Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Мальцев, Лоренц-инвариантная деформация системы Уизема для нелинейного уравнения Клейна–Гордона, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 2, 28–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2900>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:17:55

Лоренц-инвариантная деформация системы Уизема для нелинейного уравнения Клейна–Гордона*

© 2008. А. Я. МАЛЫЦЕВ

1. Введение

Мы будем рассматривать деформацию системы Уизема для нелинейного уравнения Клейна–Гордона

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + V'(\varphi) = 0. \quad (1.1)$$

Метод Уизема связан с медленными модуляциями периодических или квазипериодических m -фазных решений нелинейных систем

$$F^i(\varphi, \varphi_t, \varphi_x, \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n), \quad (1.2)$$

которые обычно представляются в виде

$$\varphi^i(x, t) = \Phi^i(\mathbf{k}(\mathbf{U})x + \omega(\mathbf{U})t + \theta_0, \mathbf{U}). \quad (1.3)$$

В этих обозначениях функции $\mathbf{k}(\mathbf{U})$ и $\omega(\mathbf{U})$ играют роль «волновых чисел» и «частот» m -фазных решений, а θ_0 представляют собой сдвиги начальных фаз.

Функции $\Phi^i(\theta)$ удовлетворяют системе

$$F^i(\Phi, \omega^\alpha \Phi_\alpha, k^\beta \Phi_\beta, \dots) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

и мы выбираем (гладким образом) некоторую функцию $\Phi(\theta, \mathbf{U})$ для каждого $\mathbf{U}$ в качестве имеющей «нулевые сдвиги начальных фаз». Полный набор m -фазных решений системы (1.2) может быть после этого представлен в виде (1.3).

Для m -фазных решений системы (1.2) мы имеем при этом $\mathbf{k}(\mathbf{U}) = (k^1(\mathbf{U}), \dots, k^m(\mathbf{U}))$, $\omega(\mathbf{U}) = (\omega^1(\mathbf{U}), \dots, \omega^m(\mathbf{U}))$, $\theta_0 = (\theta^1, \dots, \theta^m)$, где $\mathbf{U} = (U^1, \dots, U^N)$ являются параметрами решения. Мы требуем также, чтобы все функции $\Phi^i(\theta, \mathbf{U})$ были 2π -периодическими по каждой из θ^α , $\alpha = 1, \dots, m$.

Для однофазных решений уравнения (1.1) мы, очевидно, имеем

$$(\omega^2 - k^2)\Phi_{\theta\theta} + V'(\Phi) = 0, \quad (1.5)$$

где $\Phi(\theta, \omega^2 - k^2)$ является 2π -периодической функцией от θ .

В подходе Уизема (см. [1]–[10], [12]–[23]) параметры $\mathbf{U}$ становятся медленно меняющимися функциями переменных x и t : $\mathbf{U} = \mathbf{U}(X, T)$, где $X = \epsilon x$, $T = \epsilon t$ ($\epsilon \rightarrow 0$).

Более точно (см. [4]), мы пытаемся найти асимптотические решения

$$\varphi^i(\theta, X, T) = \sum_{k \geq 0} \Psi_{(k)}^i \left(\frac{\mathbf{S}(X, T)}{\epsilon} + \theta_0, X, T \right) \epsilon^k \quad (1.6)$$

*Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации МД-8906.2006.2 и Российским фондом поддержки отечественной науки.

(где все $\Psi_{(k)}$ 2π -периодичны по θ), удовлетворяющие системе (1.2), т. е.

$$F^i(\varphi, \epsilon\varphi_T, \epsilon\varphi_X, \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Функция $\mathbf{S}(X, T) = (S^1(X, T), \dots, S^m(X, T))$ является «модулированной фазой» решения (1.6), а функция $\Psi_{(0)}(\theta, X, T)$ принадлежит при каждом X и T семейству m -фазных решений системы (1.2). Таким образом,

$$\Psi_{(0)}(\theta, X, T) = \Phi(\theta + \theta_0(X, T), \mathbf{U}(X, T)) \quad (1.7)$$

и

$$S_T^\alpha(X, T) = \omega^\alpha(\mathbf{U}), \quad S_X^\alpha(X, T) = k^\alpha(\mathbf{U}),$$

как следует из подстановки (1.6) в систему (1.2).

Функции $\Psi_{(k)}(\theta, X, T)$ определяются из линейных систем

$$\hat{L}_{j[\mathbf{U}, \theta_0]}^i(X, T) \Psi_{(k)}^j(\theta, X, T) = f_{(k)}^i(\theta, X, T), \quad (1.8)$$

где $\hat{L}_{j[\mathbf{U}, \theta_0]}^i(X, T)$ представляет собой линейный оператор, задаваемый линеаризацией системы (1.4) на решении (1.7). Условия разрешимости систем (1.8) могут быть записаны как условия ортогональности функций $\mathbf{f}_{(k)}(\theta, X, T)$ всем «левым собственным векторам» (собственным векторам сопряженного оператора) $\kappa_{[\mathbf{U}(X, T)]}^{(q)}(\theta + \theta_0(X, T))$ оператора $\hat{L}_{j[\mathbf{U}, \theta_0]}^i(X, T)$, соответствующим нулевым собственным значениям. Условия разрешимости системы (1.8) для $k = 1$ вместе с равенством

$$k_T^\alpha = \omega_X^\alpha$$

дают систему Уизема для m -фазных решений системы (1.2), играющую центральную роль в подходе медленных модуляций.

Для уравнения (1.1) мы имеем

$$\hat{L}_{[k, \omega, \theta_0]} = (\omega^2 - k^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V''(\Phi(\theta + \theta_0, k, \omega)),$$

и функция $\Phi_\theta(\theta + \theta_0, k, \omega)$ играет роль как «левого», так и «правого» собственного вектора, соответствующего нулевому собственному значению.

Функция $f_{(1)}(\theta, X, T)$ определяется формулой

$$f_{(1)} = -S_{TT}\Phi_\theta - 2S_T\Phi_{\theta T} + S_{XX}\Phi_\theta + 2S_X\Phi_{\theta X}, \quad (1.9)$$

и система Уизема может быть записана в виде

$$\left(\omega \int_0^{2\pi} \Phi_\theta^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)_T = \left(k \int_0^{2\pi} \Phi_\theta^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)_X, \quad (1.10)$$

$$k_T = \omega_X$$

(см. [1]–[4]).

Система Уизема относится к так называемым системам гидродинамического типа, которые могут быть записаны в виде

$$A_\mu^\nu(\mathbf{U})U_T^\mu = B_\mu^\nu(\mathbf{U})U_X^\mu \quad (1.11)$$

с некоторыми матрицами $A(\mathbf{U})$ и $B(\mathbf{U})$. В случае общего положения система (1.11) может быть разрешена относительно временных производных функции $\mathbf{U}$ и записана в эволюционной форме

$$U_T^\nu = V_\mu^\nu(\mathbf{U})U_X^\mu, \quad \nu = 1, \dots, N \quad (1.12)$$

(где $V = A^{-1}B$).

Лагранжевы свойства системы Уизема были исследованы Уиземом [3], который предложил также метод «усреднения» функции Лагранжа для построения функции Лагранжа для системы Уизема.

Другой важной процедурой является процедура «усреднения» локальных гамильтоновых структур, предложенная Дубровиным и Новиковым ([14], [22], [23]). Процедура Дубровина–Новикова дает при этом теоретико-полевую гамильтонову структуру гидродинамического типа для системы (1.12) с функцией Гамильтона, имеющей гидродинамический вид $H = \int h(\mathbf{U}) dX$. Скобка Дубровина–Новикова для системы (1.12) имеет форму

$$\{U^\nu(X), U^\mu(Y)\} = g^{\nu\mu}(\mathbf{U})\delta'(X - Y) + b_\lambda^{\nu\mu}(\mathbf{U})U_X^\lambda \delta(X - Y), \quad (1.13)$$

которая называется также локальной скобкой Пуассона гидродинамического типа.

Гамильтоновы свойства систем (1.12) тесно связаны с их свойствами интегрируемости. Так, Царевым [24] было доказано, что все диагонализуемые системы (1.12), имеющие гамильтонову структуру Дубровина–Новикова, могут в действительности быть проинтегрированы (гипотеза С. П. Новикова). На самом деле то же самое верно и для диагонализуемых систем (1.12), имеющих более общие слабо нелокальные гамильтоновы структуры Мохова–Ферапонтова или Ферапонтова ([25]–[31]). Отметим здесь, что обобщение процедуры Дубровина–Новикова на слабо нелокальный случай было предложено в [32].

Теория систем и иерархий (1.12), обладающих бигамильтоновым формализмом, играет основную роль в теории фробениусовых многообразий ([33]–[36], [38]), дающих классификацию топологических квантовых теорий поля, основанную на уравнении WDVV. Отметим, что процедура Дубровина–Новикова дает также возможность построения бигамильтонова формализма системы Уизема (1.12) в случае, если исходная система (1.2) обладает локальным теоретико-полевым бигамильтоновым формализмом. Как следствие этого факта иерархии Уизема, отвечающие большинству интегрируемых систем (таких, как КдФ или НУШ), дают в действительности важные примеры фробениусовых многообразий.

Высшие поправки к топологическим квантовым теориям поля требуют деформаций ([37], [39], [41]) иерархий гидродинамического типа (1.12), имеющих вид

$$U_T^\nu = V_\mu^\nu(\mathbf{U})U_X^\mu + \sum_{k \geq 2} v_{(k)}^\nu(\mathbf{U}, \mathbf{U}_X, \dots, \mathbf{U}_{kX})\epsilon^{k-1}, \quad (1.14)$$

где все $v_{(k)}^\nu$ являются гладкими функциями, полиномиальными по производным $\mathbf{U}_X, \dots, \mathbf{U}_{kX}$ и имеющими степень k в соответствии со следующими правилами градуировки:

- (1) все функции $f(\mathbf{U})$ имеют степень 0;
- (2) производные U_{kX}^ν имеют степень k ;

(3) степень произведения двух функций, обладающих определенными степенями, равна сумме их степеней.

Деформация (1.14) системы (1.12) подразумевает также деформацию соответствующей (би)гамильтоновой структуры (1.13):

$$\{U^\nu(X), U^\mu(Y)\} = \{U^\nu(X), U^\mu(Y)\}_0 + \sum_{k \geq 2} \epsilon^{k-1} \sum_{s=0}^k B_{(k)s}^{\nu\mu}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_X, \dots, \mathbf{U}_{(k-s)X}) \delta^{(s)}(X - Y), \quad (1.15)$$

где все $B_{(k)s}^{\nu\mu}$ полиномиальны по производным $\mathbf{U}_X, \dots, \mathbf{U}_{(k-s)X}$ и имеют степень $k - s$.

Деформация (1.14) иерархии гидродинамического типа вместе с деформацией (1.15) соответствующей бигамильтоновой структуры играет основную роль в процедуре деформации фробениусова многообразия ([37], [39], [41]). Отметим здесь, что общая теория деформаций интегрируемых иерархий гидродинамического типа, так же, как и бигамильтоновых структур типа Дубровина–Новикова, активно изучается в настоящее время. Укажем здесь также недавние работы, в которых были получены наиболее важные результаты по этой тематике: [40], [42]–[45]. Мы будем называть деформацию (1.14) любой системы гидродинамического типа деформацией Дубровина–Жанга.

Как было впервые указано в [5]¹⁾, высшие поправки в методе Уизема удовлетворяют более сложным уравнениям, включающим «дисперсионные члены», и система Уизема (1.11) должна на самом деле содержать также высшие производные («дисперсию»), когда она рассматривается в следующих порядках по ϵ .

В работе [46] была предложена общая процедура деформации гиперболических систем Уизема, основанная на «перенормировке» параметров. Процедура, предложенная в [46], дает деформацию системы Уизема (1.12), имеющую форму Дубровина–Жанга (1.14). Этот метод, с нашей точки зрения, может рассматриваться как решение первой части задачи, поставленной Б. А. Дубровиным и связанной с деформациями фробениусовых многообразий. А именно, в задаче Дубровина требуется построение деформации системы Уизема (1.12) в форме Дубровина–Жанга и соответствующей скобки Пуассона, также имеющей форму Дубровина–Жанга (1.15). Решение проблемы Дубровина для случая бигамильтоновых интегрируемых систем дает в действительности деформацию фробениусовых многообразий, определяемых соответствующими иерархиями Уизема, бигамильтоновыми, согласно процедуре Дубровина–Новикова. Отметим здесь также, что в работе [47] были изучены лагранжевы свойства деформаций систем Уизема, предложенных в [46]. Тем не менее обобщение процедуры Дубровина–Новикова, дающее деформации «усредненных» скобок (1.13), пока не рассматривалось.

§2. Лоренц-инвариантная деформация системы Уизема

В этой работе мы будем рассматривать деформацию системы Уизема для уравнения (1.1), имеющую лоренц-инвариантную форму. Так же, как и в [46], [47], мы будем использовать здесь «перенормировку» параметров однофазных

¹⁾ Кроме того, в [5]–[7] впервые рассматривался многофазный метод Уизема.

решений уравнения (1.1) после построения решения (1.6). А именно, мы вводим «перенормированную» модулированную фазу

$$S(X, T, \epsilon) = \sum_{k \geq 0} S_{(k)}(X, T) \epsilon^k,$$

которая является «физически наблюдаемой» величиной, и производим затем «переразложение» рядов (1.6), используя высшие производные функции $S(X, T, \epsilon)$ вместо параметра ϵ . Функция

$$\Phi\left(\frac{S(X, T, \epsilon)}{\epsilon} + \theta, S_X(X, T, \epsilon), S_T(X, T, \epsilon)\right) \quad (2.1)$$

будет теперь играть роль главного приближения в «перенормированном» разложении, в то время как все высшие члены будут содержать высшие производные функции $S(X, T, \epsilon)$. Члены нового разложения будут теперь зависеть от ϵ и будут построены в соответствии с новым «правилом градуировки», наложенным на производные функции $S(X, T, \epsilon)$.

В этой ситуации мы можем опустить в действительности «ненаблюдаемый» параметр ϵ и использовать только функционалы от «перенормированной» модулированной фазы $S(X, T) = S(X, T, \epsilon)$. Следуя [46], [47], мы опустим параметр ϵ во всех вычислениях (или положим формально $\epsilon = 1$), но, тем не менее, сохраним обозначения X и T для пространственной и временной переменных для того, чтобы подчеркнуть, что параметры однофазного решения являются медленно меняющимися функциями от x и t . Так же, как и в [46], [47], мы определим теперь «перенормировочное правило», определяющее перенормированную фазу $S(X, T, \epsilon)$. А именно, мы ищем теперь решение уравнения (1.1), имеющее форму

$$\varphi(\theta, X, T) = \Phi(S(X, T) + \theta, S_X, S_T) + \sum_{k \geq 1} \tilde{\Psi}_{(k)}(S(X, T) + \theta, X, T), \quad (2.2)$$

где функции $\tilde{\Psi}_{(k)}$ являются локальными функционалами фазы $S(X, T)$ и ее производных, имеющими степень градуировки k (определяемую ниже). Все функции $\tilde{\Psi}_{(k)}(\theta, X, T)$ определяются из линейных систем

$$\hat{L}_{[S_X, S_T]} \tilde{\Psi}_{(k)}(\theta, X, T) = \tilde{f}_{(k)}(\theta, X, T), \quad (2.3)$$

где

$$\hat{L}_{[S_X, S_T]} = (S_T^2 - S_X^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V''(\Phi(\theta, S_X, S_T))$$

есть линеаризация уравнения (1.5) на функции $\Phi(\theta, S_X, S_T)$ и $\tilde{f}_{(k)}(\theta, X, T)$ является невязкой, имеющей степень градуировки k . Система (2.3) определяет функцию $\tilde{\Psi}_{(k)}(\theta, X, T)$ с точностью до функции

$$c(X, T) \Phi_\theta(\theta, S_X, S_T),$$

принадлежащей ядру оператора $\hat{L}_{[S_X, S_T]}$ при всех X и T . Мы требуем теперь, чтобы функция $S(X, T)$ была нормирована «оптимальным» образом, так что

$$\int_0^{2\pi} \Phi_\theta(\theta, S_X, S_T) \tilde{\Psi}_{(k)}(\theta, X, T) \frac{d\theta}{2\pi} = 0 \quad (2.4)$$

при всех X и T .

Условие (2.4) определяет теперь единственным образом функцию $\tilde{\Psi}_{(k)}(\theta, X, T)$, удовлетворяющую системе (2.3).

Скажем теперь несколько слов о «правилах градуировки», которые мы собираемся здесь использовать.

Отметим сначала, что градуировка, использованная в [46], [47] и дающая деформацию системы Уизема в форме Дубровина–Жанга, определялась производными по X от параметров U m -фазных решений (1.3). А именно, в [46], [47] было использовано следующее правило градуировки:

- (1) функции $f(\omega, k) = f(S_T, S_X)$ имеют степень 0;
- (2) производные ω_{kX} , k_{kX} имеют степень k ;
- (3) степень произведения двух функций, обладающих определенными степенями, равна сумме их степеней.

В соответствии с этим правилом градуировки высшие производные по T от параметров (ω, k) не обладают определенными степенями, и требуется только, чтобы функции ω_{kT} , k_{kT} могли быть представлены в виде (бесконечных) рядов, члены которых имеют степень $\geq k$. Выражение

$$\begin{aligned} k_T &= \omega_X, \\ \omega_T &= \sum_{k \geq 1} \sigma_{(k)}(k, \omega, k_X, \omega_X, \dots) \end{aligned} \quad (2.5)$$

функций k_T , ω_T в терминах производных по X от функций k , ω играет при этом роль деформации системы Уизема, имеющей форму Дубровина–Жанга. Функции $\sigma_{(k)}(k, \omega, k_X, \omega_X, \dots)$ имеют при этом степени k и определяются из условий совместности

$$\int_0^{2\pi} \Phi_\theta(\theta, S_X, S_T) \tilde{f}_{(k)}(\theta, X, T) \frac{d\theta}{2\pi} = 0 \quad (2.6)$$

для системы (2.3) в порядке k . Система (2.5) играет, таким образом, роль «полной системы Уизема», включающей все члены асимптотического разложения.

В этой работе, однако, мы должны использовать некоторое лоренц-инвариантное правило градуировки, для того чтобы получить лоренц-инвариантную деформацию системы Уизема (1.10).

Введем теперь два дифференциальных оператора

$$\hat{\xi}_1 = S_T \frac{\partial}{\partial T} - S_X \frac{\partial}{\partial X}, \quad \hat{\xi}_2 = S_X \frac{\partial}{\partial T} - S_T \frac{\partial}{\partial X}.$$

Легко видеть, что как $\hat{\xi}_1$, так и $\hat{\xi}_2$ являются лоренц-инвариантными. Используем обозначение $\mu = S_T^2 - S_X^2$. Мы имеем

$$\hat{\xi}_1 S = S_T^2 - S_X^2 = \mu, \quad \hat{\xi}_2 S = 0.$$

Положим по определению $\deg f(\mu) = 0$ для любой гладкой функции $f(\mu)$. Тогда легко видеть, что оба выражения

$$\hat{\xi}_1 \mu = 2S_T^2 S_{TT} + 2S_X^2 S_{XX} - 4S_T S_X S_{XT}$$

и

$$\hat{\xi}_2 \mu = 2S_T S_X (S_{TT} + S_{XX}) - 2(S_T^2 + S_X^2) S_{XT}$$

также являются лоренц-инвариантными. Определим теперь общую функцию, имеющую степень 1, формулой

$$f[S] = a(\mu)\hat{\xi}_1\mu + b(\mu)\hat{\xi}_2\mu.$$

Заметим, что функция $\nu = S_{TT} - S_{XX}$ при таком подходе не имеет определенной степени и должна быть представлена в виде бесконечной суммы членов, имеющих степени ≥ 1 .

Определим теперь функции с высшими степенями, используя оператор $\hat{\xi}_1$. А именно, введем семейство $\mathcal{M}$ функций, имеющих определенные степени, используя следующее правило:

- (1) все гладкие функции $f(\mu)$ принадлежат $\mathcal{M}$ и имеют степень 0;
- (2) функции $Q = \hat{\xi}_1\mu$, $P = \hat{\xi}_2\mu$ принадлежат $\mathcal{M}$, причем $\deg Q = \deg P = 1$;
- (3) если функции F и G принадлежат $\mathcal{M}$, то FG также принадлежит $\mathcal{M}$, причем

$$\deg(FG) = \deg F + \deg G;$$

- (4) если функция F принадлежит $\mathcal{M}$, то функция $\hat{\xi}_1 F$ также принадлежит $\mathcal{M}$, причем

$$\deg(\hat{\xi}_1 F) = \deg F + 1.$$

Легко видеть, что все функции семейства $\mathcal{M}$ являются лоренц-инвариантными.

Функция $\nu = S_{TT} - S_{XX}$ не принадлежит семейству $\mathcal{M}$, и мы не приписываем ей никакой определенной степени градуировки. Вместо этого мы налагаем условия

$$S_{TT} - S_{XX} = \sum_{k \geq 1} \nu_{(k)}, \quad (2.7)$$

где каждая функция $\nu_{(k)}$ представляется суммой функций, принадлежащих $\mathcal{M}$ и имеющих степень k .

Система (2.7) будет теперь играть роль деформации системы Уизема в лоренц-инвариантном представлении. Каждая функция $\nu_{(k)}$, $k \geq 1$, определяется теперь из условий совместности (2.6) системы (2.3) в порядке k .

Уравнение

$$S_{TT} - S_{XX} = \nu_{(1)}$$

совпадает с системой Уизема (1.10), и мы имеем

$$\nu_{(1)} = - \left[\left(\omega \frac{\partial}{\partial T} - k \frac{\partial}{\partial X} \right) W(\mu) \right] / W(\mu) = -(\hat{\xi}_1 W(\mu)) / W(\mu), \quad (2.8)$$

где

$$W(\mu) = \int_0^{2\pi} \Phi_\theta^2(\theta, \mu) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Вернемся к разложению (2.2). Мы будем предполагать теперь, что каждая функция $\tilde{\Psi}_{(k)}(\theta, X, T)$ представляется суммой функций, принадлежащих $\mathcal{M}$ (при каждом θ) и имеющих степень k . Для функции

$$\phi(\theta, X, T) = \varphi(\theta - S(X, T), X, T) = \Phi(\theta, X, T) + \sum_{k \geq 1} \tilde{\Psi}_{(k)}(\theta, X, T) \quad (2.9)$$

мы получаем уравнение

$$(S_T^2 - S_X^2)\phi_{\theta\theta} + V'(\phi) + 2\left(S_T \frac{\partial}{\partial T} - S_X \frac{\partial}{\partial X}\right)\phi_{\theta} + (S_{TT} - S_{XX})\phi_{\theta} + \phi_{TT} - \phi_{XX} = 0.$$

Нетрудно проверить соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} &= -\hat{\xi}_1^+ \frac{1}{\mu} \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2^+ \frac{1}{\mu} \hat{\xi}_2 \\ &= \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_1^2 - \hat{\xi}_2^2) - \frac{1}{\mu^2}(\hat{\xi}_1\mu)\hat{\xi}_1 + \frac{1}{\mu^2}(\hat{\xi}_2\mu)\hat{\xi}_2 + \frac{1}{\mu}(S_{TT} - S_{XX})\hat{\xi}_1, \end{aligned}$$

где

$$\hat{\xi}_1^+ = -\frac{\partial}{\partial T}S_T + \frac{\partial}{\partial X}S_X, \quad \hat{\xi}_2^+ = -\hat{\xi}_2.$$

Мы имеем, таким образом,

$$\begin{aligned} \mu\phi_{\theta\theta} + V'(\phi) + 2\hat{\xi}_1\phi_{\theta} + (S_{TT} - S_{XX})\phi_{\theta} \\ + \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_1^2 - \hat{\xi}_2^2)\phi - \frac{1}{\mu^2}(\hat{\xi}_1\mu)(\hat{\xi}_1\phi) + \frac{1}{\mu^2}(\hat{\xi}_2\mu)(\hat{\xi}_2\phi) + \frac{1}{\mu}(S_{TT} - S_{XX})(\hat{\xi}_1\phi) = 0. \end{aligned}$$

Используя соотношение (2.7), мы можем тогда написать в порядке k (≥ 1)

$$\begin{aligned} \mu\tilde{\Psi}_{(k)\theta\theta} + V''(\Phi)\tilde{\Psi}_{(k)} &= -\sum_{l=1}^k \nu_{(l)} \left(\tilde{\Psi}_{(k-l)\theta} + \frac{1}{\mu}\hat{\xi}_1\tilde{\Psi}_{(k-l-1)} \right) - \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_1^2\tilde{\Psi}_{(k-2)}) \\ &+ \frac{1}{\mu^2}(\hat{\xi}_1\mu)(\hat{\xi}_1\tilde{\Psi}_{(k-2)}) - 2\hat{\xi}_1\tilde{\Psi}_{(k-1)\theta} + \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_2^2\phi)^{[k]} - \frac{1}{\mu^2}(\hat{\xi}_2\mu)(\hat{\xi}_2\phi)^{[k-1]} - V'_{(k)} \quad (2.10) \end{aligned}$$

(где $\tilde{\Psi}_{(q)} \equiv 0$ для $q < 0$ и мы полагаем также $\tilde{\Psi}_{(0)} \equiv \Phi(\theta, S_X, S_T)$).

Выражения $(\hat{\xi}_2^2\phi)^{[k]}$ и $(\hat{\xi}_2\phi)^{[k-1]}$ представляют здесь члены порядка k и $k-1$ градуированных разложений функций $\hat{\xi}_2^2\phi$ и $\hat{\xi}_2\phi$ соответственно и $V'_{(k)}$ представляет собой сумму всех функций, имеющих степень k , задаваемых разложением V' (кроме $V''(\Phi)\tilde{\Psi}_{(k)}$).

Для того чтобы использовать уравнение (2.10), нам надо определить теперь действие оператора $\hat{\xi}_2$ на функциях семейства $\mathcal{M}$. В общем случае выражения $\hat{\xi}_2 F$, $F \in \mathcal{M}$, не имеют определенной степени градуировки, согласно нашему правилу; поэтому мы должны представить эти выражения как бесконечные ряды членов, имеющих определенные степени градуировки. Мы будем естественным образом предполагать, что разложение функции $\hat{\xi}_2 F$ всегда начинается с члена степени $k+1$, если $\deg F = k$. Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 2.1. *Соотношение (2.7) определяет единственным образом градуированное разложение любого выражения $\hat{\xi}_2 F$, где F является функцией, имеющей определенную степень градуировки.*

Доказательство. По определению функции $\hat{\xi}_1\mu$ и $\hat{\xi}_2\mu$ обе принадлежат семейству $\mathcal{M}$ и имеют степень 1.

Нетрудно проверить соотношение

$$\begin{aligned} [\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_1] &= \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 = \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_2 \mu) \hat{\xi}_1 - \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_1 \mu) \hat{\xi}_2 + (S_{TT} - S_{XX}) \hat{\xi}_2 \\ &= \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_2 \mu) \hat{\xi}_1 - \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_1 \mu) \hat{\xi}_2 + \left(\sum_{k \geq 1} \nu_{(k)} \right) \hat{\xi}_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тогда

$$\hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1 \mu = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 \mu + \sum_{k \geq 1} (\hat{\xi}_2 \mu) \nu_{(k)}, \quad (2.12)$$

что дает градуированное разложение функции $\hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1 \mu$.

Рассмотрим теперь функцию $\hat{\xi}_2 \hat{\xi}_2 \mu = \hat{\xi}_2^2 \mu$. Прямым вычислением можно доказать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_2^2 \mu &= \hat{\xi}_1^2 \mu - 2\mu \hat{\xi}_1 (S_{TT} - S_{XX}) \\ &\quad - \frac{2}{\mu}(\hat{\xi}_1 \mu)^2 + \frac{2}{\mu}(\hat{\xi}_2 \mu)^2 + 3(\hat{\xi}_1 \mu)(S_{TT} - S_{XX}) - 2\mu(S_{TT} - S_{XX})^2. \end{aligned}$$

Записывая снова

$$\hat{\xi}_2^2 \mu = \hat{\xi}_1^2 \mu - \frac{2}{\mu}(\hat{\xi}_1 \mu)^2 + \frac{2}{\mu}(\hat{\xi}_2 \mu)^2 - 2\mu \sum_{k \geq 1} \hat{\xi}_1 \nu_{(k)} + 3(\hat{\xi}_1 \mu) \sum_{k \geq 1} \nu_{(k)} - 2\mu \left(\sum_{k \geq 1} \nu_{(k)} \right)^2, \quad (2.13)$$

мы получаем градуированное представление функции $\hat{\xi}_2^2 \mu$.

Все остальные (мономиальные) выражения вида $\hat{\xi}_2^k F$ с $\deg F = k$ могут быть представлены в одной из двух следующих форм:

- (1) $\hat{\xi}_2 F = \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1 F', \deg F' = k - 1$;
- (2) $\hat{\xi}_2 F = \hat{\xi}_2 F_1 F_2, \deg F_1 < k, \deg F_2 < k$.

Тогда

$$\hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1 F' = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 F' + \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_2 \mu) \hat{\xi}_1 F' - \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_1 \mu) \hat{\xi}_2 F' + \left(\sum_{k \geq 1} \nu_{(k)} \right) \hat{\xi}_2 F', \quad (2.14)$$

$$\hat{\xi}_2 F_1 F_2 = F_1 \hat{\xi}_2 F_2 + F_2 \hat{\xi}_2 F_1, \quad (2.15)$$

так что мы можем использовать индукцию по $\deg F$. Лемма 2.1 доказана. $\square$

Согласно лемме 2.1, естественно рассматривать функции $f(\mu)$ (f — любая гладкая), $A = \hat{\xi}_1 \mu$, $B = \hat{\xi}_2 \mu$, $A_{(k)} = \hat{\xi}_1^k A$, $B_{(k)} = \hat{\xi}_1^k B$ как «генераторы» для градуированных разложений решений (2.2). Согласно нашему правилу, при этом $\deg f(\mu) = 0$, $\deg A = \deg B = 1$, $\deg A_{(k)} = \deg B_{(k)} = k + 1$.

Нам понадобится также другая техническая лемма:

Лемма 2.2. Для любой функции F степени k члены $(\hat{\xi}_2 F)^{[k+1]}, \dots, (\hat{\xi}_2 F)^{[k+s]}$ ($s \geq 1$) градуированного разложения функции $\hat{\xi}_2 F$ определяются членами $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(s)}$ системы (2.7).

Доказательство. Легко видеть, что данное утверждение верно для $\hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1 \mu$ ($F = \hat{\xi}_1 \mu$) и $\hat{\xi}_2^2 \mu$ ($F = \hat{\xi}_2 \mu$). Используя теперь ту же самую индукцию по отношению к $\deg F$ и соотношения (2.14)–(2.15), мы получаем утверждение леммы. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Используя лемму 2.2, мы можем теперь доказать следующую важную лемму:

Лемма 2.3. *Условие разрешимости системы (2.10) в порядке k однозначно определяет член $\nu_{(k)}$ системы (2.7) при условии, что члены $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(k-1)}$ и поправки $\tilde{\Psi}_{(1)}, \dots, \tilde{\Psi}_{(k-1)}$ известны.*

Доказательство. Действительно, для $k \geq 2$

$$\frac{1}{\mu} (\hat{\xi}_2^2 \phi)^{[k]} = \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{s=1}^{k-l-1} (\hat{\xi}_2 (\hat{\xi}_2 \tilde{\Psi}_{(l)})^{[l+s]})^{[k]},$$

где $s \leq k-1$, $k-l-s \leq k-1$.

Точно так же

$$(\hat{\xi}_2 \phi)^{[k-1]} = \sum_{l=0}^{k-2} (\hat{\xi}_2 \tilde{\Psi}_{(l)})^{[k-1]},$$

где $k-l-1 \leq k-1$.

Все функции $\tilde{\Psi}_{(0)}, \dots, \tilde{\Psi}_{(k-2)}$ при этом зависят от $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(k-2)}$ (и (k, ω)). Используя лемму 2.2, мы можем утверждать тогда, что оба эти выражения определяются членами $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(k-1)}$.

Рассматривая остальные члены в правой части формулы (2.10), мы видим, что они все зависят от $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(k-1)}$, $\tilde{\Psi}_{(0)}, \dots, \tilde{\Psi}_{(k-1)}$, за исключением члена $\nu_{(k)} \tilde{\Psi}_{(0)\theta}$. Тогда условие ортогональности (2.6) в порядке k дает соотношение

$$\nu_{(k)} \int_0^{2\pi} \Phi_\theta^2 \frac{d\theta}{2\pi} = G_{(k)}(k, \omega, \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(k-1)}),$$

где $G_{(k)}$ — некоторый гладкий функционал от k , ω , $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(k-1)}$. Лемма 2.3 доказана. $\square$

Будем теперь использовать естественный выбор функций $\Phi(\theta, \mu)$, определяемый требованием, что $\Phi(\theta, \mu)$ имеет локальный минимум в точке $\theta = 0$. Легко видеть, что в этом случае $\Phi(\theta, \mu)$ является симметричной функцией от θ : $\Phi(\theta, \mu) = \Phi(-\theta, \mu)$. Условие ортогональности (2.6) для $k = 1$ дает формулу (2.8) для функции $\nu_{(1)}$, и мы получаем систему Уизема в качестве главного члена системы (2.7). Функция $\tilde{f}_{(1)}$, задаваемая формулой

$$\tilde{f}_{(1)} = -\nu_{(1)} \Phi_\theta - 2S_T \Phi_{\theta T} + 2S_X \Phi_{\theta X},$$

является антисимметричной по θ : $\tilde{f}_{(1)}(-\theta, X, T) = -\tilde{f}_{(1)}(\theta, X, T)$. Сформулируем здесь следующую лемму о решениях $\tilde{\Psi}_{(k)}$ системы (2.3), доказанную в [47]:

Лемма 2.4. (1) *Для гладкой периодической антисимметричной функции $\tilde{f}_{(k)}(\theta)$, удовлетворяющей условиям ортогональности (2.6), решение $\tilde{\Psi}_{(k)}(\theta)$, удовлетворяющее условиям нормировки (2.4), является гладкой периодической антисимметричной функцией: $\tilde{\Psi}_{(k)}(-\theta) = -\tilde{\Psi}_{(k)}(\theta)$.*

(2) Для гладкой периодической симметричной функции $\tilde{f}_{(k)}(\theta)$ решение $\tilde{\Psi}_{(k)}(\theta)$, удовлетворяющее условиям нормировки (2.4), является гладкой периодической симметричной функцией¹⁾: $\tilde{\Psi}_{(k)}(-\theta) = \tilde{\Psi}_{(k)}(\theta)$.

Мы можем теперь утверждать, что функция $\tilde{\Psi}_{(1)}(\theta, X, T)$ является периодической антисимметричной функцией от θ : $\tilde{\Psi}_{(1)}(-\theta, X, T) = -\tilde{\Psi}_{(1)}(\theta, X, T)$.

Теперь легко видеть, что невязка $\tilde{f}_{(2)}$ может быть представлена в виде

$$\tilde{f}_{(2)} = -\nu_{(2)}\Phi_{\theta}(\theta, \mu) + \tilde{f}'_{(2)}(\theta, X, T),$$

где $\tilde{f}'_{(2)}$ симметрична по θ : $\tilde{f}'_{(2)}(-\theta, X, T) = \tilde{f}'_{(2)}(\theta, X, T)$.

Используя условия ортогональности (2.6), мы получаем тогда $\nu_{(2)} \equiv 0$ для второго члена системы (2.7). В этом случае $\tilde{f}_{(2)} = \tilde{f}'_{(2)}$ и $\tilde{\Psi}_{(2)}$ является симметричной функцией от θ : $\tilde{\Psi}_{(2)}(-\theta, X, T) = \tilde{\Psi}_{(2)}(\theta, X, T)$. Используя индукцию, мы получаем следующую лемму:

Лемма 2.5²⁾. При заданном выше выборе функций $\Phi(\theta, \mu)$ верны следующие утверждения:

(1) все четные члены $\nu_{(2l)}(k, \omega, \dots)$ деформации системы Уизема (2.7) тождественно равны нулю: $\nu_{(2l)} \equiv 0$;

(2) все нечетные поправки $\tilde{\Psi}_{(2l+1)}(\theta, X, T)$, $l \geq 0$, в (2.2) являются антисимметричными по θ : $\tilde{\Psi}_{(2l+1)}(-\theta) = -\tilde{\Psi}_{(2l+1)}(\theta)$;

(3) все четные поправки $\tilde{\Psi}_{(2l)}(\theta, X, T)$, $l \geq 1$, в (2.2) являются симметричными по θ : $\tilde{\Psi}_{(2l)}(-\theta) = \tilde{\Psi}_{(2l)}(\theta)$.

Таким образом, мы можем переписать систему (2.7) в виде

$$S_{TT} - S_{XX} = \sum_{l \geq 0} \nu_{(2l+1)}, \quad (2.16)$$

где каждая функция $\nu_{(2l+1)}$ представляется суммой функций, принадлежащих $\mathcal{M}$ и имеющих степень $2l + 1$ ³⁾.

Отметим здесь также, что система (2.16) наследует законы сохранения импульса и энергии для системы (1.1), которые получаются ограничением соответствующих законов на решения (2.2) и последующим интегрированием по θ . Соответствующие соотношения задаются при этом (бесконечными) рядами, зависящими от k , ω и их производных, которые могут быть выписаны в соответствии с правилом градуировки. Таким образом, мы можем написать

$$\langle \varphi_T \varphi_X \rangle_T = \left\langle \frac{\varphi_T^2}{2} + \frac{\varphi_X^2}{2} - V(\varphi) \right\rangle_X \quad (2.17)$$

¹⁾Для другой нормировки функций $\Psi_{(k)}$ аналогичное свойство было указано в [5].

²⁾Аналогичная лемма верна также для деформации системы Уизема в форме Дубровина–Жанга [47].

³⁾Дисперсионные поправки, возникающие здесь, в действительности довольно сильно отличаются от рассматриваемых в [5] из-за «полной перенормировки» параметров, используемой в нашем подходе.

(сохранение момента),

$$\left\langle \frac{\varphi_T^2}{2} + \frac{\varphi_X^2}{2} + V(\varphi) \right\rangle_T = \langle \varphi_T \varphi_X \rangle_X \quad (2.18)$$

(сохранение энергии).

Здесь мы предполагаем, что функция $\varphi(\theta, X, T)$ дается формулой (2.2), а обозначение $\langle \dots \rangle$ использовано для процедуры «усреднения», задаваемой интегрированием по θ : $\langle \dots \rangle \equiv \int_0^{2\pi} \dots d\theta / 2\pi$.

§3. Лагранжев формализм и деформационная процедура

Используем теперь лагранжев формализм исходной системы (1.1) для получения первой нетривиальной поправки $\nu_{(3)}$ в системе (2.16). Мы используем здесь схему, предложенную в [47] для лагранжевых систем. Хорошо известно, что уравнение (1.1) может быть представлено в лагранжевой форме

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} \varphi_x^2 + V(\varphi) \right] dx dt = 0.$$

Мы должны добавить переменную θ и ввести функционал действия

$$\Sigma[\varphi] = \int \int \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \varphi_T^2 + \frac{1}{2} \varphi_X^2 + V(\varphi) \right] \frac{d\theta}{2\pi} dX dT. \quad (3.1)$$

В терминах функции $\phi(\theta, X, T)$ мы можем тогда написать

$$\begin{aligned} \Sigma = & \int \int \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} S_T^2(\phi_\theta)^2 + \frac{1}{2} S_X^2(\phi_\theta)^2 + V(\phi) \right] \frac{d\theta}{2\pi} dX dT \\ & + \int \int \int_0^{2\pi} [-S_T \phi_\theta \phi_T + S_X \phi_\theta \phi_X] \frac{d\theta}{2\pi} dX dT \\ & + \int \int \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [-(\phi_T)^2 + (\phi_X)^2] \frac{d\theta}{2\pi} dX dT. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Система (2.16) эквивалентна уравнению

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta S(X, T)} = 0,$$

где функция $\phi(\theta, X, T)$ задается соотношением (2.9).

Для определения поправки $\nu_{(3)}$ нам надо выписать только часть $\Sigma' = \Sigma_{(0)} + \Sigma_{(2)}$ действия (3.2), где

$$\Sigma_{(0)} = \int \int \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \mu \Phi_\theta^2 + V(\Phi) \right) \frac{d\theta}{2\pi} dX dT$$

и

$$\begin{aligned}\Sigma_{(2)} = & \frac{1}{2} \int \int \int_0^{2\pi} (-\mu \tilde{\Psi}_{(1)\theta}^2 + V''(\Phi) \tilde{\Psi}_{(1)}^2) \frac{d\theta}{2\pi} dX dT \\ & + \int \int \int_0^{2\pi} (2S_T \Phi_{\theta T} - 2S_X \Phi_{\theta X}) \tilde{\Psi}_{(1)} \frac{d\theta}{2\pi} dX dT \\ & + \frac{1}{2} \int \int \int_0^{2\pi} (-\Phi_T^2 + \Phi_X^2) \frac{d\theta}{2\pi} dX dT,\end{aligned}$$

или, эквивалентным образом,

$$\begin{aligned}\Sigma_{(2)} = & \int \int \frac{1}{2\mu} \langle \Phi_\mu^2 \rangle (\hat{\xi}_2 \mu)^2 dX dT + \int \int \left[-\frac{1}{2} \mu \langle Z^2(\theta, \mu) \rangle \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \langle V''(\Phi) Z^2(\theta, \mu) \rangle + 2 \langle \Phi_{\theta\mu} Z(\theta, \mu) \rangle - \frac{1}{2\mu} \langle \Phi_\mu^2 \rangle \right] (\hat{\xi}_1 \mu)^2 dX dT,\end{aligned}$$

где функция $Z(\theta, \mu)$ определяется из представления $\tilde{\Psi}_{(1)}$ в форме

$$\tilde{\Psi}_{(1)}(\theta, X, T) = Z(\theta, \mu)(\hat{\xi}_1 \mu)$$

после разрешения системы (2.3) для $k = 1$ с условиями нормировки (2.4).

(Заметим, что

$$\tilde{f}_{(1)} = -\nu_{(1)} \Phi_\theta - 2\hat{\xi}_1 \Phi_\theta = \left(\frac{W'(\mu)}{W(\mu)} \Phi_\theta - 2\Phi_{\theta\mu} \right) (\hat{\xi}_1 \mu)$$

для $k = 1$.)

После некоторых вычислений можно показать, что

$$\begin{aligned}\frac{\delta \Sigma_{(2)}}{\delta S(X, T)} = & \left[-(S_{TT} - S_{XX} + \hat{\xi}_1)(\hat{\xi}_2 \mu)^2 \frac{d}{d\mu} + \hat{\mathcal{O}}_2(\hat{\xi}_2 \mu) \right] \frac{1}{\mu} \langle \Phi_\mu^2 \rangle \\ & + \left[-2(S_{TT} - S_{XX} + \hat{\xi}_1)(\hat{\xi}_1 \mu)^2 \frac{d}{d\mu} + 2\hat{\mathcal{O}}_1(\hat{\xi}_1 \mu) \right] \left[-\frac{1}{2} \mu \langle Z^2(\theta, \mu) \rangle \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \langle V''(\Phi) Z^2(\theta, \mu) \rangle + 2 \langle \Phi_{\theta\mu} Z(\theta, \mu) \rangle - \frac{1}{2\mu} \langle \Phi_\mu^2 \rangle \right],\end{aligned}$$

где операторы $\hat{\mathcal{O}}_1$ и $\hat{\mathcal{O}}_2$ задаются выражениями

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{O}}_1 = & 2\hat{\xi}_1^2 + \left(4(S_{TT} - S_{XX}) - \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_1 \mu) \right) \hat{\xi}_1 + \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_2 \mu) \hat{\xi}_2 \\ & - \frac{1}{\mu^2}(\hat{\xi}_1 \mu)^2 + \frac{1}{\mu^2}(\hat{\xi}_2 \mu)^2 + \frac{2}{\mu}(\hat{\xi}_1 \mu)(S_{TT} - S_{XX}), \\ \hat{\mathcal{O}}_2 = & 2\hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_2 \mu) \hat{\xi}_1 + \frac{1}{\mu}(\hat{\xi}_1 \mu) \hat{\xi}_2 + 2(S_{TT} - S_{XX}) \hat{\xi}_2.\end{aligned}$$

Для получения функции $\nu_{(3)}$ нам нужен в действительности только главный член (степени 3) градуированного разложения данного выражения. Для того чтобы получить этот член, мы должны прежде всего заменить выражение $S_{TT} - S_{XX}$ его главным членом $\nu_{(1)}$ в градуированном разложении. Кроме того, нам надо взять главные члены в градуированных разложениях выражений

$\hat{\xi}_2\hat{\xi}_1\mu$ и $\hat{\xi}_2\hat{\xi}_2\mu$, возникающих в приведенном выше выражении. Легко видеть, что эти члены могут быть взяты из формул (2.12) и (2.13) и равны

$$\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2\mu + \nu_{(1)}\hat{\xi}_2\mu$$

и

$$\hat{\xi}_1^2\mu - \frac{2}{\mu}(\hat{\xi}_1\mu)^2 + \frac{2}{\mu}(\hat{\xi}_2\mu)^2 - 2\mu\hat{\xi}_1\nu_{(1)} + 3(\hat{\xi}_1\mu)\nu_{(1)} - 2\mu\nu_{(1)}^2$$

соответственно.

Выражение $\delta\Sigma_{(0)}/\delta S(X, T)$ равно

$$(S_{TT} - S_{XX})W(\mu) + \hat{\xi}_1W(\mu),$$

так что мы имеем

$$\left(\frac{\delta\Sigma_{(0)}}{\delta S(X, T)}\right)^{[3]} = \nu_{(3)}W(\mu)$$

(и систему Уизема в порядке 1).

Окончательно,

$$\nu_{(3)} = -\frac{1}{W(\mu)}\left(\frac{\delta\Sigma_{(2)}}{\delta S(X, T)}\right)^{[3]}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. Whitham, *A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian*, J. Fluid Mech., **22** (1965), 273–283.
- [2] G. Whitham, *Non-linear dispersive waves*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **283** (1965), 238–261.
- [3] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977.
- [4] J. C. Luke, *A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **292**:1430 (1966), 403–412.
- [5] M. J. Ablowitz, D. J. Benney, *The evolution of multi-phase modes for nonlinear dispersive waves*, Stud. Appl. Math., **49** (1970), 225–238.
- [6] M. J. Ablowitz, *Applications of slowly varying nonlinear dispersive wave theories*, Stud. Appl. Math., **50** (1971), 329–344.
- [7] M. J. Ablowitz, *Approximate methods for obtaining multi-phase modes in nonlinear dispersive wave problems*, Stud. Appl. Math., **51** (1972), 17–55.
- [8] W. D. Hayes, *Group velocity and non-linear dispersive wave propagation*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **332** (1973), 199–221.
- [9] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Распад начального разрыва в уравнении Кортевега–де Фриза*, Письма в ЖЭТФ, **17**:5 (1973), 268–271.
- [10] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны*, ЖЭТФ, **65**:8 (1973), 590–604.
- [11] H. Flaschka, M. G. Forest, D. W. McLaughlin, *Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg–de Vries equation*, Comm. Pure Appl. Math., **33**:6 (1980), 739–784.
- [12] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, *Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях*, в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 15, ВИНТИ, М., 1980, 3–94.
- [13] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.

- [14] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема*, Докл. АН СССР, **270**:4 (1983), 781–785.
- [15] P. D. Lax, C. D. Levermore, *The small dispersion limit for the Korteweg–de Vries equation* I, II, III, Comm. Pure Appl. Math., **36**:3 (1983), 253–290, **36**:5 (1983), 571–593, **36**:6 (1983), 809–830.
- [16] С. П. Новиков, *Геометрия консервативных систем гидродинамического типа. Метод усреднения для теоретико-полевых систем*, УМН, **40**:4 (1985), 79–89.
- [17] В. В. Авилов, С. П. Новиков, *Эволюция уитемовской зоны в теории КдФ*, Докл. АН СССР, **294**:2 (1987), 325–329.
- [18] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Усредненное описание волн в уравнении Кортевега–де Фриза–Бюргерса*, ЖЭТФ, **93**:3 (1987), 871–880.
- [19] В. В. Авилов, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Эволюция уитемовской зоны в теории Кортевега–де Фриса*, Докл. АН СССР, **295**:2 (1987), 345–349.
- [20] И. М. Кричевер, *Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений*, Функц. анализ и его прил., **22**:3 (1988), 37–52.
- [21] R. Haberman, *The modulated phase shift for weakly dissipated nonlinear oscillatory waves of the Korteweg–de Vries type*, Stud. Appl. Math., **78**:1 (1988), 73–90.
- [22] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория*, УМН, **44**:6 (1989), 29–98.
- [23] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, *Hydrodynamics of soliton lattices*, Sov. Sci. Rev., sect. C, Math. Phys., **9**:4 (1993), 1–136.
- [24] С. П. Царев, *О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа*, Докл. АН СССР, **282**:3 (1985), 534–537.
- [25] О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов, *Нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа, связанные с метриками постоянной кривизны*, УМН, **45**:3 (1990), 191–192.
- [26] Е. В. Ферапонтов, *Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа*, Функц. анализ и его прил., **25**:3 (1991), 37–49.
- [27] Е. В. Ферапонтов, *Ограничение по Дираку гамильтонова оператора $\delta^{IJ} \frac{d}{dx}$ на поверхность евклидова пространства с плоской нормальной связностью*, Функц. анализ и его прил., **26**:4 (1992), 83–86.
- [28] Е. В. Ферапонтов, *Нелокальные матричные гамильтоновы операторы. Дифференциальная геометрия и приложения*, Теорет. матем. физ., **91**:3 (1992), 452–462.
- [29] E. V. Ferapontov, *Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications*, in: Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 170, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 33–58.
- [30] М. В. Павлов, *Эллиптические координаты и мультигамильтоновы структуры систем гидродинамического типа*, Докл. РАН, сер. матем., **339**:1 (1994), 21–23.
- [31] A. Ya. Maltsev, S. P. Novikov, *On the local systems hamiltonian in the weakly nonlocal Poisson brackets*, Phys. D, **156**:1–2 (2001), 53–80.
- [32] A. Ya. Maltsev, *The averaging of non-local Hamiltonian structures in Whitham’s method*, Intern. J. Math. Math. Sci., **30**:7 (2002), 399–434.
- [33] B. A. Dubrovin, *Integrable systems in topological field theory*, Nucl. Phys. B, **379**:3 (1992), 627–689.
- [34] B. A. Dubrovin, *Integrable Systems and Classification of 2-dimensional Topological Field Theories*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/9209040>.
- [35] B. A. Dubrovin, *Geometry of 2d Topological Field Theories*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/9407018>.

- [36] B. A. Dubrovin, *Flat pencils of metrics and Frobenius manifolds*, in: Proc. of 1997 Taniguchi Symposium “Integrable Systems and Algebraic Geometry”, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, 47–72; <http://arxiv.org/abs/math.DG/9803106>.
- [37] B. A. Dubrovin, Y. Zhang, *Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation*, Comm. Math. Phys., **198** (1998), 311–361.
- [38] B. A. Dubrovin, *Geometry and Analytic Theory of Frobenius Manifolds*, <http://arxiv.org/abs/math.AG/9807034>.
- [39] B. A. Dubrovin, Y. Zhang, *Normal Forms of Hierarchies of Integrable PDEs, Frobenius Manifolds and Gromov–Witten Invariants*, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0108160>.
- [40] P. Lorenzoni, *Deformations of bihamiltonian structures of hydrodynamic type*, J. Geom. Phys., **44**:2–3 (2002), 331–371.
- [41] B. A. Dubrovin, Y. Zhang, *Virasoro Symmetries of the Extended Toda Hierarchy*, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0308152>.
- [42] S.-Q. Liu, Y. Zhang, *Deformations of Semisimple Bihamiltonian Structures of Hydrodynamic Type*, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0405146>.
- [43] S.-Q. Liu, Y. Zhang, *On the Quasitriviality of Deformations of Bihamiltonian Structures of Hydrodynamic Type*, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0406626>.
- [44] B. Dubrovin, S.-Q. Liu, Y. Zhang, *On Hamiltonian Perturbations of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0410027>.
- [45] B. Dubrovin, Y. Zhang, D. Zuo, *Extended Affine Weyl Groups and Frobenius Manifolds–II*, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0502365>.
- [46] A. Ya. Maltsev, *Whitham systems and deformations*, J. Math. Phys., **47**:7 (2006).
- [47] A. Ya. Maltsev, *The Deformations of Whitham Systems and Lagrangian Formalism*, <http://arxiv.org/abs/nlin.SI/0601050>.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: maltsev@itp.ac.ru

Поступило в редакцию
11 сентября 2006 г.