Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Мустафаев, Слабо компактные гомоморфизмы регулярных банаховых алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 2, 85–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:06:31

УДК 517.98

Слабо компактные гомоморфизмы регулярных банаховых алгебр

© 2008. Г. С. МУСТАФАЕВ

Посвящается 70-летию профессора А. Д. Гаджиева

В этой заметке изучается структура слабо компактных гомоморфизмов банаховых алгебр.

Пусть A — комплексная коммутативная банахова алгебра, а M_A — пространство ее максимальных идеалов. Через $\hat{a}$ будем обозначать преобразование Гельфанда элемента $a \in A$. Если алгебра A не имеет единичного элемента, то алгебру, полученную из нее присоединением единицы, будем обозначать через A_1 . Хорошо известно, что $M_{A_1} = M_A \cup \{\phi_\infty\}$ является одноточечной компактификацией пространства M_A . Алгебра A называется *регулярной (по Шилову)* ([1, гл. 6], [2]), если для каждого $\phi \in M_A$ и замкнутого подмножества $S \subset M_A$, такого, что $\phi \notin S$, существует элемент $a \in A$, такой, что $\hat{a}(\phi) = 1$ и $\hat{a}(S) = \{0\}$. Хорошо известно, что регулярные банаховы алгебры обладают свойством нормальности: для каждого компакта $K \subset M_A$ и замкнутого подмножества $S \subset M_A$, такого, что $K \cap S = \emptyset$, существует элемент $a \in A$, удовлетворяющий условиям $\hat{a}(K) = \{1\}$ и $\hat{a}(S) = \{0\}$. Однако «управлять» нормой элемента a , вообще говоря, невозможно.

Регулярную банахову алгебру A будем называть *равномерно регулярной*, если существует такая константа $C > 0$, что для каждого компакта $K \subset M_A$ и $\phi \in M_A \setminus K$ найдется элемент $a \in A$, для которого $\hat{a}(\phi) = 0$, $\hat{a}(K) = \{1\}$ и $\|a\| \leq C$.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство и $C_0(X)$ — банахова алгебра всех непрерывных комплексных функций на X , стремящихся к нулю на бесконечности. В силу леммы Урысона $C_0(X)$ равномерно регулярна.

Коммутативная банахова алгебра A называется *ограниченно регулярной* ([3, с. 418], [4]), если она удовлетворяет следующим условиям: существует такая константа $C > 0$, что для каждой точки $\phi \in M_A$ и каждой окрестности U этой точки найдется элемент $a \in A$, для которого выполняются условия $\hat{a}(\phi) = 1$, $\text{supp } \hat{a} \subset U$ и $\|a\| \leq C$.

Пусть A — регулярная полупростая банахова алгебра. Положим

$$A_{00} = \{a \in A : \text{supp } \hat{a} \text{ компактен}\}.$$

Как известно [1, гл. 6], для произвольного $\phi \in M_A$ множество $I_\phi = \{a \in A : \hat{a}(\phi) = 0\}$ образует наибольший замкнутый идеал в A с оболочкой $\{\phi\}$, а $J_\phi = \overline{J_\phi^0}$ — наименьший замкнутый идеал в A с оболочкой $\{\phi\}$, где $J_\phi^0 = \{a \in A_{00} : \phi \notin \text{supp } \hat{a}\}$. Заметим, что $I_{\phi_\infty} = A$ и $J_{\phi_\infty}^0 = A_{00}$. Алгебра A называется *алгеброй Диткина*, если каждая точка из M_A (а в случае, когда A не имеет единичного элемента, и ϕ_∞) является множеством синтеза для A (для A_1). Таким образом, A является алгеброй Диткина тогда и только тогда, когда $I_\phi = J_\phi$ для всех $\phi \in M_A$ и $\overline{A_{00}} = A$.

Пример 1. Если G — компактная абелева группа, то $A = L^2(G)$ со сверткой в качестве умножения и обычной нормой является коммутативной банаховой алгеброй. Отметим, что $M_A = \widehat{G}$, где $\widehat{G}$ — группа характеров группы G . Преобразование Гельфанда элемента $f \in L^2(G)$ совпадает с его преобразованием Фурье $\hat{f}$. Так как M_A дискретно, то алгебра A регулярна. Нетрудно заметить, что A — ограниченно регулярная алгебра Диткина. Однако равенство Парсевалля

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\chi \in \widehat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2, \quad f \in L^2(G),$$

показывает, что A не является равномерно регулярной. Заметим также, что она не имеет ограниченной аппроксимативной единицы (о.а.е.).

Предложение 2. Пусть A — регулярная банахова алгебра с о.а.е. Если A ограниченно регулярна, то она равномерно регулярна.

Доказательство. Предположим, что алгебра A имеет аппроксимативную единицу, ограниченную некоторой константой $C > 0$. Пусть K — компактное подмножество в M_A и $\phi \in M_A \setminus K$. Так как алгебра A регулярна, то существует такой элемент $a \in A$, что $\hat{a}(K) = \{1\}$. В силу теоремы факторизации Коэна–Хьюитта [5, 32.22] существуют элементы $a_1, a_2 \in A$, такие, что $a = a_1 a_2$, $\|a_1 - a\| \leq 1$ и $\|a_2\| \leq C$. Пусть $b = a + a_2 - a a_2 = a_2 + (a_1 - a) a_2$. Тогда $\hat{b}(K) = \{1\}$ и $\|b\| \leq 2C$. С другой стороны, поскольку $\phi \notin K$, имеется такая окрестность U точки ϕ , что $U \cap K = \emptyset$. Так как алгебра A ограниченно регулярна, то существует константа $L > 0$ и элемент $d \in A$, для которых выполняются условия $\hat{d}(\phi) = 1$, $\text{supp } \hat{d} \subset U$ и $\|d\| \leq L$. Положим $h = b - db$. Тогда $\hat{h}(\phi) = \hat{b}(\phi) - \hat{d}(\phi)\hat{b}(\phi) = 0$, $\hat{h}(K) = \hat{b}(K) - \hat{d}(K)\hat{b}(K) = \hat{b}(K) = \{1\}$ и $\|h\| \leq (1 + \|d\|)\|b\| \leq 2C(1 + L)$.

Пусть G — локально компактная группа, и пусть $A_p(G)$ ($1 < p < \infty$) — пространство функций f на G , представимых в виде

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n * v_n^{\vee},$$

где $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(G)$, $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^q(G)$ ($1/p + 1/q = 1$), $v_n^{\vee}(g) = v_n(-g)$ и

$$\|f\| = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_p \|v_n\|_q < \infty;$$

здесь инфимум берется по всевозможным представлениям функции f . Тогда $A_p(G)$ есть коммутативная регулярная банахова алгебра относительно обычного умножения, часто называемая алгеброй Герца [6]. Более того, $A_p(G)$ является алгеброй Диткина [6]. Как замечено в [4], она ограниченно регулярна. С другой стороны, в случае когда группа G аменабельна, $A_p(G)$ имеет о.а.е. [6]. Теперь, применяя предложение 2, получаем такое

Предложение 3. Если G — аменабельная группа, то алгебра $A_p(G)$ равномерно регулярна.

Заметим, что если G — абелева группа, то $L^1(G) \cong A_2(\widehat{G})$ и потому $L^1(G)$ — равномерно регулярная алгебра Диткина.

Следующий пример показывает, что без условия аменабельности предложение 3 перестает быть верным.

Пример 4. Пусть G — дискретная группа, содержащая свободную группу F_2 с двумя образующими. Хорошо известно, что G неаменабельна. Кроме того, она содержит такое бесконечное множество S (множество Лейнера), что пространство $M = \{\varphi \in A_2(G)^* : \text{supp } \varphi \subseteq S\}$ изоморфно (по норме) пространству $l^2(S)$ [7]. Отсюда следует, что пространство M является сопряженным пространством пространства $A_2(G)/J_S$, где J_S — наименьший замкнутый идеал алгебры $A_2(G)$ с оболочкой S . Таким образом, $A_2(G)/J_S$ изоморфно пространству $l^2(S)$. Следовательно, существует такая константа $C > 0$, что при всех $f \in A_2(G)$

$$\|f\|^2 \geq \|f + J\|^2 \geq C \sum_{g \in S} |f(g)|^2.$$

Это показывает, что алгебра $A_2(G)$ не является равномерно регулярной.

Пусть $BV(\mathbb{R})$ — пространство всех комплексных функций на $\mathbb{R}$ с ограниченным изменением. Положим $BVC_0(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Тогда относительно обычного умножения и нормы

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \text{Var}_{\mathbb{R}}(f)$$

$BVC_0(\mathbb{R})$ становится регулярной банаховой алгеброй. Пространство максимальных идеалов этой алгебры отождествляется с $\mathbb{R}$ [8, следствие 3.2.8]. Нетрудно заметить, что алгебра $BVC_0(\mathbb{R})$ ограниченно регулярна и имеет о.а.е. Более того, $BVC_0(\mathbb{R})$ — алгебра Диткина (доказательство этого факта подобно доказательству из [8, с. 302, A.2.5]). Теперь, применяя предложение 2, получаем такое

Предложение 5. *$BVC_0(\mathbb{R})$ является равномерно регулярной банаховой алгеброй.*

В работах [9] и [10, следствие 3.7] доказано, что если G — локально компактная аменабельная группа, то любой слабо компактный гомоморфизм из $A_p(G)$ в произвольную банахову алгебру является конечномерным.

Основным результатом этой заметки является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть A — равномерно регулярная алгебра Диткина, а B — произвольная банахова алгебра (не обязательно коммутативная). Тогда любой слабо компактный гомоморфизм из A в B является конечномерным.*

Для доказательства нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 7. *Пусть — равномерно регулярная алгебра Диткина. Тогда для произвольного $\phi \in M_A \cup \{\phi_\infty\}$ идеал I_ϕ (и, в частности, алгебра A) имеет о.а.е.*

Доказательство. Пусть $\phi \in M_A \cup \{\phi_\infty\}$ и K_ϕ — направленное (по включению) множество компактных подмножеств пространства M_A , не содержащих точку ϕ . Так как алгебра A равномерно регулярна, то существует такая константа $C > 0$, что для каждого $K \in K_\phi$ найдется элемент $a_K \in A$, такой, что $\hat{a}_K(\phi) = 0$, $\hat{a}_K(K) = \{1\}$ и $\|a_K\| \leq C$. Возьмем произвольный элемент $b \in J_\phi^0$. Так как $\phi \notin \text{supp } \hat{b}$, то $\text{supp } \hat{b} \subset K$ для некоторого $K \in K_\phi$ и поэтому $a_K b = b$. Поскольку J_ϕ^0 плотно в I_ϕ , направленность $\{a_K\}_{K \in K_\phi}$ служит о.а.е. для I_ϕ . $\square$

Лемма 8. Пусть A — равномерно регулярная алгебра Диткина. Если S является относительно слабо компактным подмножеством в M_A , то оно конечно.

Доказательство. Предположим, что S — бесконечное множество. Тогда существует такая последовательность $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ попарно различных элементов множества S , что $\{\phi_n\}$ слабо сходится к ϕ . Нетрудно видеть, что $\phi \in M_A \cup \{\phi_\infty\}$. В силу леммы 7 алгебра A имеет о.а.е. Отсюда и из [10, предложение 2.8] следует, что M_A слабо замкнуто и поэтому $\phi \in M_A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая выпуклая комбинация элементов $\phi_{n_1}, \dots, \phi_{n_k} \in M_A$, что $\|\phi - \lambda_1 \phi_{n_1} - \dots - \lambda_k \phi_{n_k}\| < \varepsilon$, где $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, k$) и $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Так как алгебра A равномерно регулярна, то существует такая константа $C > 0$ и такой элемент $a \in A$, что $\hat{a}(\phi) = 0$, $\hat{a}(\phi_{n_1}) = \dots = \hat{a}(\phi_{n_k}) = 1$ и $\|a\| \leq C$. Следовательно,

$$|\hat{a}(\phi) - \lambda_1 \hat{a}(\phi_{n_1}) - \dots - \lambda_k \hat{a}(\phi_{n_k})| < \varepsilon \|a\| \leq \varepsilon C,$$

так что $1 < \varepsilon C$. То есть мы пришли к противоречию. $\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть $h: A \rightarrow B$ — слабо компактный гомоморфизм. Без ограничения общности можно считать, что $B = \overline{h(A)}$ и алгебра B коммутативна. Пусть $\psi \in M_B \cup \{\psi_\infty\}$ и $h^* \psi = \phi$ (очевидно, что $h^* \psi_\infty = \phi_\infty$). Положим $I_\psi = \{b \in B : \hat{b}(\psi) = 0\}$ и покажем, что $I_\psi = \overline{h(I_\phi)}$. Так как $\overline{h(I_\phi)} \subset I_\psi$, то достаточно доказать обратное включение. С этой целью возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $b \in I_\psi$. Тогда $\|b - h(a)\| \leq \varepsilon$ для некоторого $a \in A$, откуда следует, что $|\hat{a}(\phi)| \leq \varepsilon$. Далее, существует такой элемент $a_\phi \in A$, что $\hat{a}_\phi(\phi) = 1$ и $\|a_\phi\| \leq 2$. Если $d = a - \hat{a}(\phi)a_\phi$, то $d \in I_\phi$ и $\|b - h(d)\| = \|b - h(a) + \hat{a}(\phi)h(a_\phi)\| \leq \varepsilon + 2\varepsilon\|h\|$.

В силу леммы 7 идеал I_ϕ имеет о.а.е. $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Так как отображение h слабо компактно, без ограничения общности можно считать, что направленность $\{h(e_\lambda)\}$ слабо сходится к e для некоторого $e \in B$. Легко заметить, что $e \in I_\psi$. Мы видим, что, с одной стороны, направленность $\{h(a)h(e_\lambda)\}$ слабо сходится к $h(a)e$ при всех $a \in A$, а с другой стороны, $\{h(a)h(e_\lambda)\}$ сходится к $h(a)$ по норме при всех $a \in I_\phi$. Следовательно, $h(a)e = h(a)$ при всех $a \in I_\phi$. В силу плотности $h(I_\phi)$ в I_ψ получаем, что $be = b$ при всех $b \in I_\psi$. Таким образом, e является идемпотентом в I_ψ и потому $I_\psi = eB$.

Нетрудно видеть, что $h^* M_B \subset M_A$. Поэтому $h^* M_B$ является относительно слабо компактным подмножеством в M_A . В силу леммы 8 это конечное множество, $h^* M_B = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Так как h^* инъективно, $M_B = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Как мы уже заметили выше, $I_{\psi_i} = e_i B$ ($i = 1, \dots, n$), где e_i — некоторый идемпотент в I_{ψ_i} . Таким образом, $\text{Rad}(B) = \bigcap I_{\psi_i} = eB$, где $e = e_1 \dots e_n$. Так как $e^2 = e$ и $e \in \text{Rad}(B)$, то $e = 0$. Таким образом, B — полупростая банахова алгебра, пространство максимальных идеалов которой конечно. Следовательно, алгебра B конечномерна. $\square$

Следующий пример показывает, что без условия равномерной регулярности теорема 6 перестает быть верной.

Пример 9. Пусть G — бесконечная компактная абелева группа. Как мы уже заметили выше, $L^2(G)$ — алгебра Диткина, но она не является равномерно регулярной. Однако $\text{id}: L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ есть бесконечномерный слабо компактный гомоморфизм.

Следствие 10. Пусть A — равномерно регулярная алгебра Диткина, а X — замкнутый по норме A -подмодуль пространства A^* . Если X — рефлексивное пространство, то оно конечномерно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Е. Г. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматлит, М., 1960. [2] Е. А. Горин, УМН, **33**:4 (1978), 169–188. [3] K. B. Laursen, M. Neumann, *An Introduction to Local Spectral Theory*, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 2000. [4] A. Ülger, *Studia Math.*, **153**:1 (2002), 59–80. [5] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. 2, Наука, М., 1975. [6] C. Herz, *Ann. Inst. Fourier*, **23** (1973), 91–123. [7] M. Leinert, *Studia Math.*, **52** (1974), 149–158. [8] C. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1960. [9] E. E. Granirer, *Math. Japonica*, **46**:1 (1997), 69–72. [10] A. Ülger, *Monatsh. Math.*, **121**:4 (1996), 353–379. [11] J. E. Gale, T. J. Ransford, M. C. White, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **331**:2 (1992), 815–824. [12] E. E. Granirer, *Colloq. Math.*, **51** (1987), 155–163.

Университет Йузунджу Йыл, Турция
e-mail: hsmustafayev@yahoo.com

Поступило в редакцию
7 ноября 2006 г.

УДК 515.12+517.982.252

Непрерывные селекции как параметрически заданные интегралы*

© 2008. П. В. СЕМЕНОВ

Локальная выпуклость топологического векторного пространства (ТВП), содержащего значения отображения, является одним из решающих условий для получения положительных результатов как в теории продолжений (теорема Дугунджи), так и в теории селекций (теоремы Майкла) и в теории неподвижных точек (теоремы Тихонова, Гликсберга) отображений бесконечномерных пространств. Для теории неподвижных точек и для продолжения отображений получено значительное число результатов и при отсутствии локальной выпуклости ([5], [7], [8], [11]). В отличие от этого в теории селекций такие продвижения практически отсутствуют. Исключение составляет, пожалуй, недавняя работа Добровольского и ван Милла [6]. В настоящей заметке доказана теорема о наличии однозначных селекций для выпуклозначных отображений в ТВП, не являющиеся локально выпуклыми.

Определение 1. Семейство $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ выпуклых подмножеств ТВП Y называется *равномерно локально выпуклым*, если для любой окрестности $U = U(0)$ нуля в Y найдется такая окрестность $V = V(0)$ в Y , что для всякого индекса $\alpha \in A$ и всякого предкомпакта $B_\alpha \subset C_\alpha$ выпуклая оболочка множества $(B_\alpha - B_\alpha) \cap V$ содержится в U .

Грубо говоря, V -близость соответствующих вершин симплексов, принадлежащих B_α , гарантирует U -близость точек этих симплексов с одинаковыми ба-рицентрическими координатами. Для одноточечного множества индексов A ,

*Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00663.