Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Андреев, Квазивейлевские асимптотики спектра векторной задачи Дирихле, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 2, 75–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:27:30

Квазивейлевские асимптотики спектра векторной задачи Дирихле

© 2008. А. С. АНДРЕЕВ

Отказ от условия гипоеллиптичности дифференциального оператора (ДО) приводит, вообще говоря, к нарушению классической спектральной асимптотики Вейля (о работах, относящихся к формуле Вейля, см. [1]). Для некоторых неэллиптических ДО задачи Дирихле получены естественные обобщения формулы Вейля — квазивейлевские асимптотики [2]. В настоящей статье приводится аналогичный результат для спектра ДО с постоянными коэффициентами в пространстве вектор-функций.

Автор искренне благодарен рецензенту за полезные замечания.

1. Обозначения: $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{E}^m$, $\mathbb{E}_h^m = \{\xi \in \mathbb{E}^m : \xi_j \geq h \text{ для любого } j\}$ ($h \geq 0$). Для множества $W \subset \mathbb{E}^m$ через $W^{j_1 \dots j_s}$ обозначается его проекция на плоскость, заданную уравнениями $\xi_{j_1} = \dots = \xi_{j_s} = 0$ ($1 \leq s \leq m-1$). Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ положим $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$. Всюду далее Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^m$, причем $\text{mes}_m(\partial\Omega) = 0$. Через $u = (u_1, \dots, u_n)$ обозначаются вектор-функции со значениями в $\mathbb{C}^n$ ($n < \infty$). Классы $C_0^\infty(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ вектор-функций определяются стандартным образом; $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

2. Пусть $a_{\alpha jk}$, p_{jk} — постоянные, $j, k = 1, \dots, n$, $|\alpha| \leq l < \infty$, причем $a_{\alpha jk} = \overline{a_{\alpha k j}}$, $p_{jk} = \overline{p_{k j}}$ для любых α, j, k ,

$$A_{jk} = \sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha jk} D^{2\alpha}, \quad a_{jk}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha jk} \xi^{2\alpha} \quad (\xi \in \mathbb{E}^m),$$

$A = (A_{jk})$ и $\mathcal{A}(\xi) = (a_{jk}(\xi))$ — символ матричного ДО A . Положим $\mathcal{P} = (p_{jk})$. Наименьшее из собственных чисел матрицы $\mathcal{A}(\xi)$ обозначим через $a(\xi)$. Введем следующие условия:

$$a(\xi) \geq c_0(a, h) > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{E}_h^m \quad (h \geq 0), \quad (1)$$

$$a(\xi) \rightarrow \infty, \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \xi \in \mathbb{E}_h^m \quad (h \geq 0). \quad (2)$$

Множество всех h ($h \geq 0$), для которых выполнено условие (1), обозначим через M_1 , и пусть $h_1(a) = \inf M_1$; через M_2 обозначим множество всех h ($h \geq 0$), для которых выполнены условия (1), (2), и пусть $h_2(a) = \inf M_2$. Далее, $b_j(\xi)$ — корни уравнения $\det(b\mathcal{A}(\xi) - \mathcal{P}) = 0$, $\xi \in \mathbb{E}_h^m$, $h > h_2(a)$, $b_{j+1}(\xi) \geq b_j(\xi)$,

$j = 1, \dots, n-1$. Для $\mu > 0$, $h > h_2(a)$

$$W(\mu|h) = \{\xi \in \mathbb{E}_h^m : a(\xi) < \mu^{-1}\}, \quad w(\mu|h) = \text{mes}_m W(\mu|h),$$

$$r(\mu|h) = \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{j_1 \dots j_s} \text{mes}_{m-s} W^{j_1 \dots j_s}(\mu|h), \quad w_{\pm}(\mu|h) = \sum_{j=1}^n \text{mes}_m \{\xi \in \mathbb{E}_h^m : \pm b_j(\xi) > \mu\}.$$

Основным для дальнейшего является условие

$$\lim r(\mu|h)/w(\mu|h) = 0, \quad \mu \rightarrow +0 \quad (h > h_2(a)). \quad (3)$$

Множество всех h , для которых выполнены условия (1), (2), (3), обозначим через M_3 , $h_3(a) = \inf M_3$. Множества M_i ($i = 1, 2, 3$) связны. В случае $M_i = \emptyset$ будем писать $h_i(a) = \infty$. Наконец, положим $d(\Omega) = \sup_j \sup_{x,y} |x_j - y_j|$, $x, y \in \Omega$, $j = 1, \dots, m$. В формулировках теорем $d = d(\Omega)$, $h_i = h_i(a)$.

3. Теорема 1. (а) Пусть $h_1 < \infty$, $d < \pi h_1^{-1}$ (если $h_1 = 0$, то $d < \infty$). Тогда $(Au, u) \geq c\|u\|^2$, $c = c(a, d) > 0$, для любой вектор-функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике $(Au, u)^{1/2}$ есть пространство функций $H(\Omega)$.

(б) Пусть $h_2 < \infty$, $d < \pi h_2^{-1}$ (если $h_2 = 0$, то $d < \infty$). Тогда вложение $H(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ компактно.

Если $d \geq \pi h_1^{-1}$, то квадратичная форма (Au, u) , вообще говоря, теряет положительность. При этом задача утрачивает смысл.

В условиях п. (б) теоремы 1 квадратичной форме $(\mathcal{P}u, u)$ в пространстве $H(\Omega)$ соответствует компактный самосопряженный оператор T . Положительные (отрицательные) собственные значения μ_s^+ (μ_s^-) оператора T суть последовательные максимумы (минимумы) отношения квадратичных форм $(\mathcal{P}u, u)/(Au, u)$, $u \in H(\Omega)$ ($\pm \mu_{s+1}^\pm \leq \pm \mu_s^\pm$, $s = 1, 2, \dots$).

Пусть $N_\pm(\mu) = \text{card}\{\mu_s^\pm : \pm \mu_s^\pm > \mu\}$, $\mu > 0$, — функции распределения спектра оператора T .

Теорема 2. Пусть $h_3 < \infty$, $d < \pi h_3^{-1}$ (если $h_3 = 0$, то $d < \infty$), $\mu \in (0, \mu_0)$, $\mu_0 = \mu_0(\mathcal{A}, \mathcal{P}) > 0$. Тогда при $\mu \rightarrow +0$

$$N_+(\mu) = \pi^{-m} \left(\text{mes}_m \Omega \right) w_+(\mu|h) + o(1)w(\mu|h), \quad h > h_3, \quad (4)$$

$$N_-(\mu) = \pi^{-m} \left(\text{mes}_m \Omega \right) w_-(\mu|h) + o(1)w(\mu|h), \quad h > h_3. \quad (5)$$

4. Функция $N_+(\mu)$ ($N_-(\mu)$) имеет квазивейлевскую асимптотику [2], если $N_+(\mu) \sim (\text{mes}_m \Omega) \varphi_+(\mu)$, $\mu \rightarrow +0$ ($N_-(\mu) \sim (\text{mes}_m \Omega) \varphi_-(\mu)$), где функции φ_+ , φ_- не зависят от Ω .

Введем следующие условия:

$$w_+(\mu|h) \geq c_+ w(\mu|h), \quad c_+ = c_+(\mathcal{A}, \mathcal{P}, h) > 0, \quad (6)$$

$$w_-(\mu|h) \geq c_- w(\mu|h), \quad c_- = c_-(\mathcal{A}, \mathcal{P}, h) > 0, \quad (7)$$

для любых $h > h_2$, $\mu \in (0, \mu_0)$. При условии (6) (или (7)) формула (4) (или (5)) выделяет квазивейлевскую асимптотику для $N_+(\mu)$ ($N_-(\mu)$):

$$N_+(\mu) \sim \pi^{-m} \left(\text{mes}_m \Omega \right) w_+(\mu|h), \quad \mu \rightarrow +0, \quad (8)$$

$$N_-(\mu) \sim \pi^{-m} \left(\text{mes}_m \Omega \right) w_-(\mu|h), \quad \mu \rightarrow +0. \quad (9)$$

Значение h ($h > h_3$) в формулах (8), (9) не существенно.

Выделим класс ДО следующим условием: для $a = a(\xi)$, $\xi \in \mathbb{E}^m$,

$$C_1 \sum_{\alpha} \xi^{2\alpha} \leq a(\xi) \leq C_2 \sum_{\alpha} \xi^{2\alpha}, \quad \alpha \in \Lambda, \quad C_i = C_i(a) > 0, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где Λ — какое-либо множество мультииндексов, $1 \leq \text{card } \Lambda < \infty$. Если выполнено условие (10), то $h_1 = 0$, h_2 равно 0 или ∞ и h_3 равно 0 или ∞ . Величина $d(\Omega)$ не существенна.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (10), причем $h_2 = 0$, а также (6) (или (7)). Для того чтобы функция $N_+(\mu)$ (или $N_-(\mu)$) имела квазивейлевскую асимптотику, необходимо и достаточно, чтобы условие (3) было выполнено для любого $h > 0$ (т.е. чтобы $h_3 = 0$).

5. Примеры. Предварительно отметим, что формула Вейля предписывает для функций распределения спектра следующие асимптотики: $N_{\pm}(\mu) \sim \Psi_{\pm}(\mu)$, $\mu \rightarrow +0$, где

$$\Psi_{\pm}(\mu) = (2\pi)^{-m} \sum_{j=1}^m \text{mes}_m \{ \xi \in \mathbb{E}^m : \pm b_j(\xi) > \mu \}. \quad (11)$$

Ограничимся случаем $n = 2$. ДО задается символом $\mathcal{A} = (a_{jk})$.

(a) $m = 2$, $a_{11} = a_{22} = 2\xi_1^2\xi_2^2$, $a_{12} = a_{21} = 2^{-1}\xi_1^2$. Здесь $a(\xi) = 2\xi_1^2(\xi_2^2 - 4^{-1})$, $h_1 = h_2 = 2^{-1}$. Для $h > 2$ имеем $w(\mu|h) \asymp \mu^{-1/2} |\ln \mu|$, $r(\mu|h) \asymp \mu^{-1/2}$, $h_3 = 0$. Положим $C_{\pm} = 2^{-3/2}((\pm \text{Tr } \mathcal{P} + ((\text{Tr } \mathcal{P})^2 - 4 \det \mathcal{P})^{1/2})_{(+)}^{1/2} + (\pm \text{Tr } \mathcal{P} - ((\text{Tr } \mathcal{P})^2 - 4 \det \mathcal{P})^{1/2})_{(+)}^{1/2})$ ($t_{(+)} = 2^{-1}(|t| + t)$). Если $d(\Omega) < 2\pi$, $C_+ > 0$ ($C_- > 0$), то $N_+(\mu) \sim \pi^{-2}(\text{mes}_2 \Omega) C_+ \mu^{-1/4} |\ln \mu|$ ($N_-(\mu) \sim \pi^{-2}(\text{mes}_2 \Omega) C_- \mu^{-1/4} |\ln \mu|$). Асимптотика (11) не имеет смысла: $\Psi_{\pm}(\mu) = \infty$. Если Ω — куб, $d(\Omega) \geq 2\pi$, задача утрачивает смысл, так как квадратичная форма (Au, u) не является положительно определенной.

(b) $m = 3$, $a_{11} = (\xi_1\xi_2\xi_3)^4 + |\xi|^2$, $a_{22} = 2a_{11}$, $a_{12} = a_{21} = \xi_1^2 - \xi_2^2$. Здесь $a(\xi) = 3 \cdot 2^{-1}(((\xi_1\xi_2\xi_3)^4 + |\xi|^2) - 2^{-1}(((\xi_1\xi_2\xi_3)^4 + |\xi|^2)^2 + 4(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2)^{1/2})$. Для $a(\xi)$ выполнено условие (10): $\Lambda = \{(2, 2, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $h_1 = h_2 = 0$. Для $h > 0$ имеем $w(\mu|h) \asymp \mu^{-1/4} \ln^2 \mu$, $r(\mu|h) \asymp \mu^{-1/4} |\ln \mu|$, $h_3 = 0$. Положим $C_{\pm}^* = 2^{-11/2}((\pm \text{Tr } \mathcal{P} \pm p_{11} + ((\text{Tr } \mathcal{P} + p_{11})^2 - 4 \det \mathcal{P})^{1/2})_{(+)}^{1/4} + (\pm \text{Tr } \mathcal{P} \pm p_{11} - ((\text{Tr } \mathcal{P} + p_{11})^2 - 4 \det \mathcal{P})^{1/2})_{(+)}^{1/4})$. Если $d(\Omega) < \infty$, $C_+^* > 0$ ($C_-^* > 0$), то $N_+(\mu) \sim \pi^{-3}(\text{mes}_3 \Omega) C_+^* \mu^{-1/4} \ln^2 \mu$ ($N_-(\mu) \sim \pi^{-3}(\text{mes}_3 \Omega) C_-^* \mu^{-1/4} \ln^2 \mu$). Асимптотика (11) не имеет места: $\Psi_{\pm}(\mu) \sim 4N_{\pm}(\mu)$.

(c) $m = 2$, $a_{11} = a_{22} = \xi_1^4\xi_2^2 + |\xi|^2$, $a_{12} = a_{21} = |\xi|^2$. Здесь $a(\xi) = \xi_1^4\xi_2^2$, $h_1 = h_2 = 0$. Для $h > 0$ имеем $w(\mu|h) \asymp r(\mu|h) \asymp \mu^{-1/2}$; условие (3) не выполнено ($h_3 = \infty$). Спектр задачи дискретен, но не имеет квазивейлевской асимптотики (теоремы 1, 3).

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 14, ВИНТИ, М., 1977, 5–58. [2] А. С. Андреев, Матем. сб., **197:2** (2006), 17–34.

Военно-морской институт радиоэлектроники
им. А. С. Попова

Поступило в редакцию
13 июня 2006 г.

УДК 517.982.27

Обобщенное неравенство Хинчина в симметричных пространствах

© 2008. С. В. АСТАШКИН

1. Введение. Пусть $r_k(t) = \text{sign} \sin 2^k \pi t$ ($k = 1, 2, \dots$) — функции Радемахера, рассматриваемые на отрезке $[0, 1]$. Согласно классическому неравенству Хинчина [1], для любого $p > 0$ существует константа $C_p > 0$, такая, что для произвольных вещественных a_k ($k = 1, 2, \dots$) выполнено неравенство $\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\|_{L_p} \leq C_p (\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2)^{1/2}$.

Это соотношение вызвало большое количество исследований и обобщений, нашло многочисленные применения в различных разделах анализа [2]. В частности, в 1975 г. Родин и Семенов [3] доказали, что в случае симметричных пространств (с.п.) X на $[0, 1]$ неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \quad (1)$$

имеет место тогда и только тогда, когда X содержит G , где G — сепарабельная часть пространства Орлича L_{N_2} , построенного по функции $N_2(u) = e^{u^2} - 1$. В этой работе будет дано решение аналогичной задачи в случае, когда вместо скалярных кратных функций Радемахера рассматриваются произвольные независимые функции, в среднем равные нулю. Точнее, будет дан ответ на вопрос, для каких с.п. X существует $C > 0$, такое, что для всех последовательностей независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, удовлетворяющих условиям $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и $(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2)^{1/2} \in X$, выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \quad (2)$$

Заметим, что если класс последовательностей независимых функций, в среднем равных нулю, заменить на более обширный класс мартингаловых разностей, то ответ на этот вопрос известен: необходимое и достаточное условие на X состоит в положительности нижнего индекса Бойда этого пространства, т. е. $\alpha_X > 0$ [4].

В нашей ситуации центральная роль будет принадлежать так называемому свойству Круглова, введенному и интенсивно изучавшемуся Браверманом [5]. Основной результат этой заметки (теорема 1) в терминах этого свойства дает