Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Воробьев, Препятствия к эквивалентности пуассоновых структур вблизи симплектического листа полупростого и компактного типа, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 2, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2906>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:21:34

Замечание 3. Утверждение теоремы 2 интересно сопоставить с двумя известными результатами. Первый из них утверждает, что в любом сепарабельном или максимальном с.п. X эквивалентны следующие условия: (i) существует $C > 0$, такое, что для произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ выполнено неравенство (4) и (ii) $\alpha_X > 0$ (импликация (ii) $\implies$ (i) доказана в [8, предложение 2.d.1], а (i) $\implies$ (ii) — в [11]). Второй (неравенство Морэ) говорит о том, что если X есть q -вогнутая банахова решетка [8, определение 1.d.3] при некотором $q < \infty$, то существует $C > 0$, такое, что (5) выполнено для произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ [8, теорема 1.d.6(i)]. Заметим, что, с одной стороны, в обоих утверждениях коэффициенты ряда — произвольные функции, с другой — условия выполнения неравенств (4) и (5) в них гораздо более ограничительные, чем условие (α) .

Замечание 4. При доказательстве результатов заметки был использован операторный подход к изучению свойства Круглова, развитый в работах [12], [13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Khintchine, Math. Z., **18** (1923), 109–116. [2] Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, УМН, **50:5** (1995), 3–62. [3] V. A. Rodin, E. M. Semenov, Anal. Math., **1:3** (1975), 207–222. [4] W. B. Johnson, G. Schechtman, Israel J. Math., **64:3** (1988), 267–275. [5] M. Sh. Braverman, *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994. [6] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978. [7] W. B. Johnson, G. Schechtman, Ann. Probab., **17:2** (1989), 789–808. [8] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II. Function spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979. [9] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston, 1988. [10] В. М. Круглов, ТВП, **15:2** (1970), 331–336. [11] С. В. Асташкин, М. Ш. Браверман, в кн.: Операторные уравнения в функциональных пространствах, Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986, 3–10. [12] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, Матем. заметки, **76:4** (2004), 483–489. [13] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, Israel J. Math., **145** (2005), 125–156.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
25 октября 2006 г.

УДК 514.76

Препятствия к эквивалентности пуассоновых структур вблизи симплектического листа полупростого и компактного типа

© 2008. Ю. М. ВОРОБЬЕВ

В настоящей заметке мы формулируем необходимые и достаточные условия для существования изоморфизма пуассоновых структур в окрестности симплектического листа полупростого и компактного типа. В частности, показано,

что существуют когомологические препятствия к пуассоновой эквивалентности. Эти результаты базируются на геометрической теории пуассоновых структур спаривания [1]–[3] и известных результатах о линейаризации пуассоновых структур [4].

1. Пусть задано пуассоново многообразие (M, Ψ) , состоящее из гладкого многообразия M и тензора Пуассона $\Psi \in \chi^2(M)$. Соответствующая скобка Пуассона задается формулой $\{f, g\}_\Psi = \Psi(df, dg)$. Предположим, что задан вложенный симплектический лист $B \subset M$. Пусть $E = T_B M / TB$ — нормальное расслоение. Обозначим через $\nu: T_B M \rightarrow E$ естественную проекцию и через $\tau: T_B E \rightarrow E$ проекцию вдоль TB относительно канонического разложения $T_B E = TB \oplus E$. Под экспоненциальным отображением мы понимаем диффеоморфизм $\mathbf{f}: N_1 \rightarrow N_2$ между двумя окрестностями N_1 и N_2 подмногообразия B в E и M соответственно, удовлетворяющий условиям $\mathbf{f}|_B = \text{id}_B$ и $\nu \circ d_B \mathbf{f} = \tau$. Пусть $E^* = \text{Ann}(TB)$ — конормальное расслоение. Известно [5], что пуассонова структура Ψ индуцирует на каждом слое E_b^* скобку Ли, гладко зависящую от $b \in B$. Кроме того, E^* является локально тривиальным расслоением алгебр Ли с типичным слоем $\mathfrak{g}$, называемым *алгеброй изотропии листа B* . Послойную структуру алгебры Ли на E^* обозначим через $[\cdot, \cdot]_\Psi$. Соответственно нормальное расслоение E наделяется послойной структурой Ли–Пуассона, называемой *линейаризованной трансверсальной пуассоновой структурой листа B* [5].

Предположим, что алгебра изотропии $\mathfrak{g}$ *полупроста и компактна* (эквивалентно, форма Киллинга отрицательно определена). В этом случае мы говорим, что B является *симплектическим листом полупростого и компактного типа*.

Локальную координатную систему $(\xi, x) = (\xi^i, x^\alpha)$ на тотальном пространстве E , отвечающую некоторой тривиализации нормального расслоения, будем называть допустимой. Здесь (ξ^i) — координаты на B и (x^α) — координаты вдоль слоев E_b .

Предложение 1. *Существует экспоненциальное отображение $\mathbf{f}: N_1 \rightarrow N_2$, такое, что скобка Пуассона, соответствующая поднятому тензору Пуассона $\Pi = \mathbf{f}^* \Psi$, относительно произвольной допустимой системы координат на E задается соотношениями*

$$\{\xi^i, \xi^j\}_\Pi = -F^{ij}(\xi, x), \quad (1)$$

$$\{\xi^i, x^\sigma\}_\Pi = F^{is}(\xi, x) \Gamma_s^\sigma(\xi, x), \quad (2)$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_\Pi = \lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\xi) x^\gamma - \Gamma_i^\alpha(\xi, x) F^{ij}(\xi, x) \Gamma_j^\beta(\xi, x), \quad (3)$$

где $\det(F^{ij}(\xi, x)) \neq 0$.

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Доказательство основано на комбинации техники, развитой в [1]–[3], и результатах работы [4].

Фиксируем экспоненциальное отображение $\mathbf{f}$ из предложения 1. Выбирая открытые окрестности N_1 локальными тривиализациями, мы получаем, что наборы локальных функций в (1)–(3) определяют следующие «полулокальные» объекты на N_1 :

- (i) форму связности $\Gamma = (dx^\alpha + \Gamma_i^\alpha(\xi, x) d\xi^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$;
- (ii) горизонтальную 2-форму $F = \frac{1}{2} F_{ij}(\xi, x) d\xi^i \wedge d\xi^j$ ($F^{is} F_{sj} = \delta_j^i$);
- (iii) вертикальный тензор Пуассона $\Lambda = \frac{1}{2} \lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\xi) x^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\beta}$.

На самом деле бивекторное поле Λ корректно определено на всем тотальном пространстве E и не зависит от выбора $\mathbf{f}$. Кроме того, Λ задает линейризованную трансверсальную пуассонову структуру, т.е. ограничение поля Λ на E_b совпадает со структурой Ли–Пуассона слоя. Далее, имеется разложение $TE = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}$, где $\mathbb{H} = \ker \Gamma$ и $\mathbb{V}$ — горизонтальное и вертикальное подрасслоения соответственно. Контравариантные тензорные поля на E , касательные к $\mathbb{H}$, называются горизонтальными. Данные (Γ, F, Λ) связаны условиями интегрируемости [1], которые вытекают из тождества Якоби для Π . В частности, связность Γ согласована с Λ в следующем смысле: горизонтальный лифт $\text{hor}^\Gamma(u)$ каждого векторного поля $u \in \mathcal{X}(B)$ относительно Γ является инфинитезимальным пуассоновым автоморфизмом для Λ , $L_{\text{hor}^\Gamma(u)}\Lambda = 0$. Заметим, что ограничение $\omega = F|_B$ задает симплектическую структуру листа B . Соотношения (1)–(3) влекут за собой представление $\Pi = \Pi_H + \Lambda$, где $\Pi_H = -\frac{1}{2}F^{ij}(\xi, x)\text{hor}_i^\Gamma \wedge \text{hor}_j^\Gamma$ — горизонтальное бивекторное поле. Здесь

$$\text{hor}_i^\Gamma = \text{hor}^\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \Gamma_i^\nu(\xi, x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (i = 1, \dots, \dim B).$$

2. Рассмотрим пространство $\text{Casim}_B(\Lambda)$ всех функций Казимира пуассоновой структуры Λ , обращающихся в нуль на B . Обозначим через $\mathfrak{F}^k$ пространство ростков на B горизонтальных k -форм η следующего вида:

$$\eta = \frac{1}{k!} \eta_{i_1 \dots i_k}(\xi, x) d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_k},$$

где $\eta_{i_1 \dots i_k} \in \text{Casim}_B(\Lambda)$. Тогда существует кограничный оператор $\partial: \mathfrak{F}^k \rightarrow \mathfrak{F}^{k+1}$, который в терминах связности Γ задается выражением

$$(\partial\eta)_{i_0 i_1 \dots i_k} = \sum_s (-1)^s L_{\text{hor}_s^\Gamma} \eta_{i_0 \dots \hat{i}_s \dots i_k}.$$

Условие кограничности $\partial^2 = 0$ является следствием такого свойства [1]: форма кривизны связности Γ принимает значения в пространстве вертикальных гамильтоновых векторных полей пуассоновой структуры Λ . При изменении экспоненциального отображения $\mathbf{f}$ связность Γ тоже меняется по определенному закону [2]. Но в силу предположения о полупростоте и компактности оператор ∂ не зависит от выбора $\mathbf{f}$ и является характеристикой только линейризованной трансверсальной структуры Λ . Таким образом, в формуле для ∂ вместо Γ можно взять произвольную связность, согласованную с Λ .

3. Пусть задана вторая пуассонова структура $\tilde{\Psi}$ на M , для которой B также является симплектическим листом с той же самой симплектической структурой ω . Сделаем следующее предположение: расслоения алгебр Ли $(E^*, [\cdot, \cdot]_\Psi)$ и $(E^*, [\cdot, \cdot]_{\tilde{\Psi}})$ над B , отвечающие пуассоновым структурам Ψ и $\tilde{\Psi}$, изоморфны. Пусть $\tilde{\Lambda}$ — линейризованная трансверсальная пуассонова структура для $(\tilde{\Psi}, B)$. Фиксируем такое расслаивающее над B отображение $\mathbf{g}: E \rightarrow E$, что ограничение $\mathbf{g}_b = \mathbf{g}|_{E_b}$ на каждый слой является линейным пуассоновым изоморфизмом $\mathbf{g}_b^* \tilde{\Lambda}_b = \Lambda_b$. Тогда в силу предложения 1 можно выбрать экспоненциальные отображения $\mathbf{f}: N_1 \rightarrow N_2$ и $\tilde{\mathbf{f}}: N_1 \rightarrow \tilde{N}_2$ так, чтобы

$$\Pi = \mathbf{f}^* \Psi = \Pi_H + \Lambda, \quad \tilde{\Pi} = (\tilde{\mathbf{f}} \circ \mathbf{g})^* \tilde{\Psi} = \tilde{\Pi}_H + \Lambda. \quad (4)$$

Пусть (Γ, F, Λ) и $(\tilde{\Gamma}, \tilde{F}, \Lambda)$ — данные, соответствующие тензорам Пуассона Π и $\tilde{\Pi}$. Существует горизонтальная 1-форма $Q = Q_i(\xi, x)d\xi^i$, такая, что $\text{hor}_i^{\tilde{\Gamma}} - \text{hor}_i^{\Gamma} = \Lambda^{\sharp} dQ_i$ для $i = 1, \dots, \dim B$ (здесь $\Lambda^{\sharp}: T^*E \rightarrow TE$ — морфизм векторных расслоений, индуцированный тензорным полем Λ). Введем горизонтальную 2-форму $C = \frac{1}{2}C_{ij}(\xi, x)d\xi^i \wedge d\xi^j$, где коэффициенты C_{ij} задаются соотношениями

$$C_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{ij} - F_{ij} + L_{\text{hor}_i^{\Gamma}} Q_j - L_{\text{hor}_j^{\Gamma}} Q_i + \{Q_i, Q_j\}_{\Lambda}. \quad (5)$$

Тогда $C_{ij} \in \text{Casim}_B(\Lambda)$. Таким образом, C определяет элемент пространства $\mathfrak{F}^2$, который на самом деле является 2-коциклом, $\partial C = 0$. Согласно [2], имеет место следующий важный факт.

Предложение 2. *Класс ∂ -когомологий $[C]$ не зависит от выбора Q и экспоненциальных отображений $\mathbf{f}$ и $\tilde{\mathbf{f}}$ в (4).*

Пусть $\text{Aut}(\Lambda)$ — группа линейных автоморфизмов пуассоновой структуры Λ на E и $\text{Aut}_0(\Lambda)$ — подгруппа внутренних автоморфизмов. При замене диффеоморфизма g в (4) на $g \circ h$, $h \in \text{Aut}(\Lambda)$, формула (5) задает 2-коцикл C_h , зависящий от h . Но можно показать, что ∂ -класс когомологий $[C_h]$ однозначно определяется только классом смежности (компонентой связности) $[h] \in \text{Out} = \text{Aut}(\Lambda)/\text{Aut}_0(\Lambda)$. Полагая $\mathfrak{C}_{[h]} = [C_h]$, получаем отображение $\text{Out}(\Lambda) \ni \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{C}_{\mathfrak{h}} \in H_{\partial}^2$.

Резюмируя, мы формулируем главный результат.

Теорема 1. *Пусть M — гладкое многообразие и $B \subset M$ — вложенное подмногообразие. Пусть заданы две пуассоновы структуры Ψ и $\tilde{\Psi}$ на M , для которых B является общим симплектическим листом полупростого и компактного типа. В этом случае диффеоморфизм ϕ между двумя окрестностями подмногообразия B в M , такой, что $\phi|_B = \text{id}_B$ и $\phi^*\tilde{\Psi} = \Psi$, существует тогда и только тогда, когда (а) конормальные расслоения $(E^*, [\cdot, \cdot]_{\Psi})$ и $(E^*, [\cdot, \cdot]_{\tilde{\Psi}})$ изоморфны и (b) $\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}} = 0$ для некоторого $\mathfrak{h} \in \text{Out}(\Lambda)$.*

Доказательство теоремы сводится к исследованию эквивалентности тензоров Пуассона Π и $\tilde{\Pi}$ в (4) в рамках метода гомотопии для пуассоновых структур спаривания [1], [2]. В нульмерном случае, $\dim B = 0$, результат следует из теоремы о линеаризации Конна [4]. Некоторые примеры, где $\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}} \neq 0$, даны в работах [2], [6].

Автор признателен М. В. Карасеву за полезные и стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yu. M. Vorobjev, in: Lie Algebroids and Related Topics in Differential Geometry, Banach Center Publ., vol. 54, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2001, 249–274. [2] Yu. M. Vorobjev, in: Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 216, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 241–277. [3] I. Vaisman, Internat. J. Geom. Methods Modern Phys., **1**:5 (2004), 607–637. [4] J. Conn, Ann. of Math., **121**:3 (1985), 565–593. [5] A. Weinstein, J. Diff. Geom., **18** (1983), 523–557. [6] B. Davis, A. Wade, in: Travaux Mathématiques, vol. 16, Univ. Luxemb., Luxembourg, 2005, 69–85.