, x) < \lambda(x, x)$ при $x \in V$, $x \neq 0$. Так как $B \leq A$, то $(Bx, x) < \lambda(x, x)$ для тех же x . Отсюда, рассуждая так же, как в п. (б) доказательства леммы 1, получаем неравенство $N(\tilde{B}, (-\infty, \lambda)) \geq m - k$. Лемма доказана.

§4. Фильтрованные операторы

Пусть H — гильбертово пространство. Пусть даны замкнутые подпространства $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ и $\bigcup H_j = H$; в этом случае говорят, что пространство H фильтровано подпространствами H_j . Рассмотрим симметрический оператор A с плотной областью определения $D(A) \subset H$. Положим $D_j = D(A) \cap H_j$. Наложим следующие ограничения:

- 1) каждое D_j плотно в H_j , и $D(A) = \bigcup D_j$;
- 2) $AD_j \subset D_j$, и, таким образом, возникает оператор A_j в H_j с плотной областью определения D_j , $j = 1, 2, \dots$;
- 3) операторы A_j полуограничены снизу, и их индексы дефекта не превосходят фиксированного числа k .

При этих условиях назовем A *фильтрованным* (по отношению к цепочке $\{H_j\}$) оператором.

Рассмотрим два фильтрованных оператора B, C с общей областью определения, таких, что спектры их самосопряженных расширений дискретны и не ограничены снизу. Сейчас мы введем важные для дальнейшего величины $N^+(B, C)$ и $N^-(B, C)$. При помощи этих величин мы стремимся, говоря неформально, измерить «разницу» между множествами (бесконечными!) отрицательных собственных значений упомянутых самосопряженных расширений.

Для операторов B , C определены, как объяснялось, операторы B_j , C_j , а потому определены также числовые множества $N(B_j, 0)$ и $N(C_j, 0)$. Положим

$$N^+(B, C) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} (\max N(B_j, (-\infty, 0)) - \min N(C_j, (-\infty, 0)))$$

и

$$N^-(B, C) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} (\min N(B_j, (-\infty, 0)) - \max N(C_j, (-\infty, 0))).$$

Мы используем введенные величины для оценки распределения собственных значений самосопряженного расширения фильтрованного оператора.

Предложение 1. Пусть даны фильтрованные операторы $B \leq A \leq C$ (с общей областью определения D), причем их индексы дефекта не превосходят числа k . Тогда для любого интервала $\Delta = (\alpha, \beta)$ имеет место включение

$$N(A, \Delta) \subset [N^+(C - \beta I, B - \alpha I) - 3k - 1, N^-(B - \beta I, C - \alpha I) + 3k].$$

Доказательство. Согласно лемме 1, для доказательства указанных неравенств достаточно оценить величину $N_0(A, \Delta)$. Из равенства $D(A) = \bigcup D(A_j)$ следует, что $N_0(A, \Delta) = N_0(A_j, \Delta)$ при достаточно больших j . Эта же лемма сводит дело к оценке величины $N(\tilde{A}_j, \Delta)$ для произвольного расширения $\tilde{A}_j$. Заметим, далее, что $N(\tilde{A}_j, \Delta) = N(\tilde{A}_j, (-\infty, \beta)) - N(\tilde{A}_j, (-\infty, \alpha + 0))$ и что лемма 2 приводит к двусторонней оценке последней разности через $N(\tilde{B}_j, (-\infty, \beta)) - N(\tilde{C}_j, (-\infty, \alpha + 0))$ и $N(\tilde{C}_j, (-\infty, \beta)) - N(\tilde{B}_j, (-\infty, \alpha + 0))$. Отсюда получается доказываемое включение (мы не останавливаемся на происхождении содержащихся в нем членов $3k$ и $3k - 1$).

Основной для дальнейшего пример фильтрованного оператора — это дифференциальный оператор второго порядка в пространстве $\mathcal{L}_2([0, \infty); \mathbb{C}^2)$, фильтрованном подпространствами $\mathcal{L}_2([0, j]; \mathbb{C}^2)$, $j = 1, 2, \dots$. Исследование величин $N^\pm(B, C)$ для таких операторов (см. §6) основано на анализе распределения корней решений соответствующих уравнений, чему посвящен следующий параграф.

§5. Оценки колеблемости дифференциальных уравнений второго порядка

(а) Возьмем функции u , v , непрерывные и кусочно монотонные на отрезке $J = [c_1, c_2]$; положим $|J| = c_2 - c_1$. Через $V(f)$ обозначаем вариацию функции f ; введем также нормы

$$\|f\| = \max\{|f(x)|, x \in J\}, \quad \|f\|_1 = \|f\| + V(f). \quad (4)$$

Возьмем целое $n > 0$, положим $x_k = c_1 + k|J|/n$, $J_k = [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \dots, n$, и выберем произвольные $t_k, s_k \in J_k$. Докажем, что

$$|J|n^{-1} \sum_{k=1}^n u(t_k)v(s_k) = \int_{c_1}^{c_2} u(x)v(x) dx + \mu|J|n^{-1}\|u\|_1\|v\|_1, \quad (5)$$

где $|\mu| \leq 1$.

Для этого выберем такие $z_k \in J_k$, что $|J|n^{-1}u(z_k)v(z_k) = \int_{J_k} uv \, dx$. Тогда

$$\begin{aligned} |J|n^{-1} \sum_{k=1}^n u(t_k)v(s_k) &= |J|n^{-1} \sum_{k=1}^n u(z_k)v(z_k) \\ &+ |J|n^{-1} \sum_{k=1}^n (u(t_k)(v(s_k) - v(z_k)) + (u(t_k) - u(z_k))v(z_k)). \end{aligned}$$

Первое слагаемое последней суммы есть $\int_J uv \, dx$, второе не превосходит величины $|J|n^{-1}\|u\|_1\|v\|_1$. Отсюда следует (5).

Перейдем к основной теме этого параграфа. Сведения, излагаемые ниже, содержатся (в той или иной форме) в литературе; мы приводим их в удобном для дальнейшего виде.

Рассматриваются уравнения вида

$$(ay')' + by = 0, \quad x \geq 0, \quad (6)$$

где a, b — гладкие вещественные функции, $a > 0$. Возьмем интервал $J = [c_1, c_2] \subset [0, +\infty)$ и решение $y(x)$, $x \in J$, этого уравнения, такое, что $y(c_1) = 0$, $y \neq 0$. Обозначим через $M(a, b; J)$ число решений уравнения $y(x) = 0$ в интервале J . Иногда будем писать просто $M(J)$. Изучение этой величины разобьем на шаги.

(b) Начнем с достаточно грубой оценки величины $M(J)$, предполагая, что $b(x) \geq 0$ при $x \in J = [c_1, c_2]$. Покажем, что

$$M(J) = \frac{1}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \sqrt{\frac{b}{a}} \, dx + \mu |J|^{1/2} (\|b^{1/2}\|_1 \|a^{-1/2}\|_1)^{1/2} + \varkappa, \quad |\mu| \leq 2, \quad |\varkappa| \leq 1. \quad (7)$$

Здесь мы использовали норму из (4). Из теорем сравнения Штурма следует, что величина $M(J_k)$ отличается не более чем на 1 от числа вида $\pi^{-1}|J_k|\sqrt{b(t_k)/a(s_k)}$ при некотором выборе точек $t_k, s_k \in J_k$. Сложив эти величины и применив (5), получаем

$$M(J) = \pi^{-1} \int_{c_1}^{c_2} \sqrt{\frac{b}{a}} \, dx + P, \quad |P| \leq |J|n^{-1}\|b^{1/2}\|_1\|a^{-1/2}\|_1 + n.$$

Выбрав оптимальное n , приходим к равенству (7).

(c) Рассмотрим уравнение $-y'' + qy = hy$, $x \geq 0$; пусть q — возрастающая к $+\infty$ непрерывная положительная функция, $h > q(0)$ и $q(\sqrt{x}) \leq \gamma q(x)$ для некоторого числа $\gamma \in (0, 1)$. Пусть $M(h)$ — число корней (на полуоси $[0, +\infty)$) решения этого уравнения, такого, что $y(0) = 0$, $y \neq 0$. Положим $G(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_1} \sqrt{h - q} \, dx$, где число x_1 определено уравнением $q(x_1) = h$. Из (7) следует, что $M(h) = G(h) + 2\mu h^{1/4} x_1^{1/2} + \varkappa$, $|\mu| \leq 1$, $|\varkappa| \leq 1$. Покажем, что второе слагаемое в этой сумме бесконечно мало по сравнению с $G(h)$ при $h \rightarrow +\infty$. Действительно, из указанных ограничений вытекает, что $G(h) \geq \pi^{-1} \int_0^{\sqrt{x_1}} \sqrt{h - q} \, dx \geq \mu_1 h^{1/2} x_1^{1/2}$, $\mu_1 = \pi^{-1}(1 - \gamma)^{1/2}$; отсюда следует наше утверждение. Итак,

$$M(h) \sim G(h), \quad h \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

В дальнейшем понадобится следующее свойство функции $G(h)$.

Лемма 3. Пусть

$$xq' \geq m_0 q, \quad m_0 > 0. \quad (9)$$

Тогда

$$G(h) \sim G(h') \quad (10)$$

(при $h \sim h'$, $h \rightarrow +\infty$).

Доказательство. Можно считать, что $q(0) = 0$. Возьмем функцию $\tilde{q}$, обратную функции q . Замена переменной и интегрирование по частям приводят к равенству

$$G(h) = (2\pi)^{-1} \sqrt{h} \int_0^1 \tilde{q}(hx)(1-x)^{-1/2} dx.$$

Из условия (9) следует, что $t\tilde{q}'(t)/\tilde{q}(t) \leq 1/m_0$. Это, в свою очередь, влечет за собой соотношение $\tilde{q}(t_1) \sim \tilde{q}(t_2)$ при $t_1 \sim t_2$. (Достаточно преобразовать выражение $\ln \tilde{q}(e^{u_1}) - \ln \tilde{q}(e^{u_2})$ с помощью формулы Лагранжа.) Отсюда следует (10).

(d) Рассмотрим уравнение

$$z'' + (1+g)z = 0, \quad \xi \in J = [c_1, c_2], \quad (11)$$

где $\xi \mapsto g(\xi)$ — непрерывная вещественная функция.

Покажем, что

$$M(J) = \frac{1}{\pi}|J| + \mu \int_{c_1}^{c_2} |g| d\xi + \varkappa, \quad |\mu| \leq 4, \quad |\varkappa| \leq 1. \quad (12)$$

Для доказательства заметим, что функция z (решение задачи $z'' + (1+g)z = 0$, $z(c_1) = 0$, $z \neq 0$) удовлетворяет (при соответствующей нормировке) интегральному уравнению $z = Az + f$, где $f(\xi) = \sin(\xi - c_1)$, а A — интегральный оператор в банаховом пространстве $C(J)$, заданный ядром $g(s) \sin(\xi - s)$. Пусть сначала

$$\int_J |g| d\xi < \frac{1}{4}. \quad (13)$$

Тогда $\|A\| \leq 1/4$ и функция z столь близка к f (вместе с первой производной), что имеет единственный корень в любом отрезке, на концах которого функция f принимает значения 1, -1 . Отсюда следует, что $M(J) = \pi^{-1}|J| + \mu$, $|\mu| \leq 1$. Если же условие (13) нарушено, то достаточно разбить J на такие интервалы, что оно выполнено на каждом из них, и сложить полученные равенства.

(e) Рассмотрим теперь общее уравнение (6), наложив на функции a , b следующие ограничения:

$$0 < \alpha_1 < a(x) < \alpha_2 < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} (|a'| + |a''|) dx = \alpha_0 < +\infty \quad (14)$$

и

$$b, b' \uparrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad bb'' \leq (3/2 - \varepsilon)b'^2, \quad x \geq 0, \quad (15)$$

для некоторых положительных чисел $\alpha_i, \varepsilon < 3/2$. Из неравенства (15) следует, что функция $b'b^{-3/2+\varepsilon}$ невозрастающая. Это приводит к неравенству

$$b' \leq Ab^{3/2-\varepsilon}, \quad A = b'(0)(b(0))^{-3/2+\varepsilon}. \quad (16)$$

Зафиксируем такой отрезок $J = [c_1, c_2] \subset [0, +\infty)$, что $b(x) > 0$ при $x \in J$, и изучим величину $M(a, b; J)$. Известная замена Лиувилля $y(x) = (ab)^{-1/4}z(\xi)$, $\xi = \xi(x)$, $\xi'(x) = (b/a)^{1/2}$, приводит уравнение (6) к виду (11), где

$$g(\xi) = \frac{a'^2}{16ab} - \frac{a''}{4b} - \frac{a'b'}{8b^2} + \frac{5ab'^2}{16b^3} - \frac{ab''}{4b^2}.$$

Применяя теперь (12), получаем

$$M(a, b; J) = \frac{1}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \sqrt{\frac{b}{a}} dx + \mu \int_{c_1}^{c_2} \left(\frac{a'^2}{a^{3/2}b^{1/2}} + \frac{|a''|}{a^{1/2}b^{1/2}} + \frac{|a'b'|}{a^{1/2}b^{3/2}} + \frac{a^{1/2}b'^2}{b^{5/2}} + \frac{a^{1/2}|b''|}{b^{3/2}} \right) dx + \varkappa, \quad |\mu| \leq 4, |\varkappa| \leq 1. \quad (17)$$

Для дальнейшего перейдем к функциям $b+h$ и $b-h$, где $h > 0$.

Предложение 2. 1) При выполнении указанных ограничений имеет место соотношение

$$M(a, b+h; (c_1, c_2)) = \frac{1}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \sqrt{\frac{b+h}{a}} dx + w_1(h)((b(c_1)+h)^{-1/2} + b'(c_1)(b(c_1))^{-3/2}), \quad h \geq 0. \quad (18)$$

Здесь $|w_1(h)| \leq A_1$, а число A_1 зависит только от величин α_i , $i = 0, 1, 2$, и ε из условий (14), (15).

2) Если $c_1 \geq 0$, а число c_2 достаточно велико (т.е. больше некоторой величины, зависящей от h), то

$$M(a, b-h; (c_1, c_2)) = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{c_2} \sqrt{\frac{b-h}{a}} dx + w_2(h)h^{1/2-\varepsilon/3}(b'(x_1))^{-1/3}, \quad h > 0, \quad (19)$$

где $|w_2| \leq A_2$, а число A_2 зависит только от величин α_i , $i = 0, 1, 2$, A и ε из условий (14)–(16). Число x_1 определено равенством $b(x_1) = h$.

Доказательство. 1) Докажем равенство (18). В следующих ниже оценках используются постоянные A_3 , A_4 , A_5 , зависящие только от чисел α_i , ε , взятых из (14) и (15). Мы должны оценить второй интеграл из равенства (17), в котором функция b заменена на $b+h$; обозначим его через K . Величина K есть сумма пяти интегралов. Прежде всего, из условий (14) и из убывания функции $(b+h)^{-1/2}$ следует, что сумма первых двух из этих интегралов не превосходит числа $A_3(b(c_1)+h)^{-1/2}$. Далее, оценивая третью подынтегральную функцию при помощи неравенства $2xy \leq x^2+y^2$, получаем, что она не превосходит полусуммы первой и четвертой. Наконец, из неравенства (15) следует, что пятая подынтегральная функция не превосходит функции $A_4b'^2b^{-1}(b+h)^{-3/2}$. Ясно, что и четвертая подынтегральная функция не превосходит этой функции. Представим ее в виде $(b/(b+h))^{1/2-\varepsilon} \cdot b'b^{-3/2+\varepsilon}(b'(b+h))^{-1-\varepsilon}$. Здесь первый множитель не превосходит единицы, второй убывает (ибо его производная неположительна в силу неравенства (15)), а потому не превосходит величины $b'(c_1)b(c_1)^{-3/2+\varepsilon}$, и, наконец, интеграл от третьего множителя есть $(1/\varepsilon)(b(c_1)+h)^{-\varepsilon}$. Отсюда следует, что $|K| \leq A_5((b(c_1)+h)^{-1/2} + b'(c_1)(b(c_1))^{-3/2})$. В итоге получается равенство (18).

2) Докажем равенство (19). В следующих ниже оценках используются постоянные A_6, A_7 , зависящие только от чисел α_i, ε, A , взятых из (14), (15) и (16). Возьмем точку $\xi \in (x_1, c_2)$ и положим $b(\xi) = h + s$. Оценим величину $M(a, b - h; (x_1, \xi))$ по формуле (7) (заменив в ней, разумеется, b на $b - h$). Далее, оценим величину $M(a, b - h; (\xi, c_2))$ по формуле (18). Точнее, предварительно запишем равенство (18) при $h = 0$, и в полученном равенстве заменим функцию b на $b - h$. Это допустимо, ибо в силу условия $b'' \geq 0$ для этой последней функции остается в силе свойство (15) функции b , использованное при выводе равенства (18). В результате получаем

$$M(a, b - h; [c_1, c_2]) = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{c_2} \sqrt{\frac{b - h}{a}} dx + T,$$

$$|T| \leq A_6(s^{1/4}(\xi - x_1)^{1/2} + s^{-1/2} + b'(\xi)s^{-3/2}).$$

Пусть точка ξ выбрана так, что $1 \leq s \leq h$. Оценим каждое из трех слагаемых последней суммы. Так как $b(\xi) - b(x_1) = s$ и функция b' возрастает, то $|\xi - x_1| \leq s(b'(x_1))^{-1}$; таким образом, первое слагаемое не превосходит величины $s^{3/4}(b'(x_1))^{-1/2}$. Далее, второе слагаемое не превосходит 1, ибо $s \geq 1$. Наконец, в силу условия (16) третье слагаемое не превосходит величины $A(h + s)^{3/2 - \varepsilon} s^{-3/2} \leq A2^{3/2 - \varepsilon} h^{3/2 - \varepsilon} s^{-3/2}$. Итак, $|T| \leq A_7(s^{3/4}(b'(x_1))^{-1/2} + h^{3/2 - \varepsilon} s^{-3/2})$. Взяв минимум этой величины по всем $s \in (1, h)$, приходим к равенству (19). Предложение 2 доказано.

§6. Величины $N^\pm(L_1, L_2)$ для дифференциальных операторов второго порядка

Обратимся к минимальным операторам L_k в $\mathcal{L}_2[0, +\infty)$, порожденным выражениями $l_k y = -(a_k y')' - b_k y$, $y \in C_0^\infty[0, +\infty)$. Предполагается, что указанные функции a_k, b_k удовлетворяют условиям (14), (15). Как известно, для любого самосопряженного расширения $\tilde{L}_k$ номер собственной функции не более чем на два отличается от числа корней этой функции. Отсюда следует, что $N^+(L_1, L_2) = \limsup_{c \rightarrow +\infty} (M(a_1, b_1; (0, c)) - M(a_2, b_2; (0, c))) + \kappa_1$, $|\kappa_1| \leq 4$. Аналогичное соотношение справедливо и для $N^-(L_1, L_2)$. Применяя теперь формулы из §5, мы сможем получить (в сформулированном ниже предложении 3) оценки величин $N^+(L_1, L_2 + hI)$ и $N^-(L_1 - hI, L_2)$, $h > 0$. Для этого понадобится (наряду с условиями (14) и (15)) следующее ограничение:

$$\text{интеграл } \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}} - \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \right) dx \text{ сходится.} \quad (20)$$

(Допускается условная сходимость.)

Предложение 3. Если выполнены условия (14), (15), (20) и

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{b_2}} < +\infty, \quad (21)$$

то

$$N^\pm(L_1, L_2 + hI) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{b_2}{a_2}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}} - \sqrt{\frac{b_2 - h}{a_2}} \right) dx, \quad h \rightarrow +\infty, \quad (22)$$

(число x_1 определено уравнением $b_2(x_1) = h$).

Если выполнены условия (14), (15), (20) и

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{b_1}} < +\infty, \quad (23)$$

то

$$N^\pm(L_1 - hI, L_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{b_1 + h}{a_1}} - \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \right) dx + \theta(h), \quad (24)$$

где функция θ ограничена.

Докажем соотношение (22). Из (18) и (19) вытекает, что

$$\begin{aligned} N^+(L_1, L_2 + hI) &= \limsup_{c \rightarrow +\infty} (M(a_1, b_1; (0, c)) - M(a_2, b_2 - h; (0, c))) + \varkappa \\ &= \limsup_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_0^c \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} dx - \int_{x_1}^c \sqrt{\frac{b_2 - h}{a_2}} dx \right) + R, \\ |R| &\leq A_8 (b'_2(x_1))^{-1/3} h^{1/2 - \varepsilon/3}. \end{aligned}$$

(Число A_8 зависит только от величин α_i , ε , A из условий (14)–(16).) Из условий (20), (21) следует, что последний верхний предел приводится к виду, указанному в правой части соотношения (22). Покажем, что слагаемое R бесконечно мало по сравнению с этой правой частью (и даже по сравнению с первым ее слагаемым). Для этого достаточно найти предел (при $h \rightarrow +\infty$) отношения величины $(b'_2(x_1))^{-1/3} h^{1/2 - \varepsilon/3}$ к упомянутому первому слагаемому. Правило Лопиталья приводит к тому, что этот предел равен нулю. Этим доказано (22). Соотношение (24) доказывается проще (нет необходимости оценивать остаточное слагаемое).

§7. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим форму (Ly, y) , $y \in C_0^\infty([0, +\infty); \mathbb{C}^n)$, и преобразуем ее, записав вектор-функцию $y(x)$ в виде $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ (функции e_1 и e_2 указаны в §2). Несложное вычисление приводит к равенству

$$(Ly, y) = \int_0^{+\infty} (y_1'^2 + y_2'^2 - p y_1^2 + (v + \phi'^2) y_2^2 - 4\phi' y_1' y_2 - 2\phi'' y_1 y_2) dx.$$

Возьмем функцию $\tau(x)$, $x \geq 0$, такую, что $0 < t_1 < \tau < t_2 < 1$ для некоторых t_1, t_2 . Тогда сумма модулей двух последних подынтегральных функций не превосходит функции $\tau y_1'^2 + y_1^2 + (4\phi'^2/\tau + \phi''^2) y_2^2$. Возьмем минимальные операторы L_1, L_2 , а также K_1, K_2 , порожденные (соответственно) выражениями $y_1 \mapsto -((1 \pm \tau) y_1')' + (-p \pm 1) y_1$ и $y_2 \mapsto -y_2'' + (v + \phi'^2 \pm (4\phi'^2/\tau + \phi''^2)) y_2$. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}_2([0, \infty), \mathbb{C}^2)$ операторы $C = L_1 \oplus K_1$, $B = L_2 \oplus K_2$. В силу упомянутых оценок справедливы неравенства $B \leq L \leq C$. Применяя предложение 1, мы можем оценить величину $N(L, (-h, 0))$ при помощи величин $N^+(C, B + hI)$ и $N^-(B, C + hI)$. Подчиним функцию τ ограничению $4\phi'^2/\tau + \phi''^2 < v$. Тогда $K_i > 0$, а потому операторы K_i не вносят вклада в величину $N(L; (-h, 0))$. Итак, дело сводится к оценке величин $N^+(L_2, L_1 + hI)$ и $N^-(L_1, L_2 + h)$, а эти последние оцениваются согласно предложению 3. Аналогично оценивается $N(L, (0, h))$ (здесь операторы K_i внесут в эту величину

вклад, указанный в п. (с) перед леммой 3). В итоге приходим к следующим выводам (для пп. 1) и 2) теоремы соответственно):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{+x_1} \sqrt{\frac{p+1}{1-\tau}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{p+1}{1-\tau}} - \sqrt{\frac{p+1-h}{1-\tau}} \right) dx - \gamma_1(h) \leq N(L, (-h, 0)) \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{+x_2} \sqrt{\frac{p-1}{1+\tau}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{x_2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{p-1}{1+\tau}} - \sqrt{\frac{p-1-h}{1+\tau}} \right) dx + \gamma_1(h), \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{p-1+h}{1+\tau}} - \sqrt{\frac{p-1}{1+\tau}} \right) dx + \int_0^{\infty} \sqrt{(h-v_+)_+} dx - \gamma_2(h) \leq N(L, (0, h)) \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{p+1+h}{1-\tau}} - \sqrt{\frac{p+1}{1-\tau}} \right) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{(h-v_-)_+} dx + \gamma_2(h). \end{aligned}$$

(Числа x_1, x_2 заданы условиями $p(x_1) + 1 = h$, $p(x_2) - 1 = h$.)

В каждом из этих неравенств слагаемое $\gamma_k(h)$ бесконечно мало относительно суммы первых слагаемых и $v_{\pm} = v + \phi'^2 \pm (4\phi'^2/\tau + \phi''^2)$. Осталось выбрать функцию τ . Прежде всего наложим на нее (вдобавок к упомянутым выше) ограничение $\phi'^2/v\tau \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Используя его и условия (3), мы можем заменить в написанных неравенствах функции $v_{\pm}$ эквивалентной им (при $x \rightarrow +\infty$) функцией v ; это допускается леммой 3. Напомним, что в предложении 3 требуется выполнение условий (14), (15), (20), (21). Применительно к нашим L_1 и L_2 они сводятся к тому, что выполнены условия (2) и

$$\int_0^{+\infty} (|\tau'| + |\tau''|) dx < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{p} \tau dx < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} dx < +\infty.$$

Чтобы добиться выполнения этих условий, положим $\tau = B\psi$. Если функция $B(x)$, $x \geq 0$, достаточно медленно стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, то для функции τ выполняются необходимые условия. Этим доказана теорема 1.

§8. Доказательство теоремы 2

Преобразуем форму (Ly, y) следующим образом (в отличие от предыдущего параграфа используем координаты y_1, y_2 в исходном базисе):

$$(Ly, y) = \int_0^{+\infty} (y_1'^2 + y_2'^2 - s(y_1^2 + y_2^2) + 2w \sin 2\phi y_1 y_2 + w \cos 2\phi (y_1^2 - y_2^2)) dx.$$

К двум последним слагаемым применим интегрирование по частям (используя равенства $(\sin 2\phi) dx = -d \cos 2\phi / 2\phi'$ и $(\cos 2\phi) dx = d \sin 2\phi / 2\phi'$) и оценим интегралы двух последних слагаемых, используя неравенство $2xy \leq x^2 + y^2$. В итоге получаем, что оператор L заключен между операторами L_+ и L_- , $L_{\pm} = -((1 \pm \theta^2)y')' + (-s \pm d)$ с некоторой постоянной d . Далее рассуждаем так же, как при доказательстве теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, *О спектре векторного оператора Штурма–Лиувилля*, Функц. анализ и его прил., **41**:1 (2007), 39–51.

- [2] А. Г. Костюченко, Б. М. Левитан, *Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма–Лиувилля*, Функци. анализ и его прил., **1**:1 (1967), 86–96.
- [3] P. Heywood, *On the asymptotic distribution of eigenvalues*, Proc. London Math. Soc. (3), **4** (1954), 456–470.
- [4] А. Г. Костюченко, В. П. Белогрудь, *О плотности спектра оператора Штурма–Лиувилля*, УМН, **28**:2 (1973), 227–228.
- [5] А. Г. Аленицын, *Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля в случае предельного круга*, Дифференциальные уравнения, **12**:3 (1976), 428–437.
- [6] F. V. Atkinson, C. T. Fulton, *Some limit circle eigenvalue problems and asymptotic formulae for eigenfunctions*, in: Ordinary and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Math., vol. 964, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 28–55.
- [7] J. Robbin, D. Salamon, *The spectral flow and the Maslov index*, Bull. London Math. Soc., **27**:1 (1995), 1–33.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ismagil@serv.bmstu.ru

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: akostyuch@mail.ru

Поступило в редакцию
12 января 2008 г.