Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Семенов, Непрерывные селекции как параметрически заданные интегралы, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 2, 89–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2908>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:28:44

Следствие 10. Пусть A — равномерно регулярная алгебра Диткина, а X — замкнутый по норме A -подмодуль пространства A^* . Если X — рефлексивное пространство, то оно конечномерно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Е. Г. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматлит, М., 1960. [2] Е. А. Горин, УМН, **33**:4 (1978), 169–188. [3] K. B. Laursen, M. Neumann, *An Introduction to Local Spectral Theory*, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 2000. [4] A. Ülger, *Studia Math.*, **153**:1 (2002), 59–80. [5] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. 2, Наука, М., 1975. [6] C. Herz, *Ann. Inst. Fourier*, **23** (1973), 91–123. [7] M. Leinert, *Studia Math.*, **52** (1974), 149–158. [8] C. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1960. [9] E. E. Granirer, *Math. Japonica*, **46**:1 (1997), 69–72. [10] A. Ülger, *Monatsh. Math.*, **121**:4 (1996), 353–379. [11] J. E. Gale, T. J. Ransford, M. C. White, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **331**:2 (1992), 815–824. [12] E. E. Granirer, *Colloq. Math.*, **51** (1987), 155–163.

Университет Йузунджу Йыл, Турция
e-mail: hsmustafayev@yahoo.com

Поступило в редакцию
7 ноября 2006 г.

УДК 515.12+517.982.252

Непрерывные селекции как параметрически заданные интегралы*

© 2008. П. В. СЕМЕНОВ

Локальная выпуклость топологического векторного пространства (ТВП), содержащего значения отображения, является одним из решающих условий для получения положительных результатов как в теории продолжений (теорема Дугунджи), так и в теории селекций (теоремы Майкла) и в теории неподвижных точек (теоремы Тихонова, Гликсберга) отображений бесконечномерных пространств. Для теории неподвижных точек и для продолжения отображений получено значительное число результатов и при отсутствии локальной выпуклости ([5], [7], [8], [11]). В отличие от этого в теории селекций такие продвижения практически отсутствуют. Исключение составляет, пожалуй, недавняя работа Добровольского и ван Милла [6]. В настоящей заметке доказана теорема о наличии однозначных селекций для выпуклозначных отображений в ТВП, не являющиеся локально выпуклыми.

Определение 1. Семейство $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ выпуклых подмножеств ТВП Y называется *равномерно локально выпуклым*, если для любой окрестности $U = U(0)$ нуля в Y найдется такая окрестность $V = V(0)$ в Y , что для всякого индекса $\alpha \in A$ и всякого предкомпакта $B_\alpha \subset C_\alpha$ выпуклая оболочка множества $(B_\alpha - B_\alpha) \cap V$ содержится в U .

Грубо говоря, V -близость соответствующих вершин симплексов, принадлежащих B_α , гарантирует U -близость точек этих симплексов с одинаковыми ба-рицентрическими координатами. Для одноточечного множества индексов A ,

*Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00663.

компакта $C = C_\alpha$ и $B_\alpha = C$ такой вариант локальной выпуклости («Zima's type») использовался в заметном числе работ по неподвижным точкам ([7], [11], [13]). Ниже метрическое подмножество ТВП (Y, τ) — это подмножество $M \subset Y$, наделенное метрикой ρ , для которой ρ -равномерность совпадает с $\tau|_M$ -равномерностью.

Теорема 2. Пусть (M, ρ) — метрическое подмножество ТВП Y и $F: X \rightarrow M$ — полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X с ρ -полными значениями, такое, что у каждой точки $x_0 \in X$ есть окрестность $W(x_0)$, для которой семейство $\{F(x)\}_{x \in W(x_0)}$ равномерно локально выпукло. Тогда существует непрерывная однозначная селекция $f: X \rightarrow M$ отображения F , т.е. $f(x) \in F(x)$, $x \in X$.

Подчеркнем, что поточечной равномерной локальной выпуклости значений $F(x)$, вообще говоря, недостаточно для наличия непрерывных селекций, см. ниже лемму 8. Доказательство следующей леммы адаптирует известное для локально выпуклых пространств рассуждение к случаю, когда C равномерно локально выпукло в ТВП (Y, τ) , ср. [7, с. 123].

Лемма 3. Если C равномерно локально выпукло и B — предкомпакт в C , то его выпуклая оболочка — также предкомпакт в C .

Схема доказательства. Пусть W — любая (симметричная) окрестность нуля в Y . Выберем (симметричные) окрестности U, V, V' нуля в Y так, чтобы (a) $U+U \subset W$; (b) V соответствовала U согласно определению 1; (c) $V'+V' \subset V$.

Для предкомпакта $B \subset C$ выберем конечную V' -сеть $K' \subset Y$. Ее можно V' -сдвинуть в B и найти конечную V -сеть $K \subset B$. Пусть $S \subset \text{conv}(K)$ — конечная U -сеть для конечномерного компакта $\text{conv}(K)$. Нетрудно проверить, что S есть W -сеть для выпуклой оболочки $\text{conv}(B)$ предкомпакта B . $\square$

Следствие 4. Замкнутая выпуклая оболочка $\overline{\text{conv}}(B)$ подкомпакта B полно метризуемого равномерно локально выпуклого множества C является компактом.

Можно показать, что если $\{B_t\}_{t \in T}$ — непрерывно (по Хаусдорфу) меняющееся семейство подкомпактов из равномерно локально выпуклого семейства $\{C_t\}_{t \in T}$, $B_t \subset C_t$, то непрерывно будут меняться и замкнутые выпуклые оболочки $\overline{\text{conv}} B_t$ этих подкомпактов.

Следствие 5. Если μ — вероятностная мера на компакте K , множество C удовлетворяет условиям следствия 4, а отображение $h: K \rightarrow C$ непрерывно, то $\int_K h \, d\mu$ существует и единствен.

Доказательство. Аналогично рассуждениям из [13] можно доказать, что на равномерно локально выпуклом множестве C есть разделяющее семейство аффинных числовых функций. После этого определение и доказательство существования интеграла проводятся по стандартной схеме [2] с использованием централизованных семейств выпуклых подкомпактов в C . $\square$

Обозначим через $\mathcal{E}(X)$ семейство всех непрерывных локально конечных разбиений единицы на паракомпакте X . Каждая функция из каждого разбиения единицы имеет два индекса: «фамилия» функции — это индекс γ всего разбиения единицы в семействе $\mathcal{E}(X)$, а «имя» функции — это ее индекс α внутри разбиения единицы, имеющего фиксированную «фамилию» γ . Итак, $\mathcal{E}(X) = \{e^\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, $e^\gamma = \{e_\alpha^\gamma\}_{\alpha \in A(\gamma)}$, $e_\alpha^\gamma: X \rightarrow [0, 1]$, $\sum_{\alpha \in A(\gamma)} e_\alpha^\gamma(\cdot) = 1$. Довольно удобным бывает отождествление функции e_α^γ (или носителя $\text{supp } e_\alpha^\gamma =$

$\text{Clos}\{x \in X : e_\alpha^\gamma(x) \neq 0\}$ функции e_α^γ с ее инициалами $(\gamma; \alpha)$. Каждое множество «имен» $A(\gamma)$ рассматривается при этом как дискретное топологическое пространство, множества $A(\gamma)$ попарно дизъюнкты, а декартово произведение $\mathcal{A} = \prod_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$ наделено тихоновской топологией. Элемент $a \in \mathcal{A}$ для каждой «фамилии» $\gamma \in \Gamma$ выбирает некоторое «имя» $a(\gamma) \in A(\gamma)$. Так как рассматриваются все покрытия, то для каждого $a \in \mathcal{A}$ пересечение $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \text{supp}(e_{a(\gamma)}^\gamma)$ либо пусто, либо одноточечно. Обозначим через Z множество всех тех $a \in \mathcal{A}$, для которых пересечение $p(a) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \text{supp}(e_{a(\gamma)}^\gamma)$ одноточечно. Отображение $p: Z \rightarrow X$ обладает рядом замечательных свойств.

Лемма 6 [12]. *Отображение $p: Z \rightarrow X$ является нульмерным мильютинским отображением, т. е.*

- (a) *p непрерывно и сюръективно;*
- (b) *p замкнуто, а прообразы $p^{-1}(x)$ точек $x \in X$ компактны, т. е. p совершенно;*
- (c) *в каждом прообразе $p^{-1}(x)$ определена вероятностная мера μ_x ;*
- (d) *отображение $X \rightarrow P(Z)$, $x \mapsto \mu_x$, непрерывно относительно $*$ -слабой топологии в пространстве $P(Z)$ всех вероятностных мер на Z с компактными носителями;*
- (e) *пространство Z паракомпактно и $\dim Z = 0$.*

Схема доказательства. Для каждой «фамилии» $\gamma \in \Gamma$ дизъюнктное объединение $Z_\gamma = \bigsqcup_{\alpha \in A(\gamma)} (\text{supp}(e_\alpha^\gamma) \times \{\alpha\}) \subset X \times A(\gamma)$ проектируем на первый сомножитель, $p_\gamma: Z_\gamma \rightarrow X$. Прообраз $p_\gamma^{-1}(x)$ — это конечное множество $\bigsqcup \{(x, \alpha) : x \in \text{supp}(e_\alpha^\gamma)\}$. Вероятностное распределение μ_x^γ на этом прообразе возникает естественным образом: $\mu_x^\gamma(x, \alpha) = e_\alpha^\gamma(x)$. Свойства (a)–(e) для отображений $p_\gamma: Z_\gamma \rightarrow X$ проверяются легко

Веерное произведение [1] всех отображений $\prod_{\gamma \in \Gamma} \{p_\gamma: Z_\gamma \rightarrow X\}$ практически совпадает с отображением p . Точнее, оно совпадает с веерным произведением тождественного отображения $\text{id}: \Delta_\Gamma(X) \rightarrow X$ диагонали произведения $\# \Gamma$ копий пространства X на X и отображения p . Остается заметить, что операции взятия веерного произведения и диагонального произведения сохраняют непрерывность, сюръективность, совершенность и «миллютиновость» отображений.

Пространство Z паракомпактно как прообраз паракомпакта при совершенном отображении. Действительно нетривиальным фактом является нульмерность пространства Z [12]. Проверка этого факта во многом повторяет проверку непрерывности отображения f , см. ниже. $\square$

Доказательство теоремы 2. К композиции $F \circ p: Z \rightarrow M$ применима нульмерная селекционная теорема Майкла, т. е. эта композиция имеет непрерывную однозначную селекцию, скажем $h: Z \rightarrow M$, $h(z) \in F(p(z))$, $z \in Z$. Тогда для каждого $x \in X$ компакт $h(p^{-1}(x))$ содержится в выпуклом равномерно локально выпуклом множестве $F(x)$.

Пусть μ_x — распределение мер, построенное в лемме 6, $\text{supp}(\mu_x) \subset p^{-1}(x)$. Для каждого $x \in X$ по следствию 5 существует и единствен интеграл $f(x) = \int_{p^{-1}(x)} h d\mu_x \in \overline{\text{conv}}(h(p^{-1}(x))) \subset F(x)$. Значит, получена однозначная селекция f отображения F , ср. [3].

Вплоть до этого момента равномерная локальная выпуклость множеств $F(x)$ была использована только поточечно, для каждого $x \in X$ в отдельности. Для

доказательства непрерывности построенной селекции $f: X \rightarrow M$ нужна равномерная локальная выпуклость семейств значений $F(x)$ в окрестностях точек $x \in X$.

Фиксируем произвольные $x_0 \in X$, окрестность $W(x_0)$ из условий теоремы 2, симметричные окрестности U, U_1, U_2 нуля в Y , для которых $U_1 + U_1 + U_1 \subset U$, $\text{Clos}(U_2) \subset U_1$, и симметричную окрестность нуля V , выбранную по $W(x_0)$ и U_2 в соответствии с определением 1 равномерной локальной выпуклости так, чтобы дополнительно $V + V \subset U_1$.

Для каждой точки z из нульмерного компакта $p^{-1}(x_0)$ выберем базисную окрестность $B(z)$, в которой колебание непрерывной функции $h: Z \rightarrow M \subset Y$ принадлежит V .

Лемма 7. *Существуют окрестность $W_1(x_0) \subset W(x_0)$ точки x_0 и конечное дизъюнктивное семейство базисных окрестностей $B_1, \dots, B_N$, вписанное в семейство $\{B(z)\}_{z \in p^{-1}(x_0)}$, такие, что $p^{-1}(x) \subset \bigsqcup_{j=1}^N B_j$ и $p^{-1}(x) \cap B_j \neq \emptyset$ для всех $x \in W_1(x_0)$ и всех $1 \leq j \leq N$.*

Схема доказательства. Фиксируем конечное подпокрытие $\{B(z_i)\}_{i=1}^n$ компакта $p^{-1}(x_0)$. Каждая базисная окрестность $B(z_i)$ задается конечным набором «фамилий» $\Gamma_i = \{\gamma_k^i\}_{k=1}^{m_i}$, для каждой из которых фиксировано конечное множество $C(\gamma_k^i)$ «имен», т. е. $B(z_i) = C(\gamma_1^i) \times C(\gamma_2^i) \times \dots \times C(\gamma_{m_i}^i) \times (\prod_{\gamma \notin \Gamma_i} A(\gamma))$.

При этом $x_0 \in \text{supp}(e_\alpha^{\gamma_k^i})$ для каждого $\alpha \in C(\gamma_k^i)$. Выбрав в каждом из множеств $C(\gamma_k^i)$ по одному индексу α_k^i , образуем элементарные дизъюнктивные базисные окрестности $\{\alpha_1^i\} \times \{\alpha_2^i\} \times \dots \times \{\alpha_{m_i}^i\} \times (\prod_{\gamma \notin \Gamma_i} A(\gamma))$, объединение которых (по всем возможным одноэлементным выборам $\alpha_k^i \in C(\gamma_k^i)$) равно $B(z_i)$. Сделав такое «рассыпание» каждой из окрестностей $\{B(z_i)\}_{i=1}^n$ и удалив возможные повторения, получим искомое конечное дизъюнктивное семейство базисных окрестностей $B_1, \dots, B_N$, вписанное в семейство $\{B(z)\}_{z \in p^{-1}(x_0)}$.

Окрестность $W_1(x_0)$ строится так. Для каждого $\gamma \in \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ пересечем все $\text{Int}(\text{supp}(e_\alpha^\gamma))$, содержащие точку x_0 , и из пересечения удалим все $\text{supp}(e_\alpha^\gamma)$, не содержащие точку x_0 . Получим « γ -малую» окрестность $\mathcal{O}_\gamma$ точки x_0 . Рассмотрим пересечение всех « γ -малых» окрестностей в окрестности $W(x_0)$, $W_1(x_0) = W(x_0) \cap (\bigcap_{\gamma \in \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i} \mathcal{O}_\gamma)$. Для каждого γ и каждой точки $x \in \mathcal{O}_\gamma$ множество «имен», содержащих x , есть подмножество множества «имен», содержащих x_0 . Эти включения для каждого $\gamma \in \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ гарантируют, что $p^{-1}(x) \subset \bigsqcup_{j=1}^N B_j$ и, более того, что все компакты $Z_j(x) = p^{-1}(x) \cap B_j$ непусты. $\square$

Для оценки разности $f(x) - f(x_0) = \int_{p^{-1}(x)} h d\mu_x - \int_{p^{-1}(x_0)} h d\mu_{x_0}$ каждый из интегралов приблизим конечными интегральными суммами и сравним погрешности этих приближений, а также разность между самими интегральными суммами. Для всех $x \in W_1(x_0)$ и всех $1 \leq j \leq N$ произвольно зафиксируем точки $z_j(x) \in Z_j(x)$. Тогда $1 = \mu_x(p^{-1}(x)) = \sum_j \mu_x(Z_j(x))$, и, отбрасывая слагаемые $h(z_j(x)) \cdot \mu_x(Z_j(x))$, для которых $\mu_x(Z_j(x)) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_x &= f(x) - \sum_j h(z_j(x)) \cdot \mu_x(Z_j(x)) \\ &= \sum_j \mu_x(Z_j(x)) \cdot \left(\int_{Z_j(x)} (h(z) - h(z_j(x))) d\left(\frac{\mu_x}{\mu_x(Z_j(x))}\right) \right). \end{aligned}$$

По построению точки $h(z)$ и $h(z_j(x))$ лежат в подкомпакте $h(p^{-1}(x))$ выпуклого множества $F(x)$ и $h(z) - h(z_j(x)) \in V$. В силу равномерной локальной выпуклости семейства $\{F(x)\}_{x \in W(x_0)}$ получаем, что

$$\int_{Z_j(x)} (h(z) - h(z_j(x))) d\left(\frac{\mu_x}{\mu_x(Z_j(x))}\right) \in \overline{\text{conv}}\{(h(p^{-1}(x)) - h(p^{-1}(x))) \cap V\} = C_x \subset \text{Clos}(U_2).$$

Тогда для любого $x \in W_1(x_0)$ погрешность Δ_x как конечная выпуклая комбинация точек из C_x также лежит в C_x и поэтому лежит в $\text{Clos}(U_2) \subset U_1$.

Для оценки погрешности

$$\Delta_{x,x_0} = \sum_j h(z_j(x)) \cdot \mu_x(Z_j(x)) - \sum_j h(z_j(x_0)) \cdot \mu_{x_0}(Z_j(x_0))$$

заметим, что $h(z_j(x)) - h(z_j(x_0)) \in V$, а значения мер $\mu_x(Z_j(x))$ по построению отображения $\mu: X \rightarrow P(Z)$ являются произведениями значений фиксированного числа непрерывных в точке x_0 числовых функций. Тогда в некоторой меньшей окрестности $W_2(x_0) \subset W_1(x_0)$ точки x_0 погрешность Δ_{x,x_0} будет лежать в $V + V \subset U_1$. В итоге, $f(x) - f(x_0) \in U_1 + U_1 + U_1 \subset U$ для всех $x \in W_2(x_0)$. Теорема 2 доказана. $\square$

Частными случаями теоремы 2 являются теоремы о сечениях линейных операторов с локально выпуклым ядром ([9, теорема 7.3], [4, гл. II, теорема 7.2]), о селекциях отображений в метризуемые подмножества локально выпуклых пространств [10, теорема 1.2] и о селекциях конечномерных выпуклозначных отображений в метризуемые не локально выпуклые ТВП [6, теорема 4.1].

Лемма 8. *Существует полунепрерывное снизу компактнозначное и выпуклозначное отображение, все значения которого поточечно являются равномерно локально выпуклыми множествами, но которое не имеет непрерывных однозначных селекций.*

Доказательство. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ нетрудно проверить, что семейство всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств размерности не более чем n является равномерно локально выпуклым семейством в любом ТВП. Поэтому нужный пример дает замечательная конструкция полунепрерывного снизу отображения гильбертова куба в метризуемое ТВП (не являющееся абсолютным ретрактом), все значения которого выпуклы, компактны и конечномерны, но которое не имеет непрерывных селекций, см. [6, теорема 5.2]. $\square$

В заключение повторим интересный открытый вопрос [6, вопрос 6.3]. Верно ли, что любое полунепрерывное снизу компактнозначное и выпуклозначное отображение метрического пространства в пространство l_p , $0 < p < 1$, имеет непрерывную однозначную селекцию?

Автор искренне признателен рецензенту за тщательное прочтение заметки и за сделанные им крайне важные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, Наука, Москва, 1973. [2] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1975. [3] П. В. Семенов, Е. В. Щепин, *Функц. анализ и его прил.*, **26:2** (1992), 36–40.

- [4] C. Bessaga, A. Pelczynski, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975. [5] T. Dobrowolski, Proc. Amer. Math. Soc., **93**:3 (1985), 555–560. [6] T. Dobrowolski, J. van Mill, Fund. Math., **192**:3 (2006), 215–232. [7] O. Hadzic, in: Lecture Notes in Math, vol. 948, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, 118–130. [8] V. Klee, Math. Ann, **141** (1960), 286–296. [9] E. Michael, Canad. J. Math., **11** (1959), 556–575. [10] E. Michael, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), 1404–1406. [11] S. Park, Topology Appl., **135**:1–3 (2004), 197–206. [12] D. Repovš, P. V. Semenov, E. V. Ščepin, Topology Appl., **54**:1–3 (1993), 77–83. [13] J. Roberts, Canad. J. Math., **30**:3 (1978), 449–454.

Московский городской педагогический университет,
математический факультет
e-mail: pavelc@orc.ru

Поступило в редакцию
15 января 2007 г.