Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Быковский, А. В. Устинов, Статистика траекторий частиц в однородной задаче Синая для двумерной решетки, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 10–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:14:48

УДК 511.336+511.9+517.987.5

Статистика траекторий частиц в однородной задаче Синая для двумерной решетки*

© 2008. В. А. Быковский, А. В. Устинов

Обозначения

1. $\|x\|$ — расстояние от вещественного числа x до ближайшего целого числа.
2. $\varphi(d)$ — количество целых чисел от 1 до d , взаимно простых с d (функция Эйлера).
3. $\mu(d)$ — функция Мебиуса.
4. Для натурального q и целого a через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q :

$$\delta_q(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

5. Конечные разности функции $a(u, v)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,0}a(u, v) &= a(u+1, v) - a(u, v), & \Delta_{0,1}a(u, v) &= a(u, v+1) - a(u, v), \\ \Delta_{1,1}a(u, v) &= \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0}a(u, v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1}a(u, v)). \end{aligned}$$

Введение

Пусть $0 < h < 1/(2\sqrt{2})$ и $T > 0$. Открытый круг радиуса h с центром в некоторой точке назовем h -окрестностью этой точки. Определим $\Omega_h(T)$ как подмножество в $[0, 2\pi)$, состоящее из углов φ , для которых луч

$$\{(t \cos \varphi, t \sin \varphi) \mid t \geq 0\} \quad (1)$$

пересекает h -окрестность некоторой целочисленной точки $(m, n) \neq (0, 0)$ из круга

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq T^2\}.$$

Обозначим через $G_h(T)$ нормированную меру множества $\Omega_h(T)$:

$$G_h(T) = \frac{1}{2\pi} \text{mes } \Omega_h(T) \in [0, 1].$$

В 1918 г. Д. По́я (см. [2, теория чисел, задача 239]) доказал, что $G_h(T) = 1$ для всех $T \geq h^{-1}$. Отвечая на вопрос, поставленный в 1981 г. Я. Г. Синаем, в

*Исследования первого автора выполнены при поддержке фонда INTAS, грант 03-51-5070, фонда РФФИ, грант 07-01-00306, и проекта ДВО РАН 06-I-II-13-047. Исследования второго автора выполнены при поддержке фонда INTAS, грант 03-51-5070, фонда РФФИ, грант 07-01-00306, проекта ДВО РАН 06-III-A-01-017 и Фонда содействия отечественной науке.

совместной работе [4] Ф. П. Бока, Р. Н. Гологан и А. Захареску доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по $T \in [0, h^{-1}]$

$$G_h(T) = \int_0^{hT} \sigma(t) dt + O_\varepsilon(h^{1/8-\varepsilon}), \quad (2)$$

где

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{12}{\pi^2}, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{12}{\pi^2} \left(\frac{1}{t} - 1\right) \left(1 - \log\left(\frac{1}{t} - 1\right)\right), & \text{если } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

С физической точки зрения величину $G_h(T)$ можно интерпретировать как функцию распределения длин свободного пробега частиц, движущихся прямолинейно из начала координат до первого попадания в h -окрестность некоторой ненулевой целочисленной точки. Речь идет об однородной двумерной модели «периодический газ Лоренца».

В связи с этим представляется интересной следующая более общая задача. Пусть $(m, n) = (m_h(\varphi), n_h(\varphi)) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — центр первой h -окрестности, в которую попадет луч (1). Обозначим через $T_h(\varphi)$ расстояние от начала координат до $M_h(\varphi)$ — проекции точки $(m_h(\varphi), n_h(\varphi))$ на луч (1). Введем также величину $U_h(\varphi) \in [-h, h]$, которая по абсолютной величине совпадает с расстоянием от $(m_h(\varphi), n_h(\varphi))$ до $M_h(\varphi)$. При этом $U_h(\varphi) > 0$ ($U_h(\varphi) < 0$), если при движении частицы по лучу (1) точка $(m_h(\varphi), n_h(\varphi))$ остается справа (слева). Удобно рассматривать нормированные значения этих величин:

$$t_h(\varphi) = h \cdot T_h(\varphi) \in [0, 1], \quad u_h(\varphi) = h^{-1} \cdot U_h(\varphi) \in [-1, 1].$$

Ориентируясь на терминологию из ядерной физики, назовем $u_h(\varphi)$ нормированным прицельным параметром; $t_h(\varphi)$ будем называть нормированным свободным пробегом.

Пусть $0 \leq t_0 \leq 1$ и $-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$. Как обычно, $\chi_I(\dots)$ — характеристическая функция промежутка I на вещественной прямой. Главным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. При любом $\varepsilon > 0$ для функции распределения

$$\Phi(h) = \Phi(h; \varphi_0, t_0, u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varphi_0} \chi_{[0, t_0]}(t_h(\varphi)) \chi_{[u_1, u_2]}(u_h(\varphi)) d\varphi$$

равномерно по t_0, u_1, u_2 и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(h) = \int_0^{\varphi_0} \int_0^{t_0} \int_{u_1}^{u_2} \rho(\varphi, t, u) d\varphi dt du + O_\varepsilon(h^{1/2-\varepsilon}),$$

где $h \rightarrow 0$

$$\rho(\varphi, t, u) = \rho(t, u) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^3}, & \text{если } |u| \leq \frac{1}{t} - 1; \\ \frac{3}{\pi^3} \frac{1}{|u|} \left(\frac{1}{t} - 1\right), & \text{если } |u| > \frac{1}{t} - 1. \end{cases}$$

Замечание 1. Если положить $\varphi_0 = 2\pi$, а также $u_1 = -1$ и $u_2 = 1$, то получим уточнение остаточного члена в асимптотической формуле (2), доказанной в работе [4].

Замечание 2. С физической точки зрения функцию $\rho(\varphi, t, u)$ можно интерпретировать как плотность частиц, движущихся прямолинейно из начала координат под углом φ к оси абсцисс, которые проходят до первого рассеяния в h -окрестностях целочисленных точек расстояние $T = h^{-1} \cdot t$ (свободный пробег) и попадают в h -окрестности с прицельным параметром $U = h \cdot u$.

Замечание 3. Плотность распределения $\rho(\varphi, t, u)$ не зависит от угла φ (изотропность).

§1. Применение непрерывных дробей

Очевидные симметрии в рассматриваемой задаче приводят к равенствам

$$t_h(\varphi) = t_h(-\varphi) = t_h(\varphi + \pi/2), \quad u_h(\varphi) = -u_h(-\varphi) = u_h(\varphi + \pi/2).$$

Поэтому теорему достаточно доказать только для $\varphi_0 \in [0, \pi/4]$, что и будет предполагаться в дальнейшем. При этом $\alpha = \arctg \varphi \in [0, 1]$.

Положим

$$l_\varphi(x, y) = x \sin \varphi - y \cos \varphi = \frac{\alpha x - y}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad (3)$$

$$l_\varphi^*(x, y) = x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{x + \alpha y}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \quad (4)$$

Замечание 4. Из определений величин $l_\varphi(x, y)$ и $l_\varphi^*(x, y)$ немедленно следует, что $(m_h(\varphi), n_h(\varphi))$ — целочисленная точка (m, n) с $|l_\varphi(m, n)| < h$, $m > 0$ и $n \geq 0$, для которой величина $l_\varphi^*(m, n)$ принимает наименьшее значение, равное

$$h^{-1} \cdot t_0(\varphi) = l_\varphi^*(m_h(\varphi), n_h(\varphi)).$$

При этом

$$h \cdot u_0(\varphi) = l_\varphi(m_h(\varphi), n_h(\varphi)).$$

Лемма 1. Целочисленная пара $(m_h(\varphi), n_h(\varphi))$ однозначно определяется из условий

$$m_h(\varphi) = \min \{m \in \mathbb{N} \mid \|\alpha m\| < h\sqrt{1 + \alpha^2}\}, \quad |\alpha m_h(\varphi) - n_h(\varphi)| < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого натурального m , меньшего $m_h(\varphi)$, выполняется неравенство

$$\|\alpha m\| \leq \|\alpha m_h(\varphi)\|.$$

Тогда при некотором целом $n \geq 0$

$$|\alpha m - n| = \|\alpha m\| \leq \|\alpha m_h(\varphi)\| = |\alpha m_h(\varphi) - n_h(\varphi)| < h\sqrt{1 + \alpha^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} n < \alpha m + \frac{1}{2} &\leq \alpha m_h(\varphi) + \frac{1}{2} = \alpha m_h(\varphi) - n_h(\varphi) + n_h(\varphi) + \frac{1}{2} \\ &< n_h(\varphi) + h\sqrt{1 + \alpha^2} + \frac{1}{2} < n_h(\varphi) + 1. \end{aligned}$$

То есть $n \leq n_h(\varphi)$. Но тогда

$$m \cos \varphi + n \sin \varphi < m_h(\varphi) \cos \varphi + n_h(\varphi) \sin \varphi.$$

Это неравенство противоречит замечанию 4. Значит, наше предположение неверно и лемма 1 полностью доказана. $\square$

Напомним, что любое вещественное число x каноническим способом разлагается в непрерывную дробь,

$$x = [q_0; q_1, \dots, q_i, \dots] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}},$$

с целой частью $q_0 = [x]$ и неполными частными $q_i = q_i(x) \in \mathbb{N}$ при $i \geq 1$. Она конечна только для рациональных x , и в этом случае ее последнее неполное частное (если оно присутствует в разложении) больше 1. По определению

$$P_i = P_i(x) \quad \text{и} \quad Q_i = Q_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

— числитель (целое число) и знаменатель (натуральное число) несократимой i -й подходящей дроби

$$\frac{P_i}{Q_i} = [q_0; q_1, \dots, q_{i-1}]$$

для x . При этом $P_1 = q_0$ и $Q_1 = 1$.

Лемма 2. *Целые $n_h(\varphi)$ и $m_h(\varphi)$ — числитель и знаменатель некоторой подходящей дроби для $\alpha = \operatorname{tg} \varphi \in [0, 1]$.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что не существует натуральных m , меньших $m_h(\varphi)$, для которых $\|\alpha m\| \leq \|\alpha m_h(\varphi)\|$. Отсюда, воспользовавшись теоремой Лагранжа о наилучших приближениях (см. [3]), получаем утверждение леммы 2. $\square$

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix} \quad (5)$$

с определителем $\det S = \pm 1$, у которых

$$1 \leq Q \leq Q', \quad 0 \leq P \leq Q, \quad 1 \leq P' \leq Q'.$$

Оно разбивается на два непересекающихся подмножества $\mathcal{M}_+$ и $\mathcal{M}_-$, состоящих из матриц с определителями $+1$ и -1 соответственно. В дальнейшем будем предполагать, что $*$ есть либо $+$, либо $-$, либо пустой символ. В зависимости от контекста, если это не приводит к недоразумениям, мы будем использовать обозначения P, P', Q, Q' вместо $P(S), P'(S), Q(S), Q'(S)$ для элементов матрицы S в соответствии с (5).

Пусть $X \geq 1$ и

$$\mathcal{M}_*(X) = \{S \in \mathcal{M}_* \mid (P')^2 + (Q')^2 \leq X^2\}.$$

Для $\alpha \in (0, 1)$ матрица

$$S_i(\alpha) = \begin{pmatrix} P_i(\alpha) & P_{i+1}(\alpha) \\ Q_i(\alpha) & Q_{i+1}(\alpha) \end{pmatrix}$$

есть элемент из $\mathcal{M}$ с определителем $\det S_i(\alpha) = (-1)^i$. Обозначим через $\tilde{\mathbb{N}}$ множество всех непустых конечных наборов $(q_1, \dots, q_n)$, составленных из натуральных чисел. Построим отображение

$$\mathcal{B}: \quad \tilde{\mathbb{N}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k \rightarrow \mathcal{M},$$

положив

$$\mathcal{B}(q_1, \dots, q_n) = S = S(q_1, \dots, q_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix}.$$

При этом S имеет вид (5) с

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \dots, q_{n-1}] \quad \text{и} \quad \frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \dots, q_n].$$

С помощью свойств непрерывных дробей легко проверяется следующее утверждение.

Лемма 3. *Отображение $\mathcal{B}$ — биекция.*

Любопытно отметить (хотя это и не понадобится нам в дальнейшем), что $\mathcal{M}$ — полугруппа относительно обычного умножения матриц, а биекция $\mathcal{B}$ на самом деле есть полугрупповой изоморфизм. При этом

$$(q_1, \dots, q_n) * (q_{n+1}, \dots, q_{n+m}) = (q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$$

— соответствующая операция на конечных наборах натуральных чисел.

Сопоставим каждой матрице

$$S = S(q_1, \dots, q_n) = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

полуинтервал

$$\begin{aligned} I(S) &= \{\alpha = [0; q_1, \dots, q_{n-1}, q_n + \beta] \mid 0 \leq \beta < 1\} = \\ &= \left\{ \alpha = \frac{P' + \beta P}{Q' + \beta Q} \mid 0 \leq \beta < 1 \right\} = \left\{ \alpha \in (0, 1] \mid -1 < \frac{\alpha Q' - P'}{\alpha Q - P} \leq 0 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

При этом в случае $S \in \mathcal{M}_+$

$$I(S) = \left[\frac{P'}{Q'}, \frac{P' + P}{Q' + Q} \right) = \left[\frac{P'}{Q'}, \frac{P'}{Q'} + \frac{1}{Q'(Q' + Q)} \right),$$

а в случае $S \in \mathcal{M}_-$

$$I(S) = \left(\frac{P' + P}{Q' + Q}, \frac{P'}{Q'} \right] = \left(\frac{P'}{Q'} - \frac{1}{Q'(Q' + Q)}, \frac{P'}{Q'} \right].$$

Далее, положим для $S \in \mathcal{M}_+$

$$I_h(S) = \{\alpha \in (0, 1] \mid 0 \leq \alpha Q' - P' < h\sqrt{1 + \alpha^2} \leq -\alpha Q + P\},$$

а для $S \in \mathcal{M}_-$

$$I_h(S) = \{\alpha \in (0, 1] \mid 0 \leq -\alpha Q' + P' < h\sqrt{1 + \alpha^2} \leq \alpha Q - P\}.$$

Из последнего представления для $I(S)$ в (6) немедленно вытекает включение

$$I_h(S) \subset I(S), \quad (7)$$

а также следующее утверждение.

Замечание 5. Величины P/Q и P'/Q' — последовательные подходящие дроби для α , однозначно определяемые по α и h .

Пусть

$$f_S(\beta) = Q'\beta - h\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'} + \det S \cdot \beta\right)^2}.$$

Так как

$$f'_S(\beta) = Q' - h\frac{\det S \cdot (P'/Q') + \beta}{\sqrt{1 + (\det S \cdot (P'/Q') + \beta)^2}} > Q' - h > 0$$

и

$$f_S(0) = -h\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2} < 0,$$

то уравнение $f_S(\beta) = 0$ имеет единственный положительный корень, который мы обозначим через $\lambda = \lambda_S(h)$. Заметим, что

$$\left(\frac{Q'\lambda}{h}\right)^2 = 1 + \left(\frac{P'}{Q'} + \det S \cdot \lambda\right)^2 \leq 3 + 2\lambda^2.$$

Так как

$$2 \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{h}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\left(\frac{Q'}{h}\right)^2,$$

то

$$\lambda^2 \leq \frac{3}{(Q'/h)^2 - 2} \leq \frac{3}{(Q'/h)^2 - \frac{1}{4}(Q'/h)^2} = \left(\frac{2h}{Q'}\right)^2.$$

Поэтому

$$\lambda_S(h) \leq \frac{2h}{Q'}. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$g_S(\beta) = Q\beta + h\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'} + \det S \cdot \beta\right)^2},$$

для которой

$$g'_S(\beta) = Q + h\frac{\det S \cdot (P'/Q') + \beta}{\sqrt{1 + (\det S \cdot (P'/Q') + \beta)^2}} > Q - h > 0.$$

Это возрастающая функция и

$$g_S(0) = h\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2}.$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Замечание 6. Уравнение $g_S(\beta) = 1/Q'$ имеет единственный (неотрицательный) корень $\eta = \eta_S(h)$ только в случае, когда

$$h\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2} \leq \frac{1}{Q'}, \quad \text{т.е. } S \in \mathcal{M}(h^{-1}).$$

Подводя итог сказанному выше и обращаясь к определению множества $I_h(S)$, приходим к следующему утверждению.

Замечание 7. Множество $I_h(S)$ непусто только для $S \in \mathcal{M}(h^{-1})$, и при $S \in \mathcal{M}_+(h^{-1})$ оно совпадает с

$$\left[\frac{P'}{Q'}, \frac{P'}{Q'} + \lambda_S(h) \right) \cap \left[\frac{P'}{Q'}, \frac{P'}{Q'} + \eta_S(h) \right],$$

а при $S \in \mathcal{M}_-(h^{-1})$ — с

$$\left(\frac{P'}{Q'} - \lambda_S(h), \frac{P'}{Q'} \right] \cap \left[\frac{P'}{Q'} - \eta_S(h), \frac{P'}{Q'} \right].$$

Лемма 4. Множества $I_h(S)$ попарно не пересекаются и

$$\bigcup_{S \in \mathcal{M}(h^{-1})} I_h(S) = \left[\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}, 1 \right].$$

Доказательство. Первая часть утверждения леммы непосредственно следует из замечания 5. Далее, пусть $P_j = P_j(\alpha)$ и $Q_j = Q_j(\alpha)$ — числитель и знаменатель j -й подходящей дроби для числа $\alpha \in (0, 1]$. Так как последовательность

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha Q_1 - P_1, \quad \dots, \quad \alpha_j = \alpha Q_j - P_j, \quad \dots \quad (9)$$

по абсолютной величине монотонно убывает к нулю, то существует

$$i = i_h(\alpha) = \min \{j \mid |\alpha Q_j - P_j| < h\sqrt{1+\alpha^2}\}.$$

Если $i = 1$, то (напомним, что $P_1 = 0$ и $Q_1 = 1$)

$$|\alpha Q_1 - P_1| = \alpha < h\sqrt{1+\alpha^2}, \quad \text{т.е.} \quad \alpha \in \left(0, \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\right).$$

Для всех остальных α всегда $i \geq 2$ и при этом $|\alpha Q_{i-1} - P_{i-1}| \geq h\sqrt{1+\alpha^2}$. Принимая во внимание знакопеременность последовательности (9) и замечание 6, а также положив

$$S = \begin{pmatrix} P_{i-1} & P_i \\ Q_{i-1} & Q_i \end{pmatrix},$$

получим вторую часть утверждения леммы 4. □

§2. Вспомогательные преобразования

В соответствии с введенными ранее обозначениями положим

$$\xi_S(\alpha) = \chi_{[u_1, u_2]} \left(\frac{\alpha Q' - P'}{h\sqrt{1+\alpha^2}} \right), \quad I_h^{(\alpha_0)}(S) = [0, \alpha_0] \cap I_h(S).$$

Переходя к переменной $\alpha = \operatorname{tg} \varphi \in [0, 1]$ в интеграле, определяющем $\Phi(h)$ (см. формулировку теоремы во введении), и применяя лемму 4, получаем

$$\Phi(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S \in \mathcal{M}(h^{-1})} \int_{I_h^{(\alpha_0)}(S)} \chi_{[0, t_0]} \left(\frac{h(Q' + \alpha P')}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right) \xi_S(\alpha) \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} + O(h).$$

Так как

$$\left(\frac{Q' + \alpha P'}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha Q' - P'}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right)^2 = (P')^2 + (Q')^2,$$

то для любого $\alpha \in I_h(S)$

$$(P')^2 + (Q')^2 - h^2 < \left(\frac{Q' + \alpha P'}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right)^2 \leq (P')^2 + (Q')^2.$$

Поэтому если

$$(t_0 h^{-1})^2 < (P')^2 + (Q')^2$$

и для некоторого $\alpha \in I_h(S)$

$$\chi_{[0, t_0]} \left(\frac{h(Q' + \alpha P')}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right) = 1,$$

то

$$(t_0 h^{-1})^2 < (P')^2 + (Q')^2 < (t_0 h^{-1})^2 + h^2 \leq (t_0 h^{-1})^2 + 1/8.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой

$$\int_{I_h^{(\alpha_0)}(S)} d\alpha \leq \int_{I_h(S)} d\alpha \leq \lambda_S(h) \leq \frac{2h}{Q'}$$

(см. также (8)), получаем равенство

$$\Phi(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S \in \mathcal{M}(t_0 h^{-1})} \int_{I_h^{(\alpha_0)}(S)} \xi_S(\alpha) \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} + R_1,$$

где

$$R_1 \ll h + \sum_{\substack{(t_0/h)^2 \leq (P')^2 + (Q')^2 < (t_0/h)^2 + 1/8 \\ 1 \leq P' \leq Q'}} \frac{h}{Q'} \ll h + \frac{h}{t_0/h + 1/2} \sum_{Q' \leq t_0/h + 1/2} 1 \ll h.$$

В соответствии с оценкой (8) для $\alpha \in I_h(S)$ по теореме Лагранжа

$$\left| \frac{1}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{1 + (P'/Q')^2} \right| \leq \left| \alpha - \frac{P'}{Q'} \right| \leq \lambda_S(h) \leq \frac{2h}{Q'}.$$

Следовательно,

$$\Phi(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S \in \mathcal{M}(t_0 h^{-1})} \frac{1}{1 + (P'/Q')^2} \int_{I_h^{(\alpha_0)}(S)} \xi_S(\alpha) d\alpha + R_2,$$

где

$$R_2 \ll h + \sum_{1 \leq P' \leq Q' \leq h^{-1}} \frac{h}{Q'} \cdot \frac{h}{Q'} \ll h.$$

Опираясь на неравенство

$$\left| \alpha - \frac{P'}{Q'} \right| \leq \frac{2h}{Q'} \quad \forall \alpha \in I_h(S)$$

и положив

$$\mathcal{M}_*^{(\alpha_0)}(X) = \{S \in \mathcal{M}_*(X) \mid P' \leq \alpha_0 Q'\},$$

получим, что

$$\Phi(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S \in \mathcal{M}^{(\alpha_0)}(t_0 h^{-1})} \frac{1}{1 + (P'/Q')^2} \int_{I_h(S)} \xi_S(\alpha) d\alpha + R_3, \quad (10)$$

где

$$R_3 \ll h + \sum_{\substack{1 \leq P' \leq Q' \leq h^{-1} \\ |\alpha_0 Q' - P'| \leq 2h}} \frac{h}{Q'} \ll h + h \sum_{Q' \leq h^{-1}} \frac{1}{Q'} \ll h \cdot \log \frac{1}{h}.$$

Заметим что

1) для $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$

$$\Phi(\dots, u_1, u_2) = \Phi(\dots, 0, u_2) - \Phi(\dots, 0, u_1);$$

2) для $-1 \leq u_1 \leq 0 \leq u_2 \leq 1$

$$\Phi(\dots, u_1, u_2) = \Phi(\dots, u_1, 0) + \Phi(\dots, 0, u_2);$$

3) для $-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 0$

$$\Phi(\dots, u_1, u_2) = \Phi(\dots, u_1, 0) - \Phi(\dots, u_2, 0).$$

Поэтому теорему достаточно доказать только в случаях $u_1 = 0$ и $u_2 = u_0$ или $u_1 = -u_0$ и $u_2 = 0$ с $u_0 \in [0, 1]$. При этом в соответствии с равенством (10)

$$\Phi_+(h) = \Phi(h; \varphi_0, t_0, 0, u_0) = \tilde{\Phi}_+(h) + O\left(h \log \frac{1}{h}\right) \quad (11)$$

и

$$\Phi_-(h) = \Phi(h; \varphi_0, t_0, -u_0, 0) = \tilde{\Phi}_-(h) + O\left(h \log \frac{1}{h}\right), \quad (12)$$

где

$$\tilde{\Phi}_{\pm}(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S \in \mathcal{M}_{\pm}^{(\alpha_0)}(t_0 h^{-1})} \frac{\min\{\lambda_S(u_0 h), \eta_S(h)\}}{1 + (P'/Q')^2}.$$

Из уравнения, определяющего $\lambda_S(h)$, и оценки (8) следует, что

$$\lambda_S(h) = \tilde{\lambda}_S(h) + O\left(\left(\frac{h}{Q'}\right)^2\right) \quad \text{с} \quad \tilde{\lambda}_S(h) = \frac{h}{Q'} \sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2}.$$

Аналогично, для $\eta_S(h) \leq \lambda_S(h)$ выполняется асимптотическое равенство

$$\eta_S(h) = \tilde{\eta}_S(h) + O\left(\frac{h^2}{QQ'}\right) \quad \text{с} \quad \tilde{\eta}_S(h) = \frac{1}{QQ'} - \frac{h}{Q} \sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2}.$$

Поэтому

$$\min\{\lambda_S(u_0 h), \eta_S(h)\} = \min\{\tilde{\lambda}_S(u_0 h), \tilde{\eta}_S(h)\} + O\left(\frac{h^2}{QQ'}\right).$$

Положив

$$\Psi(x, y) = \Psi(Q'; x, y) = \frac{\min\{u_0 h Q' \sqrt{1 + x^2}, \frac{1}{y}(1 - h Q' \sqrt{1 + x^2})\}}{1 + x^2},$$

окончательно получаем, что

$$\tilde{\Phi}_{\pm}(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S \in \mathcal{M}_{\pm}^{(\alpha_0)}(t_0 h^{-1})} \frac{1}{(Q')^2} \Psi\left(\frac{P'}{Q'}, \frac{Q}{Q'}\right) + R_4, \quad (13)$$

где

$$R_4 \ll \sum_{1 \leq Q \leq Q' \leq h^{-1}} \frac{h^2}{QQ'} \ll h^2 \log^2 \frac{1}{h} \ll h.$$

Введем функцию

$$\Psi_0(x, y) = \Psi_0(Q'; x, y) = \begin{cases} \Psi(Q'; x, y), & \text{если } x \leq \alpha_0, \sqrt{1+x^2} \leq t_0(hQ')^{-1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для фиксированного значения $Q' = q$ числа P' и Q должны быть решениями сравнения $ab \equiv \pm 1 \pmod{q}$. Поэтому величины $\tilde{\Phi}_{\pm}(h)$ могут быть переписаны в виде

$$\tilde{\Phi}_{\pm}(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q \leq h^{-1}} \frac{1}{q^2} \sum_{a, b=1}^q \delta_q(ab \pm 1) \Psi_0\left(\frac{a}{q}, \frac{b}{q}\right) + O(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q \leq h^{-1}} \frac{1}{q^2} W_{\pm}(q) + O(h), \quad (14)$$

где

$$W_{\pm}(q) = \sum_{a, b=1}^q \delta_q(ab \pm 1) \Psi_0\left(\frac{a}{q}, \frac{b}{q}\right). \quad (15)$$

§3. Применение оценок сумм Клостермана

Далее предполагается, что ε — сколь угодно малая положительная константа. С помощью оценок сумм Клостермана, принадлежащих Эстерману [5], стандартным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть q, k, l — натуральные числа. Тогда

$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^l \delta_q(ab \pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2} kl + O_{\varepsilon}(q^{1/2+\varepsilon}).$$

Доказательство см. в [1].

Лемма 6. Пусть q — натуральное число, $q \ll h^{-1}$. Тогда для суммы $W_{\pm}(q)$, заданной равенством (15), справедлива асимптотическая формула

$$W_{\pm}(q) = \varphi(q) \int_0^1 \int_0^1 \Psi_0(q; x, y) dx dy + O_{\varepsilon}(hq^{3/2+\varepsilon}).$$

Доказательство. Применив к сумме $W_{\pm}(q)$ преобразование Абеля

$$\sum_{n=1}^q f(n)g(n) = g(q+1) \sum_{n=1}^q f(n) - \sum_{k=1}^q \left(\sum_{n=1}^k f(n) \right) (g(k+1) - g(k))$$

последовательно по переменным a и b (сначала выбираем $f(a) = \delta_q(ab - 1)$, $g(a) = \Psi_0(a/q, b/q)$, а затем $f(b) = \sum_{a=1}^k \delta_q(ab - 1)$, $g(b) = \Delta_{1,0}\Psi_0(a/q, b/q)$), находим, что

$$W_{\pm}(q) = \sum_{k,l=1}^q \Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^l \delta_q(ab - 1).$$

Применяя к двойной внутренней сумме лемму 5, получаем

$$\begin{aligned} W_{\pm}(q) &= \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{k,l=1}^q \Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) kl + O_{\varepsilon}(Aq^{1/2+\varepsilon}) \\ &= \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{k,l=1}^q \Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) \sum_{u=1}^k \sum_{v=1}^l 1 + O_{\varepsilon}(Aq^{1/2+\varepsilon}), \end{aligned}$$

где

$$A = \sum_{k,l=1}^q \left| \Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) \right|.$$

Делая суммирование по a и b внешним, а потом суммируя по k и l , находим

$$\begin{aligned} W_{\pm}(q) &= \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{a,b=1}^q \Psi_0\left(\frac{a}{q}, \frac{b}{q}\right) + O_{\varepsilon}(Aq^{1/2+\varepsilon}) \\ &= \varphi(q) \int_0^1 \int_0^1 \Psi_0(x, y) dx dy + O_{\varepsilon}(Aq^{1/2+\varepsilon} + hq). \end{aligned}$$

Из определения функции $\Psi_0(x, y)$ немедленно следует, что

$$\Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) \geq 0$$

во всех точках $(k/q, l/q)$ за исключением, быть может, тех, для которых кривая

$$u_0 h q \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} (1 - h q \sqrt{1+x^2}) \quad (0 \leq x, y \leq 1)$$

пересекает квадрат $[k/q, (k+1)/q] \times [l/q, (l+1)/q]$. Таких точек $O(q)$, и в каждой из них

$$\Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) \ll \Delta_{1,0}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) \ll h.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k,l=1}^q \Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) + O(hq) \\ &= \Psi_0(0, 0) - \Psi_0\left(\frac{q+1}{q}, 0\right) - \Psi_0\left(0, \frac{q+1}{q}\right) + \Psi_0\left(\frac{q+1}{q}, \frac{q+1}{q}\right) + O(hq) \\ &= O(hq) \end{aligned}$$

и

$$W_{\pm}(q) = \varphi(q) \int_0^1 \int_0^1 \Psi_0(q; x, y) dx dy + O_{\varepsilon}(hq^{3/2+\varepsilon}). \quad \square$$

Теперь у нас есть все необходимое для доказательства основного результата. С учетом формул (11) и (12) достаточно проверить, что

$$\tilde{\Phi}_{\pm}(h) = \int_0^{\alpha_0} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^{t_0} dr \int_0^{u_0} \rho(r, u) du + O_{\varepsilon}(h^{1/2-\varepsilon}),$$

где $\rho(r, u)$ определено в формулировке теоремы.

Подставляя результат леммы 6 в формулу (14), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\pm}(h) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q \leq h^{-1}} \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_0^1 \int_0^1 \Psi_0(q; x, y) dx dy + O_{\varepsilon}(h^{1/2-\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{d \leq h^{-1}} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{n \leq (dh)^{-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Psi_0(nd; x, y)}{n} dx dy + O_{\varepsilon}(h^{1/2-\varepsilon}). \end{aligned} \quad (16)$$

Преобразуем внутреннюю сумму, пользуясь определением функции $\Psi_0(x, y)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{n \leq (dh)^{-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Psi_0(nd; x, y)}{n} dx dy \\ &= dh \int_0^{\alpha_0} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^1 dy \sum_{n \leq (dh\sqrt{1+x^2})^{-1}} \min \left\{ u_0 \sqrt{1+x^2}, \frac{1}{y} \left(\frac{1}{dh n} - \sqrt{1+x^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Заменяя сумму по n интегралом и вводя новую переменную интегрирования $r = ndh\sqrt{1+x^2}$, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{n \leq (dh)^{-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Psi_0(nd; x, y)}{n} dx dy \\ &= \int_0^{\alpha_0} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^{t_0} dr \int_0^1 dy \min \left\{ u_0, \frac{1}{y} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \right\} + O(dh) \\ &= \frac{\pi^3}{3} \int_0^{\alpha_0} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^{t_0} dr \int_0^{u_0} \rho(r, u) du + O(dh). \end{aligned}$$

Подстановка последней формулы в (16) дает

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\pm}(h) &= \frac{\pi^2}{6} \int_0^{\alpha_0} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^{t_0} dr \int_0^{u_0} \rho(r, u) du \cdot \sum_{d \leq h^{-1}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O_{\varepsilon}(h^{1/2-\varepsilon}) = \\ &= \int_0^{\alpha_0} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^{t_0} dr \int_0^{u_0} \rho(r, u) du + O_{\varepsilon}(h^{1/2-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Теорема, сформулированная во введении, полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. О. Авдеева, *О статистиках неполных частных конечных цепных дробей*, Функц. анализ и его прил., **38**:2 (2004), 1–11.
- [2] Г. Поляа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, т. 2, Наука, М., 1978.
- [3] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Наука, М., 1978.
- [4] F. P. Boca, R. N. Gologan, A. Zaharescu, *The statistics of the trajectory of a certain billiard in a flat two-torus*, Comm. Math. Phys., **240**:1–2 (2003), 53–73.
- [5] T. Estermann, *On Kloosterman's sum*, Mathematika, **8** (1961), 83–86.

Хабаровское отделение Института
прикладной математики ДВО РАН
e-mail: vab@iam.khv.ru

Поступило в редакцию
24 января 2007 г.

Хабаровское отделение Института
прикладной математики ДВО РАН
e-mail: ustinov@iam.khv.ru