Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, Устранимые особенности решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 2, 44–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2901>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:11:04

УДК 517.956

Устранимые особенности решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка

© 2008. А. В. Покровский

Введение

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) и

$$Lf = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x)D_jf), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in G, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

— равномерно эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными и измеримыми действительными коэффициентами $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ в G ($i, j = 1, \dots, n$). Это означает, что существуют такие $\lambda, \Lambda > 0$, что для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и для почти всех $x \in G$ выполняются неравенства

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 := \lambda(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x) \leq \Lambda^2.$$

Через $A_L(G)$ обозначим множество всех обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в G (в дальнейшем мы рассматриваем только действительные функции, а обозначение $A_L(G)$ используется также и в случае, когда G — открытое множество, не обязательно являющееся областью). Напомним, что по теореме Де Джорджи и Нэша всякое обобщенное решение этого уравнения непрерывно и локально гёльдерово в G .

Пусть $H(G)$ — некоторый класс функций, определенных в области G . В дальнейшем всегда будем предполагать, что $A_L(G) \subset H(G) \subset C(G)$. Пусть K — компакт в G . Мы будем называть K устранимым для обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ (или L -устранимым) в классе $H(G)$, если для любой функции $u \in H(G)$, сужение которой на $G \setminus K$ принадлежит $A_L(G \setminus K)$, существует такая функция $\bar{u} \in A_L(G)$, что $u \equiv \bar{u}$ на $G \setminus K$.

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, то $B(x, r)$ и $S(x, r)$ обозначают соответственно открытый евклидов шар с центром в точке x радиуса $r > 0$ и его границу. Положим $G_r := \{y \in G : B(y, r) \Subset G\}$.

Пусть $r > 0$, $x \in G_r \neq \emptyset$, $f \in C(S(x, r))$, и пусть $f_{L,x,r}$ — непрерывная функция на замкнутом шаре $\bar{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$, такая, что ее сужение на $B(x, r)$ принадлежит $A_L(B(x, r))$ и $f_{L,x,r} \equiv f$ на $S(x, r)$. Такая функция всегда существует и единственна (см., например, [1, гл. 2, теорема 4.3]). Если $f \in C(G)$, то на множестве G_r определим функцию $f_{L,r}(x) := f_{L,x,r}(x)$, которая, как устанавливается в приводимой ниже лемме 1, будет непрерывной на G_r .

Пусть $\alpha > 0$. Мы говорим, что непрерывная в области G функция f принадлежит классу $U_L^\alpha(G)$, если существует такое $C \geq 0$, зависящее только от f , что для каждого шара $B(x, r) \Subset G$ норма функции $f - f_{L,x,r}$ в пространстве $C(B(x, r))$ не превосходит Cr^α , т.е. $\|f - f_{L,x,r}\|_{C(B(x, r))} \leq Cr^\alpha$. Определим класс $C_L^\alpha(G)$ как множество всех функций $f \in C(G)$, для каждой из которых существует такое $C \geq 0$, зависящее только от f , что для любого шара $B(x, r) \Subset G$ имеет место неравенство $|f(x) - f_{L,r}(x)| \leq Cr^\alpha$. Хаусдорфову меру компакта K порядка α обозначим через $\text{mes}^\alpha K$.

В принятых выше обозначениях сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha \leq 2$. Тогда для L -устранимости компакта K в классе $U_L^\alpha(G)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$.

Замечание 1. Из приводимого ниже доказательства теоремы 1 и из включения $U_L^\alpha(G) \subset C_L^\alpha(G)$, непосредственно вытекающего из определений классов $U_L^\alpha(G)$ и $C_L^\alpha(G)$, следует, что теорема 1 остается справедливой, если в ее формулировке заменить класс $U_L^\alpha(G)$ на $C_L^\alpha(G)$.

Чтобы сформулировать следующий результат, введем такое обозначение: если $f \in C(\bar{B}(x, r))$, то $\text{osc}_{B(x, r)} f := \sup_{B(x, r)} f - \inf_{B(x, r)} f$ — колебание функции f на шаре $B(x, r)$. Во введенных обозначениях упомянутая выше теорема Де Джорджи и Нэша может быть сформулирована следующим образом (см. [2, теорема 8.22 и замечание после теоремы 8.24]): для любой тройки концентрических шаров $B(x, r) \Subset B(x, R) \Subset B(x, R_0) \Subset G$ с $R \leq 1$ и для каждой функции $u \in A_L(B(x, R_0))$ справедливо неравенство

$$\text{osc}_{B(x, r)} u \leq C \left(\frac{r}{R} \right)^\gamma \text{osc}_{B(x, R)} u,$$

где $C > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, C и γ зависят только от n и Λ/λ . Для заданного $\alpha \in (0, 1)$ мы обозначаем через $C^\alpha(G)$ и $C^\alpha(G)_{\text{loc}}$ множества всех функций, непрерывных в G и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α соответственно в области G и на ее компактных подмножествах. Аналогичным образом определяются классы $U_L^\alpha(G)_{\text{loc}}$, $C_L^\alpha(G)_{\text{loc}}$, $C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$, $Z(G)_{\text{loc}}$, $W_p^1(G)_{\text{loc}}$, где, как обычно, $C^{1,\alpha}(G)$ — множество всех функций f , непрерывно дифференцируемых в G , первые частные производные которых принадлежат $C^\alpha(G)$, $Z(G)$ — множество всех функций $f \in C(G)$, удовлетворяющих условию Зигмунда $|f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)| \leq C|h|$ для любых $[x-h, x+h] \subset G$ (с не зависящей от $x \in G$ и $h \in \mathbb{R}^n$ величиной $C \geq 0$), и $W_p^1(G)$ — пространство Соболева функций с суммируемыми в степени $p \in \{1, 2\}$ первыми обобщенными производными в G . Из принципа максимума для обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ следует, что при всех $\alpha \in (0, 1)$ справедливо включение $C^\alpha(G)_{\text{loc}} \subset U_L^\alpha(G)_{\text{loc}}$. Следующая теорема показывает, что при достаточно малых α имеет место совпадение классов $U_L^\alpha(G)_{\text{loc}}$ и $C^\alpha(G)_{\text{loc}}$. Всюду ниже γ — гёльдеров показатель в приведенной выше формулировке теоремы Де Джорджи и Нэша.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < \gamma$. Тогда классы функций $U_L^\alpha(G)_{\text{loc}}$ и $C^\alpha(G)_{\text{loc}}$ совпадают.

Замечание 2. В доказательстве теорем 1 и 2 существенно используются теорема Де Джорджи и Нэша и теорема Литтмана, Стампакки и Вайнбергера о существовании функции Грина для оператора L в шаре, которая на его

компактных подмножествах слабо эквивалентна функции Грина для оператора Лапласа Δ . Первая из этих теорем справедлива без условия симметричности матрицы коэффициентов оператора L почти всюду в области G , а во второй это условие можно опустить по крайней мере при $n \geq 3$ (см. [3]). Поэтому теоремы 1 и 2 и все приводимые ниже рассуждения будут справедливыми при $n \geq 3$ без требования симметричности матрицы коэффициентов оператора L почти всюду в области G .

Остановимся на истории вопроса. Описанию устранимых особенностей для решений линейных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами в классах Гёльдера и их различных обобщениях посвящено большое количество работ (см., например, [4]–[16]). В частности, для многих эллиптических уравнений устранимые особенности в таких классах полностью описываются в терминах мер Хаусдорфа. Подобные результаты имеют место и для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений (см. [17]–[19]). Используемый в настоящей работе подход к описанию функциональных классов восходит к работе Федорова [20], в которой фактически рассматриваются классы функций, непрерывных в области $G \subset \mathbb{C}$, определяемые с помощью локальных аппроксимаций в равномерной метрике голоморфными функциями. В дальнейшем идея такого рода определения функциональных классов использовалась в работах Ищанова и автора (см. [11], [16], [18], [21]). Отметим (см. [22]), что для оператора Лапласа Δ при всех $\alpha \in (0, 1)$ имеют место равенства $U_\Delta^\alpha(G)_{\text{loc}} = C_\Delta^\alpha(G)_{\text{loc}} = C^\alpha(G)_{\text{loc}}$, $U_\Delta^{1+\alpha}(G)_{\text{loc}} = C_\Delta^{1+\alpha}(G)_{\text{loc}} = C^{1,\alpha}(G)_{\text{loc}}$, $U_\Delta^1(G)_{\text{loc}} = C_\Delta^1(G)_{\text{loc}} = Z(G)_{\text{loc}}$. Поэтому из теоремы 1 вытекают известные результаты об устранимых особенностях гармонических функций в классах Гёльдера–Зигмунда, установленные в работах [5]–[7], [12], [13].

Работа организована следующим образом. В §1 напоминаются необходимые определения и устанавливается ряд вспомогательных результатов. Второй и третий параграфы работы посвящены доказательству соответственно теорем 1 и 2.

§1. Определения и вспомогательные результаты

Напомним, что (внешней) хаусдорфовой мерой $\text{mes}^\alpha E$ порядка α ($\alpha \geq 0$) множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется конечный или равный $+\infty$ предел при $t \rightarrow 0$ величины $\inf(\sum_i r_i^\alpha)$, где инфимум берется по всем не более чем счетным системам открытых шаров $\{B(x_i, r_i)\}_i$ с $r_i \leq t$, образующих покрытие множества E .

Под обобщенным решением уравнения $Lf = 0$ в области G мы понимаем, как обычно, функцию $u \in W_2^1(G)_{\text{loc}}$, такую, что для каждой бесконечно дифференцируемой функции φ с компактным носителем в G ($\varphi \in C_0^\infty(G)$) выполняется равенство

$$\sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) dx = 0.$$

Пусть $f \in C(G)$ и $r > 0$ выбрано так, что множество G_r непусто. Тогда имеет место следующая

Лемма 1. *Функция $f_{L,r}$ непрерывна на множестве G_r .*

Доказательство. Фиксируем шар $B(x, r) \Subset G$. Тогда существует такое $\delta_0 \in (0, r/2)$, что $B(x, r + \delta_0) \Subset G$. Пусть $\omega(\delta)$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$, обозначает модуль

непрерывности функции f на шаре $B(x, r + \delta_0)$. Из теоремы В. Г. Мазьи об оценке модуля непрерывности решения задачи Дирихле для уравнения $Lu = 0$ в регулярной граничной точке (см. [23, теорема 1.34]) следует существование непрерывной и неубывающей на отрезке $[0, \delta_0]$ функции $g(\delta)$, которая обладает следующими свойствами: $g(0) = 0$; для всех $d \in [r, r + \delta_0]$, $t_1 \in S(x, d)$ и $t_2 \in B(x, d)$, таких, что $|t_1 - t_2| \leq \delta_0$, выполняется неравенство $|f(t_1) - f_{L,x,d}(t_2)| \leq \omega(|t_1 - t_2|) + g(|t_1 - t_2|)$.

Зафиксируем произвольным образом $\varepsilon > 0$ и выберем такое $\delta \in (0, \delta_0/2)$, чтобы выполнялось неравенство $2\omega(2\delta) + g(2\delta) \leq \varepsilon/4$. Возьмем $\eta_0 > 0$ таким, чтобы любая сфера $S(y, r)$ с центром $y \in B(x, \eta_0)$ попадала в замкнутое кольцо $\overline{B(x, r + \delta)} \setminus B(x, r - \delta)$. Поскольку любая точка этого кольца удалена от сферы $S(x, r + \delta)$ на расстояние, не превосходящее 2δ , то на нем максимум модуля функции $f - f_{L,x,r+\delta}$ не превосходит $\omega(2\delta) + (\omega(2\delta) + g(2\delta)) \leq \varepsilon/4$. По принципу максимума для решений рассматриваемого уравнения отсюда заключаем, что для всех $y \in B(x, \eta_0)$ выполняется неравенство $|f_{L,r}(y) - f_{L,x,r+\delta}(y)| \leq \varepsilon/4$; следовательно, выбирая $\eta \in (0, \eta_0]$ таким, что $\text{osc}_{B(x,\eta)} f_{L,x,r+\delta} \leq \varepsilon/2$, мы при каждом $y \in B(x, \eta)$ имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |f_{L,r}(y) - f_{L,r}(x)| &\leq |f_{L,x,r+\delta}(x) - f_{L,r}(x)| + |f_{L,x,r+\delta}(y) - f_{L,x,r+\delta}(x)| \\ &\quad + |f_{L,x,r+\delta}(y) - f_{L,r}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \text{osc}_{B(x,\eta)} f_{L,x,r+\delta} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

которая и означает непрерывность функции $f_{L,r}$ в точке x .

Лемма 1 доказана. □

Напомним теперь понятия L -гармонической меры и функции Грина для оператора L , играющие ключевую роль в последующих рассуждениях. Мы приводим соответствующие формулировки не в максимальной общности, а для тех случаев, которые нам потребуются в дальнейшем.

Если $B(x, r) \Subset G$, то отображение, каждой функции $f \in C(S(x, r))$ ставящее в соответствие число $f_{L,x,r}(x)$, является непрерывным линейным функционалом на $C(S(x, r))$, который принимает неотрицательные значения на неотрицательных функциях f . Поэтому имеет место представление

$$f_{L,x,r}(x) = \int_{S(x,r)} f(y) d\omega_{L,x,r}(y),$$

где $\omega_{L,x,r}$ — вероятностная борелевская мера на сфере $S(x, r)$. Мы будем называть эту меру L -гармонической мерой на сфере $S(x, r)$. Если L — оператор Лапласа, то L -гармоническая мера называется, как обычно, гармонической и с точностью до постоянного множителя совпадает с $(n - 1)$ -мерной мерой Лебега на сфере $S(x, r)$. В то же время в случае произвольного оператора L $(n - 1)$ -мерная мера Лебега и L -гармоническая мера на сфере $S(x, r)$ не являются абсолютно непрерывными по отношению друг к другу: соответствующие примеры, в которых L — оператор с непрерывными коэффициентами, приведены в работе [24].

В дальнейшем будем считать, что оператор L задан на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, доопределяя, если нужно, его коэффициенты в точках $x \in \mathbb{R}^n \setminus G$ равенствами $a_{ii}(x) = \lambda$, $a_{ij}(x) = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Функцией Грина для оператора L в шаре $B(x_0, r)$ называется функция $G_{L,x_0,r}(x, y)$, определенная на множестве $\{x, y \in B(x_0, r) : x \neq y\}$, которая

непрерывна и положительна на нем и при каждом фиксированном $y_0 \in B(x_0, r)$ удовлетворяет (как функция от x) следующим условиям: (а) $G_{L,x_0,r}(x, y_0) \in W_1^1(B(x_0, r))$, причем в каждой подобласти, полученной из $B(x_0, r)$ выбрасыванием шара $\overline{B}(y_0, \varepsilon) \subset B(x_0, r)$ ($\varepsilon > 0$), все первые обобщенные производные функции $G_{L,x_0,r}(x, y_0)$ суммируемы в квадрате; (b) в каждой граничной точке шара $B(x_0, r)$ функция $G_{L,x_0,r}(x, y_0)$ имеет предельные значения, равные нулю (ниже мы считаем, что функция $G_{L,x_0,r}(x, y_0)$ доопределена нулем при $x \in S(x_0, r)$); (с) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(B(x_0, r))$ справедливо равенство

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{B(x_0,r)} a_{ij}(x) D_i G_{L,x_0,r}(x, y_0) D_j \varphi(x) dx = \varphi(y_0).$$

Известная теорема Литтмана, Стампаккьи и Вайнбергера [25] утверждает, что такая функция $G_{L,x_0,r}$ существует и единственна при любых $x_0 \in \mathbb{R}$ и $r > 0$ и на компактных подмножествах шара $B(x_0, r)$ она слабо эквивалентна функции Грина для оператора Лапласа Δ : для каждого $t \in (0, 1)$ существуют такие $C_1, C_2 > 0$, зависящие только от t , размерности n и постоянных эллиптичности λ и Λ оператора L , что для всех $x, y \in B(x_0, tr)$, $x \neq y$, справедливо двойное неравенство

$$C_1 G_{\Delta,x_0,r}(x, y) \leq G_{L,x_0,r}(x, y) \leq C_2 G_{\Delta,x_0,r}(x, y).$$

Отсюда, в частности, следует, что при $x = y \in B(x_0, r)$ мы можем доопределить функцию $G_{L,x_0,r}$ по непрерывности равенством $G_{L,x_0,r}(x, y) = +\infty$, и в дальнейшем такое доопределение всегда предполагается. При фиксированном $y_0 \in B(x_0, r)$ мы, как обычно, называем функцию $G_{L,x_0,r}(x, y_0)$ функцией Грина для оператора L в шаре $B(x_0, r)$ с полюсом в точке y_0 .

Пусть O обозначает начало координат в $\mathbb{R}^n$. Из определения функции Грина следует, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ функция $G_{L,x_0,r}(x_0 + x, x_0 + y)$, $x, y \in B(O, r)$, совпадает с функцией $G_{L_0,O,r}(x, y)$, а функция $r^{n-2} G_{L,O,r}(rx, ry)$, $x, y \in B(O, 1)$, совпадает с функцией $G_{L_1,O,1}(x, y)$, где операторы L_0 и L_1 заданы соответственно матрицами коэффициентов $\|a_{ij}(x_0 + x)\|$ и $\|a_{ij}(rx)\|$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $i, j = 1, \dots, n$). Поскольку эти операторы имеют те же самые константы эллиптичности, что и L , то из приведенной выше теоремы Литтмана, Стампаккьи и Вайнбергера вытекает, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ имеет место неравенство

$$G_{L,x_0,r}(x, y) \geq Cr^{2-n}, \quad x, y \in B(x_0, r/2), \quad (1)$$

где $C > 0$ зависит только от n , λ и Λ .

Зафиксируем $R > 0$ так, что $G \in B(O, R)$, и положим $g(x, y) := G_{L,O,4R}(x, y)$, $x, y \in B(O, 4R)$. В следующей лемме собраны некоторые нужные нам свойства L -гармонической емкости и функции Грина.

Лемма 2. *Каковы бы ни были точка $y_0 \in B(O, R)$ и шар $B(x_0, r) \in B(O, R)$ ($r > 0$), справедливы следующие утверждения:*

(а) *функция $g(x, y_0)$ суммируема на сфере $S(x_0, r)$ по мере $\omega_{L,x_0,r}$, а интеграл $\int_{S(x_0,r)} g(x, y_0) d\omega_{L,x_0,r}(x)$ ограничен сверху положительной величиной, не зависящей от точек x_0 и y_0 ;*

(b) *имеет место неравенство*

$$g(x_0, y_0) - \int_{S(x_0,r)} g(x, y_0) d\omega_{L,x_0,r}(x) \geq 0;$$

(с) существует такое $C > 0$, зависящее только от оператора L , что при $y_0 \in B(x_0, r/2) \setminus \{x_0\}$ выполняется неравенство

$$g(x_0, y_0) - \int_{S(x_0, r)} g(x, y_0) d\omega_{L, x_0, r}(x) \geq Cr^{2-n}.$$

Доказательство. Поскольку в области $B(O, 4R) \setminus \{y_0\}$ функция $g(x, y_0)$ является обобщенным решением уравнения $Lf = 0$, она в этой области непрерывна и, следовательно, суммируема по L -гармонической мере на любой сфере, лежащей в этой области и не содержащей точку y_0 . Рассмотрим случай $y_0 \in S(x_0, r)$. Возьмем сходящуюся к точке y_0 последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B(O, R) \setminus \overline{B}(x_0, r)$. Тогда функции $g(x, y_k)$, $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, суммируемы по мере $\omega_{L, x_0, r}$ и, поскольку они принадлежат классу $A_L(B(x_0, r))$, справедливы равенства

$$\int_{S(x_0, r)} g(x, y_k) d\omega_{L, x_0, r}(x) = g(x_0, y_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{g(x_0, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $g(x_0, y_0)$, то суммируемость функции $g(x, y_0)$ по мере $\omega_{L, x_0, r}$ и равенство

$$\int_{S(x_0, r)} g(x, y_0) d\omega_{L, x_0, r}(x) = g(x_0, y_0) \quad (2)$$

вытекают из теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Если $y_0 \notin B(x_0, r)$, то справедливо равенство (2) и неравенство

$$\int_{S(x_0, r)} g(x, y_0) d\omega_{L, x_0, r}(x) \leq \sup_{x, y \in B(O, R): |x-y| \geq r} g(x, y), \quad (3)$$

которое, очевидно, выполнено и в случае $x_0 = y_0$. Если же $y_0 \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$, то существует такое $C \geq 1$, зависящее только от n , λ и Λ , что при всех $x \in S(x_0, r)$ имеет место неравенство

$$g(x, y_0) \leq C(g(x, z_0) + g(x, x_0)), \quad (4)$$

где z_0 — точка пересечения прямой, проходящей через x_0 и y_0 , со сферой $S(x_0, r)$. Для случая $L = \Delta$ это следует из явных формул для функции Грина в шаре, общий случай сводится к случаю $L = \Delta$ с помощью теоремы Литтмана, Стампакки и Вайнбергера. Поэтому из (3) и (4) получаем неравенство

$$\int_{S(x_0, r)} g(x, y_0) d\omega_{L, x_0, r}(x) \leq 2C \sup_{x, y \in B(O, R): |x-y| \geq r} g(x, y)$$

($B(x_0, r) \Subset B(O, R)$, $y_0 \in B(O, R)$). Поскольку его правая часть конечна и не зависит от x_0 и y_0 , то мы доказали утверждение (а).

При $y_0 \notin B(x_0, r)$ неравенство в утверждении (б) превращается в равенство. Если же $y_0 \in B(x_0, r)$, то правая часть этого неравенства совпадает с функцией $G_{L, x_0, r}(x, y_0)$ и утверждение (б) следует из положительности функции Грина, а (с) — из (1).

Лемма 2 доказана. $\square$

Доказательство следующей леммы основано на рассуждениях, предложенных в [13]. Она играет ключевую роль при доказательстве достаточности в теореме 1.

Лемма 3. Пусть $0 < \alpha \leq 2$ и $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$. Тогда в шаре $B(O, R)$ существует полунепрерывная снизу положительная функция $h \in L(B(O, R))$, суммируемая по мере $\omega_{L, x_0, r}$ на каждой сфере $S(x_0, r) \subset B(O, R)$, являющаяся обобщенным решением уравнения $Lf = 0$ на множестве $B(O, R) \setminus K$ и такая, что для любой точки $x \in K$ имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \left(h(x) - \int_{S(x, r)} h(y) d\omega_{L, x, r}(y) \right) = +\infty. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ выберем конечное число шаров $B(x_{m,1}, r_{m,1}), \dots, B(x_{m,k_m}, r_{m,k_m})$, таких, что $K \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, r_{m,k}) \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, 2r_{m,k}) \Subset G$ и $\sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{n-2+\alpha} \leq 4^{-m}$. Определим функцию $h(x)$, $x \in B(O, R)$, равенством

$$h(x) := \sum_{m=1}^{\infty} \left(2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{n-2+\alpha} g(x, x_{m,k}) \right), \quad (6)$$

Так как ряд $\sum_{m=1}^{\infty} (2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{n-2+\alpha})$ сходится, $\sup_{y \in B(O, R)} \int_{B(O, R)} g(x, y) dx$ — конечная величина, а каждая из функций $g(x, x_{m,k})$ полунепрерывна снизу в $B(O, R)$, то функция $h(x)$ полунепрерывна снизу в $B(O, R)$ как предел возрастающей последовательности полунепрерывных снизу функций и по теореме Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла Лебега суммируема по мере Лебега в $B(O, R)$. Из теоремы Леви и утверждения (а) леммы 2 также следует интегрируемость функции h по мере $\omega_{L, x_0, r}$ на каждой сфере $S(x_0, r) \subset B(O, R)$. Применяя теорему Литтмана, Стампаки и Вайнбергера, заключаем, что ряд в правой части формулы (6) сходится равномерно на компактных подмножествах открытого множества $B(O, R) \setminus K$ и, следовательно, его сумма $h(x)$ является обобщенным решением уравнения $Lf = 0$ в $B(O, R) \setminus K$.

Докажем последнее утверждение леммы. Пусть $x \in K$. Для каждого натурального m выберем $k \in \{1, \dots, k_m\}$ так, чтобы выполнялось условие $x \in B(x_{m,k}, r_{m,k})$. Тогда, пользуясь утверждениями (b) и (c) леммы 2, имеем соотношения

$$\begin{aligned} & (2r_{m,k})^{-\alpha} \left(h(x) - \int_{S(x, 2r)} h(y) d\omega_{L, x, r}(y) \right) \\ & \geq (2r_{m,k})^{-\alpha} 2^m (r_{m,k})^{n-2+\alpha} \left(g(x, x_{m,k}) - \int_{S(x, 2r)} g(y, x_{m,k}) d\omega_{L, x, r}(y) \right) \\ & \geq C (2r_{m,k})^{-\alpha} 2^m (r_{m,k})^{n-2+\alpha} (2r_{m,k})^{2-n} = C 2^{m-(n-2+\alpha)} \end{aligned}$$

с тем же самым $C > 0$, что и в утверждении (c) леммы 2. При $m \rightarrow \infty$ отсюда получаем (5).

Лемма доказана. □

В доказательстве теоремы 2 будет использована следующая

Лемма 4 (см. [26, с. 86]). Пусть $\phi(t)$ — неотрицательная и неубывающая функция аргумента $t > 0$, $0 < \alpha < \gamma$, и пусть $R_0 > 0$. Кроме того, пусть при

всех $r, R > 0$, $r < R \leq R_0$, выполнено неравенство $\phi(r) \leq AR^\alpha + B(r/R)^\gamma \phi(R)$, где $A, B > 0$. Тогда существует такое $C > 0$, зависящее только от B , α и γ , что при всех $r, R \in (0, R_0]$, $r < R$, имеет место неравенство $\phi(r) \leq C[Ar^\alpha + (r/R)^\alpha \phi(R)]$.

§2. Доказательство теоремы 1

Достаточность доказывается с помощью рассуждений из работы [13].

Пусть $0 < \alpha \leq 2$, $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$, и пусть u — функция из класса $U_L^\alpha(G)$, которая является обобщенным решением уравнения $Lf = 0$ на множестве $G \setminus K$. По лемме 3 существует функция $h \in L(B(O, R))$, удовлетворяющая всем условиям, перечисленным в формулировке этой леммы. Выберем область G_1 так, что $K \subset G_1 \Subset G$ и ее граница ∂G_1 регулярна для уравнения Лапласа. Тогда в замкнутой области $\overline{G}_1$ существует единственная непрерывная функция $w(x)$, определяемая условиями $w \in A_L(G_1)$, $w(x) \equiv u(x)$ на ∂G_1 . Рассмотрим семейство функций $u_\varepsilon(x) := u(x) - w(x) + \varepsilon h(x)$, $x \in \overline{G}_1$, зависящее от вещественного параметра ε . Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда функция u_ε полунепрерывна снизу на $\overline{G}_1$, непрерывна на $\overline{G}_1 \setminus K$, является обобщенным решением уравнения $Lf = 0$ в $G_1 \setminus K$, суммируема по мере $\omega_{L, x_0, r}$ на каждой сфере $S(x_0, r) \subset G_1$ и для любой точки $x \in K$ имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \left(u_\varepsilon(x) - \int_{S(x, r)} u_\varepsilon(y) d\omega_{L, x, r}(y) \right) = +\infty.$$

Отсюда вытекает, что функция u_ε достигает своего минимума на $\overline{G}_1$ в какой-то точке границы области G_1 . С другой стороны, $u_\varepsilon(x) > 0$ для всех $x \in \partial G_1$ и, следовательно, функция u_ε положительна в области G_1 . Предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow +0$ отсюда получаем, что $u_0(x) \geq 0$ для любого $x \in G_1$.

Точно так же устанавливается, что при $\varepsilon < 0$ функция u_ε принимает только отрицательные значения в G_1 , откуда предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow -0$ получаем, что $u_0(x) \leq 0$ для любого $x \in G_1$.

Таким образом, функция u_0 одновременно неотрицательна и неположительна в G_1 . Следовательно, она тождественно равна там нулю и, значит, $u(x) = w(x)$ для любого $x \in G_1$. Так как $w \in A_L(G_1)$, то $u \in A_L(G)$.

Достаточность условия $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$ в теореме 1 доказана. Установим его необходимость.

Пусть $\text{mes}^{n-2+\alpha} K > 0$. В случае $\text{mes}^n K > 0$ можно без уменьшения общности считать, что множество K не содержит внутренних точек (выбрасывая в случае необходимости из K счетное число попарно не пересекающихся открытых шаров так, что сумма их хаусдорфовых мер порядка n меньше, чем $\text{mes}^n K$, и каждая внутренняя точка множества K является предельной для объединения удаляемых шаров). По лемме Фростмана (см. [8]) существует борелевская мера μ с носителем на K , такая, что $\mu(K) > 0$ и

$$\mu(B(x, r)) \leq r^{n-2+\alpha} \quad (7)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Определим функцию

$$u(x) := \int_K g(x, y) d\mu(y), \quad x \in B(O, 4R),$$

и покажем, что $u \in U_L^\alpha(G)$. Фиксируем произвольный шар $B(x_0, 4r) \Subset B(O, R)$ с $r \in (0, 1]$. Пусть $u_1(x) := \int_{K \setminus B(x_0, 2r)} g(x, y) d\mu(y)$ для непустого множества $K \setminus B(x_0, 2r)$, $u_1(x) := 0$ при $K \setminus B(x_0, 2r) = \emptyset$ и $u_2(x) := \int_{B(x_0, 2r)} g(x, y) d\mu(y)$ ($x \in B(O, 4R)$). Тогда $u_1 \in A_L(B(x_0, r))$ и

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) \quad \forall x \in B(O, 4R). \quad (8)$$

Пусть $x \in B(x_0, r)$. Используя (7), явные формулы для функции Грина для оператора Лапласа в шаре с полюсом в его центре, оценку сверху функции Грина для оператора L из теоремы Литтмана, Стампаки и Вайнбергера, включения $B(x_0, 2r) \subset B(x, 3r)$ и $B(O, 4R) \subset B(x, 5R)$ и вытекающее из принципа максимума увеличение значений функции Грина с расширением области, получаем

$$\begin{aligned} |u_2(x)| &= \int_{B(x_0, 2r)} g(x, y) d\mu(y) \leq \int_{B(x, 3r)} g(x, y) d\mu(y) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x, 3r/2^k) \setminus B(x, 3r/2^{k+1})} g(x, y) d\mu(y) \\ &\leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3r}{2^{k+1}} \right)^{2-n} \mu \left(B \left(x, \frac{3r}{2^k} \right) \right) \\ &\leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3r}{2^{k+1}} \right)^{2-n} \left(\frac{3r}{2^k} \right)^{n-2+\alpha} = C_2 r^\alpha, \quad n \geq 3, \\ |u_2(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x, 3r/2^k) \setminus B(x, 3r/2^{k+1})} g(x, y) d\mu(y) \\ &\leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \log \frac{5R2^{k+1}}{3r} \left(\frac{3r}{2^k} \right)^\alpha \\ &\leq C_1 \left(\sup_{t \geq 1} \frac{\log t}{t^{\alpha/2}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5R2^{k+1}}{3r} \right)^{\alpha/2} \left(\frac{3r}{2^k} \right)^\alpha = C_2 r^{\alpha/2}, \quad n = 2. \end{aligned}$$

где положительные величины C_1 и C_2 зависят только от n , λ , Λ и α , а при $n = 2$ — и от R . Из этих оценок и из (8) вытекает, что функция u ограничена сверху в некоторой окрестности компакта K и, поскольку она непрерывна в $B(O, 4R) \setminus K$, величина $\sup_{B(O, R)} u$ конечна. Из приведенных оценок и из (8) также получаем

$$\sup_{B(x_0, r)} |u - u_1| = \sup_{B(x_0, r)} |u_2| \leq C_2 r^{\alpha/2}$$

и при $n \geq 3$

$$\sup_{B(x_0, r)} |u - u_1| \leq C_2 r^\alpha. \quad (9)$$

Поскольку $u_1 \in A_L(B(x_0, 2r))$, по теореме Де Джорджи и Нэша имеем неравенство $\text{osc}_{B(x_0, r^2)} u_1 \leq C(r^2/r)^\gamma \text{osc}_{B(x_0, r)} u_1$, где C не зависит от r . Отсюда для

всех $x \in B(x_0, r^2)$ получаем

$$\begin{aligned}
 |u(x) - u(x_0)| &\leq |u(x) - u_1(x)| + |u_1(x) - u_1(x_0)| + |u_1(x_0) - u(x_0)| \\
 &\leq 2C_2 r^{\alpha/2} + \operatorname{osc}_{B(x_0, r^2)} u_1 \leq 2C_2 r^{\alpha/2} + Cr^\gamma \operatorname{osc}_{B(x_0, r)} u_1 \\
 &\leq 2C_2 r^{\alpha/2} + Cr^\gamma \left(2 \sup_{B(x_0, r)} |u - u_1| + 2 \sup_{B(O, R)} u \right) \\
 &\leq 2C_2 r^{\alpha/2} + Cr^\gamma \left(2C_2 r^{\alpha/2} + 2 \sup_{B(O, R)} u \right).
 \end{aligned}$$

Следовательно, $|u(x) - u(x_0)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Поскольку точка $x_0 \in B(O, R)$ в приведенных рассуждениях выбиралась произвольным образом, тем самым установлена непрерывность потенциала u в шаре $B(O, R)$.

Рассмотрим более подробно случай $n = 2$. Пусть

$$u_3(x) := \int_{B(x_0, 2r)} G_{L, x_0, 4r}(x, y) d\mu(y), \quad x \in B(x_0, 2r).$$

Тогда $u_2 - u_3 \in A_L(B(x_0, 2r))$ и, повторяя проведенные выше рассуждения, основанные на применении теоремы Литтмана, Стампакии и Вайнбергера, для каждого $x \in B(x_0, 2r)$ имеем

$$\begin{aligned}
 u_2(x) - (u_2(x) - u_3(x)) &= u_3(x) = \int_{B(x_0, 2r)} G_{L, x_0, 4r}(x, y) d\mu(y) \\
 &\leq C_1 \int_{B(x_0, 2r)} G_{\Delta, x_0, 4r}(x, y) d\mu(y) \leq C_1 \int_{B(x_0, 2r)} G_{\Delta, x, 6r}(x, y) d\mu(y) \\
 &\leq C_1 \int_{B(x, 4r)} \log \frac{6r}{|x - y|} d\mu(y) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x, 4r/2^k) \setminus B(x, 4r/2^{k+1})} \log \frac{6r}{|x - y|} d\mu(y) \\
 &\leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \log \frac{6r}{4r/2^{k+1}} (4r/2^k)^\alpha \leq C_1 r^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (\log 2^{k+2}) (2^{2-k})^\alpha = C_2 r^\alpha,
 \end{aligned}$$

где положительные величины C_1 и C_2 зависят только от n , λ , Λ и α . Из этих оценок получаем неравенство

$$\|u_2 - (u_2 - u_3)|C(B(x_0, r))\| \leq C_2 r^\alpha. \quad (10)$$

Поскольку $G \in B(O, R)$, найдется такое $r_0 \in (0, 1]$, что для всех $x \in G$ имеет место включение $B(x, 4r_0) \subset B(O, R)$. Отсюда, учитывая (9) и (10), для всех $r \in (0, r_0]$ имеем неравенство

$$\|u - w|C(B(x_0, r))\| \leq C_2 r^\alpha, \quad (11)$$

где $w(x) := u_1(x)$ при $n \geq 3$ и $w(x) := u_1(x) + (u_2(x) - u_3(x))$ при $n = 2$, а C_2 положительно и зависит только от n , λ , Λ и α . Поскольку $w \in A_L(B(x_0, 2r))$, применяя принцип максимума, получаем из (11) неравенство

$$\|u_{L, x_0, r} - w|C(B(x_0, r))\| \leq C_2 r^\alpha. \quad (12)$$

Из (11) и (12), учитывая произвол при выборе x_0 в наших рассуждениях, заключаем, что для каждого шара $B(x_0, r) \subset G$ с $0 < r \leq r_0$ имеет место неравенство

$$\|u - u_{L, x_0, r}|C(B(x_0, r))\| \leq 2C_2 r^\alpha,$$

которое и означает, что $u \in U_L^\alpha(G)$. Поскольку множество K не имеет внутренних точек, функция u не может быть продолжена с $G \setminus K$ на G как обобщенное решение уравнения $Lf = 0$: если бы такое продолжение существовало, то по непрерывности при всех $x \in K$ оно совпадало бы с $u(x)$, но $u \notin A_L(G)$ (см. [25]).

Теорема доказана. $\square$

§3. Доказательство теоремы 2

Как уже отмечалось, включение $C^\alpha(G) \subset U_L^\alpha(G)$ при $0 < \alpha < 1$ следует из принципа максимума для решений уравнения $Lf = 0$. Пусть γ — гёльдеров показатель в приведенной выше формулировке теоремы Де Джорджи и Нэша, и пусть $u \in U_L^\alpha(G)$. Тогда для любой пары концентрических шаров $B(x, r) \subseteq B(x, R) \subseteq G$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{B(x,r)} u &\leq 2 \sup_{B(x,r)} |u - u_{L,x,R}| + \sup_{B(x,r)} u_{L,x,R} \\ &\leq 2AR^\alpha + \sup_{B(x,r)} u_{L,x,R} \leq 2AR^\alpha + C \left(\frac{r}{R} \right)^\gamma \sup_{B(x,R)} u_{L,x,R} \\ &\leq 2AR^\alpha + C \left(\frac{r}{R} \right)^\gamma \left(2AR^\alpha + \sup_{B(x,R)} u \right) \leq 2A(C+1)R^\alpha + C \left(\frac{r}{R} \right)^\gamma \sup_{B(x,R)} u, \end{aligned}$$

где $A, C \geq 0$, A зависит только от функции u и от α , а C — только от n , λ и Λ . Применяя лемму 4, отсюда заключаем, что при $\alpha < \gamma$ функция u принадлежит классу $C^\alpha(G)_{\text{loc}}$.

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типа*, Наука, М., 1971.
- [2] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [3] M. Grüter, K.-O. Widman, *The Green function for uniformly elliptic equations*, Manuscripta Math., **37** (1982), 303–342.
- [4] Е. П. Долженко, *О «стирании» особенностей аналитических функций*, УМН, **18:4** (112) (1963), 135–142.
- [5] L. Carleson, *Removable singularities for continuous harmonic functions in $\mathbb{R}^n$* , Math. Scand., **12** (1963), 15–18.
- [6] Е. П. Долженко, *О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов*, Изв. АН СССР, сер. матем., **28:5** (1964), 1113–1130.
- [7] Е. П. Долженко, *Об особых точках непрерывных гармонических функций*, Изв. АН СССР, сер. матем., **28:6** (1964), 1251–1270.
- [8] Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Мир, М., 1971.
- [9] R. Harvey, J. C. Polking, *Removable singularities of solutions of linear partial differential equations*, Acta Math., **125:1/2** (1970), 39–56.
- [10] J. Kral, *Semielliptic singularities*, Časopis Pěst. Mat., **109** (1984), 304–322.
- [11] Б. Ж. Ищанов, *О представлении решений некоторых классов уравнений в виде потенциалов мер, распределенных на множестве особенностей этих решений*, Докл. РАН, **358:4** (1998), 455–458.

- [12] J. Mateu, J. Orobitg, *Lipschitz approximations by harmonic function*, Indiana Univ. Math. J., **39**:3 (1990), 703–736.
- [13] D. C. Ullrich, *Removable sets for harmonic functions*, Mich. Math. J., **38**:3 (1991), 467–473.
- [14] Н. Н. Тарханов, *Ряд Лорана для решений эллиптических систем*, Наука, Новосибирск, 1991.
- [15] G. David, P. Mattila, *Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane*, Rev. Mat. Iberoamericana, **16** (2000), 137–215.
- [16] А. В. Покровский, *Локальные аппроксимации решениями гипозэллиптических уравнений и устранимые особенности*, Докл. РАН, **367**:1 (1999), 15–17.
- [17] T. Kilpeläinen, X. Zhong, *Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **130**:6 (2002), 1681–1688 (electronic).
- [18] А. В. Покровский, *Устранимые особенности p -гармонических функций*, Дифференциальные уравнения, **41**:7 (2005), 897–907.
- [19] А. В. Покровский, *Устранимые особенности решений уравнения минимальных поверхностей*, Функц. анализ и его прил., **39**:4 (2005), 62–68.
- [20] В. С. Федоров, *Sur la representation des fonctions analitiques au voisinage d'un ensemble de ses points singuliers*, Матем. сб., **35** (1928), 237–250.
- [21] А. В. Покровский, *Устранимые особенности решений дивергентных эллиптических уравнений второго порядка*, Матем. заметки, **77**:3 (2005), 424–433.
- [22] А. В. Покровский, *Классы функций, определяемые с помощью локальных приближений решениями гипозэллиптических уравнений*, Сиб. матем. журн., **47**:2 (2006), 394–413.
- [23] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, *Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 32, ВИНТИ, М., 1988, 99–215.
- [24] L. A. Caffarelli, E. B. Fabes, C. E. Kenig, *Completely singular elliptic-harmonic measures*, Indiana Univ. Math. J., **30**:6 (1981), 917–924.
- [25] W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (III), **17** (1963), 43–77.
- [26] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.