Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ц. Чжан, Ц. Шу, Точные условия глобального существования решений квазилинейного уравнения Шрёдингера, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 2, 68–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:55:01

Точные условия глобального существования решений квазилинейного уравнения Шрёдингера*

© 2008. Цзянь ЧЖАН, Цзи ШУ

§1. Введение

Мы рассматриваем квазилинейные уравнения Шрёдингера вида

$$i\varphi_t = -\Delta\varphi + V(x)\varphi - f(|\varphi|^2)\varphi - k\Delta h(|\varphi|^2)h'(|\varphi|^2)\varphi, \quad (1)$$

получающиеся как модели некоторых физических явлений. Здесь $V = V(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, — заданный потенциал, k — вещественная постоянная, а f и h — вещественные функции. Например, если $h(s) = s$, то получается уравнение

$$i\varphi_t = -\Delta\varphi + V(x)\varphi - f(|\varphi|^2)\varphi - k\Delta h(|\varphi|^2)\varphi, \quad (2)$$

которое Курихара [1] (ср. [2], [3]) назвал уравнением сверхтекучей пленки в физике плазмы. При $h(s) = (1+s)^{1/2}$ уравнение (1) моделирует автоканализацию сверхмощных ультракоротких лазерных импульсов в веществе, см. [4]–[7] и ссылки в [8]. Уравнение (1) появляется также в физике плазмы и механике жидкостей ([1], [2], [9]–[11]), в теории гейзенберговских ферромагнетиков и магнонов ([12]–[16]), в диссипативной квантовой механике [17] и теории конденсированного состояния вещества [18]. В математической литературе результатов об уравнениях вида (1), (2) очень мало. Локальные и глобальные результаты о корректности задачи Коши приводятся в работе [8] для случая $h(s) = (1+s)^{1/2}$ и $N = 1, 2, 3$; случай, когда $h(s) = s$, а $N = 1$, изучен в [3], а случай функций h общего вида рассмотрен в [19] для $N = 1$ и в [20], [21] для произвольной размерности пространства $N \geq 1$. Существование стоячих волн изучалось в [22], [23]. Разрушение и глобальное существование решений исследовалось в [24], [25].

В настоящей работе изучается класс квазилинейных уравнений Шрёдингера вида

$$i\varphi_t = -\Delta\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi - \Delta(|\varphi|^2)\varphi, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N; \quad (3)$$

здесь $\varphi = \varphi(t, x): \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, N — размерность пространства, $i = \sqrt{-1}$, Δ — оператор Лапласа, а p лежит в интервале $(1, (N+2)/(N-2)^+)$, где

$$\frac{N+2}{(N-2)^+} = \begin{cases} (N+2)/(N-2) & \text{при } N \geq 3, \\ \infty & \text{при } N = 1, 2. \end{cases}$$

Уравнение (3) описывает распространение верхнегибридных колебаний в физике ([3], [11]).

*Работа частично поддержана ГФЕН (проекты 10747148 и 10771151) и Научно-исследовательским фондом Департамента образования провинции Сычуань.

Данная статья посвящена изучению точного условия глобального существования решений задачи Коши для уравнения (3). Мы вводим вариационную задачу с перекрестными ограничениями и так называемые инвариантные множества и получаем некоторые новые теоремы о разрушении решений и точный критерий глобального существования или разрушения решений уравнения (3). Такие рассуждения восходят к работам Берестичко и Казенава [26], Вайнштейна [27], Чжана [28], [29], Пэйна и Сэттингера [30], Ливайна [31].

Работа устроена следующим образом. Некоторые предварительные сведения содержатся в §2. В §3 строится вариационная задача с перекрестными ограничениями. В §4 доказывается точное условие разрушения или глобального существования решений.

§2. Предварительные сведения

Зададим начальные данные для уравнения (3) в виде

$$\varphi(0, x) = \varphi_0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

и определим энергетическое пространство формулой

$$H_r^1(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u(x) = u(|x|)\}.$$

Здесь и далее для простоты интеграл $\int_{\mathbb{R}^N} \dots dx$ обозначается через $\int \dots dx$.

Сформулируем две леммы (см. [32], [33]).

Лемма 2.1. Пусть $\varphi_0 \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$, и пусть φ — решение задачи Коши (3)–(4) в пространстве $C([0, T]; H_r^1(\mathbb{R}^N))$. Рассмотрим функционал энергии

$$E(t) = \int \left(|\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla |\varphi|^2|^2 - \frac{2}{p+1} |\varphi|^{p+1} \right) dx.$$

Тогда

$$\int |\varphi|^2 dx = \int |\varphi_0|^2 dx, \quad (5)$$

$$E(t) \equiv E(0). \quad (6)$$

Лемма 2.2. Пусть $\varphi_0 \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$, и пусть φ — решение задачи Коши (3)–(4) в пространстве $C([0, T]; H_r^1(\mathbb{R}^N))$, а $|x|\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Положим $J(t) = \int |x|^2 |\varphi|^2 dx$. Тогда

$$J''(t) = 8 \int \left(|\nabla \varphi|^2 + \frac{N+2}{4} |\nabla |\varphi|^2|^2 - \frac{N(p-1)}{2(p+1)} |\varphi|^{p+1} \right) dx. \quad (7)$$

§3. Вариационная задача с перекрестными ограничениями

Для $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$, $\omega > 0$ зададим функционалы

$$I(u) = \frac{1}{2} \int \left(|\nabla u|^2 + \omega |u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla |u|^2|^2 - \frac{2}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx, \quad (8)$$

$$S(u) = \int \left(|\nabla u|^2 + \omega |u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla |u|^2|^2 - |u|^{p+1} \right) dx, \quad (9)$$

$$Q(u) = \int \left(|\nabla u|^2 + \frac{N+2}{4} |\nabla |u|^2|^2 - \frac{N(p-1)}{2(p+1)} |u|^{p+1} \right) dx \quad (10)$$

и определим множество

$$M := \{u \in H_r^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, S(u) < 0, Q(u) = 0\}.$$

Рассмотрим следующие две вариационные задачи с ограничениями:

$$d_\omega = \inf_{u \in H_r^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, S(u)=0} I(u), \quad (11)$$

$$d_M = \inf_{u \in M} I(u). \quad (12)$$

Прежде всего из (11) получается следующее утверждение.

Лемма 3.1. $d_\omega > 0$.

Доказательство. Поскольку $S(u) = 0$, из теоремы вложения Соболева получаем

$$\begin{aligned} \int |u|^{p+1} dx &\leq c \left(\int (|\nabla u|^2 + \omega |u|^2) dx \right)^{(p+1)/2} \\ &\leq c \left[\int \left(|\nabla u|^2 + \omega |u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla |u|^2|^2 \right) dx \right]^{(p+1)/2} \\ &= c \left(\int |u|^{p+1} dx \right)^{(p+1)/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и далее буква c обозначает различные положительные постоянные. Поскольку $p > 1$, а $u \neq 0$, из неравенства (13) следует, что

$$\int |u|^{p+1} dx \geq c > 0. \quad (14)$$

В силу (11) имеем

$$I(u) = \frac{p-1}{2(p+1)} \int |u|^{p+1} dx. \quad (15)$$

Таким образом, $d_\omega \geq c > 0$. □

Далее, из (12) вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. Если $3 + 4/N < p < (N+2)/(N-2)^+$, то $d_M > 0$.

Доказательство. Пусть $u \in M$. Из неравенства $S(u) < 0$ вытекает, что $u \neq 0$. Так как $Q(u) = 0$, то

$$I(u) = \int \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{N(p-1)} \right) |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \omega |u|^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{N+2}{4N(p-1)} \right) |\nabla |u|^2|^2 \right) dx. \quad (16)$$

Поскольку $3 + 4/N < p < (N+2)/(N-2)^+$, из формулы (16) и соотношения $u \neq 0$ следует, что $I(u) > 0$ для всех $u \in M$. Таким образом, из (12) получаем, что $d_M \geq 0$. Воспользуемся теперь неравенством из теоремы вложения Соболева:

$$\int |u|^{p+1} dx \leq c \left(\int (|\nabla u|^2 + \omega |u|^2) dx \right)^{(p+1)/2}. \quad (17)$$

Здесь и далее буква c по-прежнему обозначает различные положительные постоянные. Так как $S(u) < 0$, то

$$\begin{aligned} \int \left(|\nabla u|^2 + \omega |u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla |u|^2|^2 \right) dx &< \int |u|^{p+1} dx \\ &\leq c \left(\int \left(|\nabla u|^2 + \omega |u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla |u|^2|^2 \right) dx \right)^{(p+1)/2}. \end{aligned}$$

Из неравенства $p > 1$ вытекает, что

$$\int (|\nabla u|^2 + \omega |u|^2 + |x|^2 |u|^2) dx \geq c > 0. \quad (18)$$

Поскольку $p > 3 + 4/N$, из соотношений (16) и (18) следует, что

$$I(u) \geq c > 0 \quad \text{для всех } u \in M.$$

Итак, $d_M > 0$ в задаче (12) при $3 + 4/N < p < (N + 2)/(N - 2)^+$. Лемма доказана. $\square$

Теперь положим

$$d := \min\{d_\omega, d_M\}. \quad (19)$$

Тогда из лемм 3.1 и 3.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.3. *При $3 + 4/N < p < (N + 2)/(N - 2)^+$ имеет место неравенство $d > 0$.*

Замечание 3.4. Мы называем вариационную задачу (12) вариационной задачей с перекрестными ограничениями, ибо в (12) два условия-ограничения. Соответствующее инвариантное многообразие, определяемое ниже, называется перекрестно-инвариантным многообразием.

Теорема 3.5. *Пусть*

$$K := \{\phi \in H_r^1(\mathbb{R}^N), I(\phi) < d, Q(\phi) < 0, S(\phi) < 0\}. \quad (20)$$

Тогда множество K является инвариантным многообразием уравнения (3); а именно, если $\varphi_0 \in K$, то решение $\varphi(t, x)$ задачи Коши (3)–(4) лежит в K для любого $t \in [0, T)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0 \in K$. Существует единственная функция $\varphi(t, x) \in C([0, T]; H_r^1(\mathbb{R}^N))$, где $T < \infty$, такая, что $\varphi(t, x)$ — решение задачи Коши (3)–(4). Из соотношений (5), (6) вытекает, что

$$I(\varphi) = I(\varphi_0), \quad t \in [0, T). \quad (21)$$

Итак, из неравенства $I(\varphi_0) < d$ следует неравенство $I(\varphi) < d$ для любого $t \in [0, T)$.

Покажем теперь, что $S(\varphi) < 0$ при $t \in [0, T)$. Действительно, в противном случае в силу непрерывности существовало бы такое число $t_0 \in [0, T)$, что $S(\varphi(t_0, \cdot)) = 0$. Согласно (21), имеем $\varphi(t_0, x) \neq 0$. Далее, из (11) и (19) следует, что $I(\varphi(t_0, \cdot)) \geq d$. Но это противоречит неравенству $I(\varphi(t, \cdot)) < d$, которое справедливо при $t \in [0, T)$. Следовательно, $S(\varphi(t, \cdot)) < 0$ для всех $t \in [0, T)$.

Докажем, наконец, что $Q(\varphi(t, \cdot)) < 0$ при $t \in [0, T)$. Действительно, иначе в силу непрерывности нашлось бы такое число $t_1 \in [0, T)$, что $Q(\varphi(t_1, \cdot)) = 0$. Мы уже показали, что $S(\varphi(t_1, \cdot)) < 0$, так что $\varphi(t_1, \cdot) \in M$. Итак, из формул (11) и (19) следует, что $I(\varphi(t_1, \cdot)) \geq d_M \geq d$. Но это противоречит неравенству

$I(\varphi(t, \cdot)) < d$, которое выполнено при $t \in [0, T)$. Поэтому $Q(\varphi(t, \cdot)) < 0$ при всех $t \in [0, T)$.

Итак, в силу предыдущего мы доказали, что $\varphi(t, x) \in K$ для любого $t \in [0, T)$. Доказательство теоремы завершено. $\square$

Рассуждая так же, как и в теореме 3.5, можно получить следующие результаты.

Теорема 3.6. *Положим*

$$K_+ := \{\phi \in H_r^1(\mathbb{R}^N), I(\phi) < d, Q(\phi) > 0, S(\phi) < 0\},$$

$$R_- := \{\phi \in H_r^1(\mathbb{R}^N), I(\phi) < d, S(\phi) < 0\},$$

$$R_+ := \{\phi \in H_r^1(\mathbb{R}^N), I(\phi) < d, S(\phi) > 0\}.$$

Тогда K_+ , R_- и R_+ — инвариантные многообразия задачи (3)–(4).

§4. Точные условия глобального существования решений

Теорема 4.1. *Пусть $3 + 4/N < p < (N + 2)/(N - 2)^+$. Если $\varphi_0 \in K_+ \cup R_+$, то решение φ задачи Коши (3)–(4) существует глобально при $t \in [0, \infty)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\varphi_0 \in K_+$. Тогда из теоремы 3.6 вытекает, что для решения φ задачи Коши (3)–(4) справедливо включение $\varphi(t, \cdot) \in K_+$ при $t \in [0, T)$. Для заданного $t \in [0, T)$ положим $\varphi(t, \cdot) = \varphi$. Итак, $I(\varphi) < d$ и $Q(\varphi) > 0$. Из формул (8) и (10) следует, что

$$\int \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{N(p-1)} \right) |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \omega |\varphi|^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{N+2}{4N(p-1)} \right) |\nabla |\varphi|^2|^2 \right) dx < d. \quad (22)$$

Значит,

$$\int |\nabla \varphi|^2 dx < c. \quad (23)$$

Отсюда вытекает, что решение φ существует глобально на интервале $t \in [0, \infty)$.

Итак, мы доказали, что при $\varphi_0 \in K_+$ решение φ задачи Коши (1) существует глобально на интервале $t \in [0, \infty)$.

Пусть теперь $\varphi_0 \in R_+$. Тогда из теоремы 3.6 следует, что для решения φ задачи Коши (1) справедливо включение $\varphi(t, \cdot) \in R_+$ при всех $t \in [0, T)$. Таким образом, $I(\varphi) < d$ и $S(\varphi) > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int \left(|\nabla \varphi|^2 + \omega |\varphi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla |\varphi|^2|^2 \right) dx < d. \quad (24)$$

Следовательно, решение φ существует глобально на интервале $t \in [0, \infty)$.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $3 + 4/N < p < (N + 2)/(N - 2)^+$. Если $\varphi_0 \in K$ и $|x|\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, то решение φ задачи Коши (3)–(4) разрушается за конечное время.*

Доказательство. Поскольку $\varphi_0 \in K$, из теоремы 3.5 вытекает, что для решения φ задачи Коши (3)–(4) при $t \in [0, T)$ справедливо включение $\varphi(t, \cdot) \in K$. Для функции $J(t) = \int |x|^2 |\varphi|^2 dx$ из (7) и (10) вытекает равенство

$$J''(t) = 8Q(\varphi(t, \cdot)), \quad t \in [0, T). \quad (25)$$

Заметим, что так как $Q(\varphi) < 0$, то

$$J''(t) < 0. \quad (26)$$

Очевидно, что функция $J(t)$ не может удовлетворять неравенству (26) для всех t (см. [33]). Поэтому непременно существует такое число $T < \infty$, что

$$\lim_{t \rightarrow T} \|\varphi\|_{H_r^1(\mathbb{R}^N)} = \infty.$$

Теорема доказана. □

Замечание 4.3. Ясно, что

$$\{\phi \in H_r^1(\mathbb{R}^N), I(\phi) < d\} = R_+ \cup K_+ \cup K.$$

Таким образом, теорема 4.2 показывает, что теорема 4.1 не может быть улучшена.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Kurihura, *Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films*, J. Phys. Soc. Japan, **50**:10 (1981), 3262–3267.
- [2] H. Lange, M. Poppenberg, H. Teismann, *Nash–Moser methods for the solution of quasi-linear Schrödinger equations*, Comm. Partial Differential Equations, **24**:7–8 (1999), 1399–1418.
- [3] E. W. Laedke, K. H. Spatschek, L. Stenflo, *Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions*, J. Math. Phys., **24**:12 (1983), 2764–2769.
- [4] А. В. Боровский, А. Л. Галкин, *Динамическая модуляция ультракороткого интенсивного лазерного импульса в веществе*, ЖЭТФ, **104**:10 (1993), 3311–3333.
- [5] H. S. Brandi, C. Manus, G. Mainfray, T. Lehner, G. Bonnaud, *Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma*, Phys. Fluids B, **5** (1993), 3539–3550.
- [6] X. L. Chen, R. N. Sudan, *Necessary and sufficient conditions for self-focusing of short ultraintense laser pulse in underdense plasma*, Phys. Rev. Lett., **70**:14 (1993), 2082–2085.
- [7] B. Ritchie, *Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions*, Phys. Rev. E, **50**:2 (1994), 687–689.
- [8] A. De Bouard, N. Hayashi, J. C. Saut, *Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys., **189**:1 (1997), 73–105.
- [9] А. Г. Литвак, А. М. Сергеев, *Об одномерном коллапсе плазменных волн*, Письма в ЖЭТФ, **27**:10 (1978), 549–553.
- [10] A. Nakamura, *Damping and modification of exciton solitary waves*, J. Phys. Soc. Japan, **42**:6 (1977), 1824–1835.
- [11] M. Porkolab, M. V. Goddman, *Upper-hybrid solitons and oscillating-two-stream instabilities*, Phys. Fluids, **19**:6 (1976), 872–881.
- [12] F. G. Bass, N. N. Nasanov, *Nonlinear electromagnetic spin waves*, Phys. Rep., **189**:4 (1990), 165–223.
- [13] A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, A. S. Kovalev, *Magnetic solitons*, Phys. Rep., **194**:3–4 (1990), 117–238.
- [14] H. Lange, B. Toomire, P. E. Zweifel, *Time-dependent dissipation in nonlinear Schrödinger systems*, J. Math. Phys., **36**:3 (1995), 1274–1283.
- [15] G. R. W. Quispel, H. W. Capel, *Equation of motion for the Heisenberg spin chain*, Physica A, **110**:1–2 (1982), 41–80.
- [16] S. Takeno, S. Homma, *Classical planar Heisenberg ferromagnet, complex scalar fields and nonlinear excitations*, Progr. Theoret. Phys., **65**:1 (1981), 172–189.

- [17] R. W. Hasse, *A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations*, Z. Phys. B, **37**:1 (1980), 83–87.
- [18] V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin, *Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory*, Phys. Rep., **104**:1 (1984), 1–86.
- [19] M. Poppenberg, *Smooth solutions for a class of fully nonlinear Schrödinger type equations*, Nonlinear Anal., **45**:6 (2001), 723–741.
- [20] M. Poppenberg, *On the local well posedness of quasi-linear Schrödinger equations in arbitrary space dimension*, J. Differential Equations, **172**:1 (2001), 83–115.
- [21] M. Poppenberg, *An inverse function theorem in Sobolev spaces and applications to quasi-linear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl., **258**:1 (2001), 146–170.
- [22] M. Poppenberg, K. Schmitt, Z. Q. Wang, *On the existence of soliton solutions to quasi-linear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **14**:3 (2002), 329–344.
- [23] J. Q. Liu, Y. Q. Wang, Z. Q. Wang, *Soliton solutions for quasi-linear Schrödinger equations II*, J. Differential Equations, **187**:2 (2003), 473–493.
- [24] J. J. García-Ripoll, V. V. Konotop, B. Malomed, V. M. Pérez-García, *A quasi-local Gross-Pitaevskii equation for attractive Bose-Einstein condensates*, Math. Comput. Simulation, **62**:1–2 (2003), 21–30.
- [25] J. Zhang, *The blowup properties of the initial-boundary problem for second order derivative nonlinear Schrödinger equations*, Acta Math. Sci., **14** (1994), 89–94.
- [26] H. Berestycki, T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, Seire I, **293** (1981), 489–492.
- [27] M. I. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolations estimates*, Comm. Math. Phys., **87** (1983), 567–576.
- [28] J. Zhang, *Sharp conditions of global existence for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations*, Nonlinear Anal., **48**:2 (2002), 191–207.
- [29] J. Zhang, *Sharp threshold of blowup and global existence in nonlinear Schrödinger equations under a harmonic potential*, Comm. Partial Differential Equations, **30**:10–12 (2005), 1429–1443.
- [30] L. E. Payne, D. H. Sattinger, *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations*, Israel J. Math., **22**:3–4 (1975), 273–303.
- [31] H. A. Levine, *Instability and non-existence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$* , Trans. Amer. Math. Soc, **192** (1974), 1–21.
- [32] T. Cazenave, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, Textos de Metodos Mathematicos, Rio de Janeiro, vol. 26, 1993.
- [33] Y. Tsutsumi, J. Zhang, *Instability of optical solitons for two-wave interaction model in cubic nonlinear media*, Adv. Math. Sci. Appl., **8**:2 (1998), 691–713.

Ведущая лаборатория компьютерных программ
провинции Сычуань Сычуаньского нормального
университета

Колледж математики и программирования
Сычуаньского нормального университета

Колледж математики и программирования
Сычуаньского нормального университета

Ведущая лаборатория компьютерных программ
провинции Сычуань Сычуаньского нормального
университета

e-mails: shu.ji@163.com; shuji2008@hotmail.com

Поступило в редакцию
7 декабря 2005 г.

В переработанном виде
23 декабря 2007 г.